

BAB II

KAJIAN TEORI

A. Deskripsi Teori

1. Pengertian Matematika

Matematika merupakan salah satu pelajaran yang penting untuk dipelajari. Matematika sebagai kunci dari kemajuan ilmu pendidikan dan teknologi. Negara yang mengabaikan matematika akan tertinggal dari kemajuan teknologi. Faktanya, matematika seperti induk dari segala ilmu. Semua pelajaran pasti akan menggunakan matematika sebagai dasar untuk mempelajarinya.

Istilah matematika berasal dari kata Yunani “mathein” atau “manthenein”, yang artinya “mempelajari”. Patut diduga bahwa kedua kata itu erat hubungannya dengan Sansekerta “medha” atau “widya” yang artinya “kepandaian” atau “intelegesia”. Menurut Hadiwidjojo dalam bahasa Inggris “mathemata” menjadi “mathematics”, dalam bahasa Jerman “mathematik”, dalam bahasa perancis “mathematique” dan dalam bahasa Belanda “mathematica” atau “wiskunde”. Wiskunde berarti “wise of zekere kunde” dan berisi “meetkunde en algebra”. Wisse adalah kata lain dari stere yang berasal dari kata Yunani kuno “stereos” yang berarti ukuran isi 1 m^3 . karena “wis” dalam wiskunde tidak berasal dari “wis” yang berarti “pasti”, maka terjemahan Ilmu Pasti untuk “Wiskunde” kurang tepat. Matematika sebagai subjek kajian

dimulai pada abad ke enam SM. Pythagoras membuat istilah “mathematics” dari bahasa Yunani “mathema” yang berarti “materi pelajaran”.¹

Banyak ahli yang mengartikan pengertian matematika baik secara umum maupun secara khusus. Hudojo (1998) menyatakan bahwa: “matematika merupakan ide-ide abstrak yang diberi simbol-simbol itu tersusun secara hirarkis dan penalarannya dedukti, sehingga belajar matematika itu merupakan kegiatan mental yang tinggi.” Sedangkan James dalam kamus matematikanya menyatakan bahwa “Matematika adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran dan konsep-konsep berhubungan lainnya dengan jumlah yang banyak yang terbagi ke dalam tiga bidang, yaitu aljaar, analisis dan goemetri. Matematika dikenal sebagai ilmu deduktif, karena setiap metode yang digunakan dalam mencari kebenaran adalah dengan menggunakan metode deduktif, sedang dalam ilmu alam menggunakan metode induktif atau eksprimen.²

Berdasarkan pada beberapa definisi matematika yang telah ada, peneliti menarik kesimpulan bahwa matematika merupakan ilmu pengetahuan yang berhubungan dengan bilangan yang diperoleh dari kegiatan bernalar dan bukan merupakan ilmu pasti yang tidak bisa mengalami perkembangan.

2. Penalaran Matematika

Peraturan Menteri Pendidikan Nasional RI Nomor 22 Tahun 2006 menjelaskan bahwa tujuan pelajaran matematika di sekolah adalah agar peserta

¹ Suyitno Hardi. *Filafat Matematika*. (Semarang:FMIPA UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG. 2014). hal. 12.

² Hasratuddin. *Membangun Karakter Melalui Pembelajaran Matematika*. Jurnal Pendidikan Matematika Paradikma. Vol6 No 2. Prodi Pendidikan Matematika Pascasarjana FMIPA(UNIMED. hal. 130-141.

didik memiliki kemampuan sebagai berikut:³

1. Memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah;
2. Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika;
3. Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh;
4. Mengomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah;
5. Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah.

Sementara tujuan pembelajaran matematika yang ke nomor dua, yaitu menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika sehingga hal ini berarti bahwa penalaran adalah salah satu fondasi untuk mempelajari matematika. Penalaran berasal dari kata nalar, mempunyai arti aktivitas yang memungkinkan seseorang

³ Moch. Masykur Ag dan Abdul Halim F, *Mathematical Intelligence: Cara Cerdas Melatih Otak dan Menanggulangi Kesulitan Belajar*,.....hal.42-43

berpikir logis. Penalaran yaitu proses mental dalam mengembangkan pikiran dari beberapa fakta atau prinsip.⁴

Penalaran merupakan suatu konsep yang paling umum menunjuk pada salah satu proses pemikiran untuk sampai pada kesimpulan sebagai pernyataan baru dari beberapa pernyataan lain yang telah diketahui.⁵ Penalaran merupakan suatu proses berpikir dalam menarik suatu kesimpulan yang berupa pengetahuan.⁶

Sebagai suatu kegiatan berpikir maka penalaran mempunyai ciri-ciri tertentu. Ciri yang pertama ialah adanya suatu pola berpikir yang secara luas disebut logika. Hal ini dapat dikatakan bahwa dalam tiap bentuk penalaran mempunyai logikanya tersendiri. Disimpulkan bahwa kegiatan penalaran merupakan suatu proses berpikir logis, di mana berpikir logis di sini harus diartikan sebagai kegiatan berpikir menurut suatu pola tertentu, atau dengan perkataan lain menurut logika tertentu.⁷

Ciri yang kedua dari penalaran adalah sifat analitik dari proses berpikirnya. Penalaran merupakan suatu kegiatan berpikir yang menyandarkan diri kepada suatu analisis dan kerangka berpikir yang dipergunakan untuk analisis tersebut adalah logika penalaran yang bersangkutan. Artinya penalaran ilmiah merupakan suatu kegiatan analisis yang mempergunakan logika ilmiah, dan

⁴ Kamus Besar Bahasa Indonesia/Tim Penyusun, Kamus Pusat Bahasa, ed 3- cet. 1,.....hal.772

⁵ Surajio, Ilmu Filsafat Suatu Pengantar,(Jakarta: Bumi Aksara, 2012), hal.26.

⁶ Jujun S.Suriasumantri, Filsafat Ilmu Sebuah Pengantar Populer, (Jakarta:Pustaka Sinar Harapan, 2000), hal. 42.

⁷ *Ibid.*, hal.43.

demikian juga penalaran lainnya yang mempergunakan logikanya tersendiri pula.⁸

Penalaran adalah proses berpikir yang dilakukan untuk menarik kesimpulan. Kesimpulan yang bersifat umum dapat ditarik dari kasus-kasus yang bersifat individual. Hal yang bersifat individual juga bisa ditarik menjadi kasus yang bersifat umum. Bernalar adalah melakukan percobaan di dalam pikiran dengan hasil pada setiap langkah dalam untaian percobaan itu telah diketahui oleh penalar dari pengalaman tersebut.⁹

Islam merupakan agama yang menganjurkan agar manusia menggunakan nalarnya untuk memikirkan kekuasaan Allah. Salah satunya yaitu dijelaskan dalam Al Qur'an surah An-Naml ayat 88 yang berbunyi:

وَتَرَى الْجِبَالَ تَحْسَبُهَا جَامِدَةً وَهِيَ تَمُرُّ مَرَّ السَّحَابِ ۗ صُنْعَ اللَّهِ الَّذِي أَتَقَنَ كُلَّ شَيْءٍ ۗ إِنَّهُ خَبِيرٌ بِمَا تَفْعَلُونَ

Artinya:

*“Dan kamu lihat gunung-gunung itu, kamu sangka dia tetap di tempatnya, padahal dia berjalan sebagai jalannya awan. (Begitulah) perbuatan Allah yang membuat dengan kokoh tiap-tiap sesuatu; Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan”.*¹⁰ Surat An-Naml ayat 88

⁸ *Ibid.*, hal.43.

⁹ <http://herdy07.wordpress.com/2010/05/27/kemampuan-penalaran-matematis/>, diakses ‘tanggal 28 Desember 2018 pukul 08.01 WIB.

¹⁰ Muhammad Taufiq, Quran in Word, moh.taufiq@gmail.com diadopsi tanggal 28 Desember 2018 pukul 22.00 WIB.

memerintahkan manusia untuk berpikir berdasarkan nalarnya untuk melogika ciptaan Allah agar manusia bisa mengembangkan pikirannya.

Berdasarkan pada beberapa definisi penalaran maka peneliti menetapkan definisi penalaran sebagai proses berpikir dalam menarik suatu kesimpulan secara logis berdasarkan pada pernyataan yang ada. Penarikan kesimpulan secara logis maksudnya proses penarikan kesimpulannya berdasarkan logika tertentu dan berpikirnya tidak ngawur berdasarkan perasaan ataupun pengalaman.

3. Kemampuan Penalaran

Salah satu tujuan mata pelajaran matematika adalah agar siswa mampu melakukan penalaran. Penalaran adalah suatu proses berpikir untuk menarik kesimpulan secara logis berdasarkan pada pernyataan yang ada. Agar pengetahuan yang dihasilkan dalam bernalar mempunyai dasar kebenaran, maka proses berpikirnya harus dilakukan dengan cara tertentu sehingga penarikan kesimpulan tersebut dianggap sah (valid). Kemampuan berasal dari kata mampu yang berarti kuasa, sanggup, sehingga dapat dikatakan bahwa kemampuan penalaran adalah kesanggupan siswa untuk berpikir logis menurut kerangka berpikir tertentu.

Ada dua cara untuk menarik kesimpulan, yaitu cara induktif dan cara deduktif, selanjutnya dikenal istilah penalaran induktif dan penalaran deduktif.¹¹

¹¹<https://atik144.wordpress.com/2013/10/12/standar-proses-pembelajaran-matematika/>, diakses tanggal 30 Desember 2018 pukul 07.32 WIB.

- a. Penalaran induktif merupakan proses penarikan kesimpulan dari pernyataan khusus ke pernyataan umum. Contoh: Himpunan S adalah himpunan yang anggotanya 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Sebutkan himpunan semesta yang mungkin dari himpunan S !
- b. Penalaran deduktif merupakan proses penarikan kesimpulan dari pernyataan umum ke pernyataan khusus. Proses pembuktian secara deduktif akan melibatkan teori atau rumus matematika yang sudah dibuktikan kebenarannya secara deduktif juga. Siswa sering mengalami kesulitan dalam memahami makna matematika dalam pembelajaran dengan pendekatan deduktif. Hal ini disebabkan siswa baru memahami konsep atau generalisasi setelah disajikan berbagai contoh dalam penyelesaian masalah. Contoh: Himpunan semestanya adalah kelompok hewan berkaki empat. Sebutkan himpunan bagian apa saja yang mungkin dari himpunan semesta tersebut!

Menurut Baroody ada tiga tipe penalaran utama, yaitu:¹²

1. Penalaran Intuitif

Memerlukan suatu pengetahuan atau memainkan suatu dugaan. Penalaran intuitif meliputi suatu konklusi pada penampilan atau apakah perasaan benar. Penalaran intuitif lebih banyak didasarkan pada perasaan dan bukan logika, sehingga penalaran intuitif tidak selalu memberikan keputusan yang benar. Misalnya, jika siswa mengalikan bilangan 3 dengan

¹² <http://proposalmatematika23/2013/09/jurnal-kemampuan-penalaran-matematis.html> 21 februari pukul 11.00 WIB.

5 maka siswa menerka hasilnya bilangan ganjil sebab 5 dan 3 bilangan ganjil.

2. Penalaran Induktif

Meliputi perasaan atau regularitas, dimulai dengan menguji contoh-contoh khusus dan berperan untuk menggambarkan suatu konklusi umum. Penalaran induktif merupakan pengambilan keputusan berdasarkan beberapa contoh atau kasus spesifik, sehingga hasilnya atau keputusan yang ditarik secara induktif tidak berlaku umum. Misalnya, ketika siswa mengalikan bilangan 3 dengan 5, 7 dan 9, 7 dengan 3, hasil kalinya adalah bilangan ganjil. Oleh karena itu, perkalian dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil.

3. Penalaran deduktif

Penalaran deduktif dimulai dengan premis yang mutlak untuk suatu konklusi tentang contoh kasus. Penalaran deduktif meliputi: menggambarkan suatu konklusi yang perlu diikuti dari apa yang diberikan. Penalaran deduktif diawali oleh premis dan bergerak dari aturan umum ke kasus khusus. Misalnya, perkalian dua bilangan ganjil selalu menghasilkan bilangan ganjil. 5 dan 3 adalah bilangan ganjil, maka perkalian 5 dengan 3 adalah bilangan ganjil.

Menurut Sumarmo, kegiatan yang tergolong pada penalaran induktif di antaranya adalah:¹³

- 1) Transduktif: menarik kesimpulan dari satu kasus atau sifat khusus yang satu diterapkan pada yang kasus khusus lainnya.
 - 2) Analogi: penarikan kesimpulan berdasarkan keserupaan data atau proses.
 - 3) Generalisasi: penarikan kesimpulan umum berdasarkan sejumlah data yang teramati.
1. Memperkirakan jawaban, solusi atau kecenderungan: interpolasi dan ekstrapolasi memberi penjelasan terhadap model, fakta, sifat, hubungan, atau pola yang ada.
 2. Menggunakan pola hubungan untuk menganalisis situasi, dan menyusun konjektur.

beberapa kegiatan yang tergolong pada penalaran deduktif di antaranya adalah:¹⁴

1. Melaksanakan perhitungan berdasarkan aturan atau rumus tertentu.
2. Menarik kesimpulan logis berdasarkan aturan inferensi, memeriksa validitas argumen, membuktikan, dan menyusun argumen yang valid.
3. Menyusun pembuktian langsung, pembuktian tak langsung dan pembuktian dengan induksi matematika.

Menurut Baroody terdapat beberapa keuntungan apabila siswa diperkenalkan dengan penalaran, yaitu:

¹³<http://proposalmatematika23.com/2013/02/kemampuan-penalaran.html> diakses tanggal 02 Januari 2019 pukul 16.20 WIB

¹⁴ *Ibid*

1. Siswa diberi kesempatan untuk menggunakan keterampilan bernalarnya dalam melakukan pendugaan-pendugaan berdasarkan pengalaman sendiri sehingga siswa akan lebih mudah memahaminya.
2. Siswa dituntut untuk menggunakan kemampuan bernalarnya sehingga mendorong mereka untuk melakukan guessing atau dugaan-dugaan. Hal ini akan menimbulkan rasa percaya diri dan menghilangkan rasa takut salah ketika siswa diminta menjawab pertanyaan yang diajukan guru.
3. Membantu siswa untuk memahami nilai balikan yang negatif dalam memutuskan suatu jawaban, artinya bahwa siswa perlu memahami tebakan yang salah, dapat menghilangkan kemungkinan yang pasti dengan berbagai pertimbangan lebih jauh, dan dapat melihat informasi yang sangat bernilai. Siswa juga perlu menghargai bahwa keefektifan dari suatu tebakan tergantung pada banyaknya kemungkinan yang dihilangkan.
4. Secara khusus, dalam matematika siswa harus memahami bahwa penalaran intuisi, penalaran induktif (dugaan), dan penalaran deduktif (pembuktian logis) memainkan peranan penting. Intuisi merupakan dasar untuk kemampuan tingkat tinggi dalam matematika dan ilmu pengetahuan lainnya. Siswa juga harus dibantu untuk dapat memahami bahwa intuisi diperlukan secara substantif dalam membuat contoh, mengumpulkan data, dan dalam menggunakan logika deduktif. Siswa perlu memahami penemuan pola dari berbagai contoh yang luas, selalu terdapat suatu pengecualian sehingga dapat dijustifikasi suatu pola dan pada akhirnya dapat dibuktikan secara deduktif.

Indikator penalaran yang diukur pada penelitian ini yaitu penalaran intuitif, penalaran induktif, dan penalaran deduktif.

Peraturan Diljen Dikdasmen Depdiknas Nomor 506/C/PP/2004 tanggal 11 Nopember 2004 menyatakan indikator-indikator penalaran yang harus dicapai oleh siswa. Indikator yang menunjukkan penalaran antara lain:¹⁵

1. Menyajikan pernyataan matematika secara lisan, tertulis, gambar, diagram;
2. Mengajukan dugaan.
3. Melakukan manipulasi matematika, menarik kesimpulan, menyusun bukti
4. Membenarkan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi;
5. Menarik kesimpulan dari pernyataan.
6. Memeriksa kesahihan suatu argumen, menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.

Penalaran matematika menurut peneliti dalam penelitian ini dapat dicapai dengan memperhatikan indikator sebagai berikut:

1. Menyajikan pernyataan matematika secara tertulis.
2. Mengajukan dugaan.
3. Melakukan manipulasi matematika, menarik kesimpulan.
4. Memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi.
5. Menarik kesimpulan dari pernyataan.

¹⁵ Sri Wardhani, *Analisis SI dan SKL Mata Pelajaran Matematika SMP/MTs untuk Optimalisasi Tujuan Mata Pelajaran Matematika*, (Yogyakarta: Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidikan dan Tenaga Kependidikan Matematika, 2008), hal.14.

6. Memeriksa kesahihan suatu argumen, menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.

Berdasarkan pendapat peneliti, indikator-indikator penalaran tersebut sangat diperlukan dalam mempelajari materi Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV). Misalnya dalam menyelesaikan masalah matematika, siswa dapat memulai menyelesaikannya dengan menyajikan pernyataan matematika secara tertulis kemudian melakukan manipulasi dan untuk memperoleh penyelesaian. menarik kesimpulan, memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran solusi. menarik kesimpulan dari pernyataan, dan akhirnya memeriksa kesahihan suatu argumen sehingga menemukan pola mu sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.

4. Teori Penalaran Kognitif Jean Piaget

Jean Piaget lahir pada tanggal 9 Agustus 1896 di Neuchatel, Swiss. Piaget mengembangkan teori perkembangan kognitif yang cukup dominan selama beberapa dekade. Dalam teorinya Piaget membahas pandangannya tentang bagaimana anak belajar. Ini merupakan suatu pandangan konstruktivisme. Pada Pandangan konstruktivisme, pengetahuan tumbuh dan berkembang melalui pengalaman. Pemahaman berkembang semakin dalam dan semakin kuat apabila selalu diuji dengan pengalaman baru.¹⁶

¹⁶ Sardiman. *Interaksi & Motivasi Belajar Mengajar*. (Jakarta: PT Raja Grafindo Persada. 2004). hal. 101.

Beberapa konsep dari teori piaget yaitu:¹⁷

a. Inteligensia

Inteligensia adalah kemampuan untuk memecahkan persoalan-persoalan atau menghasilkan produk. Piaget sendiri mengartikan inteligensia secara lebih luas dan tidak mendefinisikannya secara ketat. Secara progresif, dapat dikatakan bahwa membentuk keadaan ekuilibrium, ke arah mana semua sensorimotor dan kognitif dan juga interaksi-interaksi asimilasi dan akomodasi antara organisasi dan lingkungan mengacu.

b. Organisasi

Organisasi menunjuk pada tendensi semua spesies untuk mengadakan sistematisasi dan mengorganisasi proses-proses mereka dalam suatu sistem koheren, baik secara fisis maupun psikologis. Secara fisis semua struktur berinteraksi dan dikoordinasikan dalam suatu sistem yang efisien. Misalnya, seekor ikan mempunyai sejumlah struktur yang memungkinkan ia berfungsi dalam air. Dan dalam level psikologis, tendensi untuk berorganisasi ini juga ada. Dalam berinteraksi dengan dunia, seseorang cenderung untuk mengintegrasikan struktur psikologisnya dalam suatu sistem yang koheren. Misalnya, bayi yang masih sangat muda mempunyai kemampuan untuk melihat benda atau menjamahnya.

c. Skema

Skema adalah suatu struktur mental seseorang di mana ia secara intelektual beradaptasi dengan lingkungan sekitarnya. Skema itu akan

¹⁷ Paul Suparno. *Teori Perkembangan Kognitif Jean Piaget*. (Jakarta: Kanisius. 2001). hal. 34.

beradaptasi dan berubah selama perkembangan kognitif seseorang. Skema bukanlah benda yang nyata yang dapat dilihat, melainkan suatu rangkaian proses dalam sistem kesadaran seseorang. Oleh karena itu, skema tidak mempunyai bentuk fisis dan tidak dapat dilihat. Misalnya, gambaran anak tentang ayam. Pada awalnya, gambaran anak itu sangat sederhana karena didasarkan pada cerita orang tuanya atau pengalaman pertama kali melihat ayam. Semakin ia mempunyai banyak pengalaman dengan bermacam-macam ayam, gambaran atau skemanya tentang ayam semakin berkembang dan lengkap.

d. Asimilasi

Asimilasi adalah proses kognitif di mana seseorang mengintegrasikan persepsi, konsep, atau pengalaman baru ke dalam skema atau pola yang sudah ada dalam pikirannya. Misalnya, seorang anak mempunyai konsep mengenai “lembu”. Dalam pikiran anak itu, ada skema “lembu”. Mungkin skema anak itu menyatakan bahwa lembu itu binatang yang berkaki empat, berwarna putih, dan makan rumput. Dan saat anak itu menemukan sesuatu yang lain tentang lembu maka skema “lembu” anak itu akan menjadi bertambah lengkap.

e. Akomodasi

Akomodasi terjadi ketika dalam menghadapi rangsangan atau pengalaman yang baru, seseorang tidak dapat mengasimilasikan pengalaman yang baru itu dengan skema yang telah dia miliki. Hal ini terjadi karena pengalaman yang baru itu sama sekali tidak cocok dengan skema yang telah ada. Dalam

keadaan seperti ini, orang tersebut akan mengadakan akomodasi. Ia dapat membuat dua hal: (1) membentuk skema baru yang dapat cocok dengan rangsangan yang baru, atau (2) memodifikasi skema yang ada sehingga cocok dengan rangsangan itu.

f. Ekuilibrasi

Proses ekuilibrasi adalah kesetimbangan antara asimilasi dan akomodasi. Ekuilibrasi membuat seseorang dapat menyatukan pengalaman luar dengan struktur dalamnya (skema). Bila terjadi ketidaksetimbangan, seseorang dipacu untuk mencari kesetimbangan yang baru dengan asimilasi atau akomodasi.

g. Adaptasi

Semua organisme dilahirkan dengan suatu kecenderungan untuk beradaptasi dengan lingkungan. Adaptasi terjadi dalam proses: asimilasi dan akomodasi.

h. Pengetahuan Figuratif dan Operatif

Piaget membedakan antara pengetahuan figurative dan pengetahuan operatif. Pengetahuan figuratif didapatkan dari gambaran langsung seseorang terhadap objek yang dipelajari. Misalnya, pengetahuan akan nama-nama barang dan nama-nama kota. Pengetahuan operatif didapatkan karena orang itu mengadakan operasi terhadap objek yang dipelajari. Misalnya, pengetahuan anak akan kaitan nama kota dengan situasi manusianya dan dengan kota-kota lain.

Bagi Piaget, semua pengetahuan adalah suatu konstruksi (bentukan) kegiatan/tindakan seseorang.¹⁸ Pengetahuan ilmiah itu berevolusi, berubah dari waktu ke waktu. Pemikiran ilmiah bersifat sementara, tidak statis, dan merupakan proses konstruksi dan reorganisasi yang terus-menerus.¹⁹ Pengetahuan bukanlah sesuatu yang ada diluar, melainkan ada di dalam diri seseorang yang membentuknya. Tanpa interaksi dengan pengalaman, seorang anak tidak dapat mengkonstruksi gambaran korespondensi satu-satu dalam matematika untuk memahami pengertian akan bilangan.

Piaget membedakan tiga macam pengetahuan:²⁰

1. Pengetahuan Fisis

Pengetahuan fisis adalah pengetahuan akan sifat-sifat fisis suatu objek atau kejadian, seperti bentuk, besar, kekasaran, berat, serta bagaimana objek-objek itu berinteraksi satu dengan yang lainnya.

2. Pengetahuan Matematis-Logis

Pengetahuan matematis-logis adalah pengetahuan yang dibentuk dengan berfikir tentang pengalaman akan suatu objek atau kejadian tertentu. Pengetahuan ini di dapatkan dari abstraksi berdasarkan koordinasi, relasi, atau penggunaan objek. Pengetahuan matematis-logis hanya berkembang apabila anak bertindak terhadap objek itu. Akan tetapi peran tindakan dan objek itu berbeda. Anak itu membentuk pengetahuan sistematis-logis

¹⁸ Paul Suparno. *Teori Perkembangan Kognitif Jean Piaget*, hal. 119.

¹⁹ *Ibid.*..., hal. 119

²⁰ *Ibid.*...,120

karena pengetahuan itu tidak ada dalam objek itu sendiri seperti pengetahuan fisis. Pengetahuan itu harus dibentuk dari perbuatan berfikir anak terhadap objek itu.

3. Pengetahuan Sosial

Pengetahuan sosial adalah pengetahuan yang didapat dari kelompok budaya dan sosial yang menyetujui sesuatu secara bersama-sama. Contohnya adalah aturan, hokum, moral, nilai, sistem bahasa dan lain-lain. Pengetahuan ini muncul dalam kebudayaan tertentu dan dapat berbeda dari kelompok yang satu dengan yang lain. Pengetahuan sosial tidak dapat dibentuk dari suatu tindakan seseorang terhadap suatu objek, tetapi dibentuk dari interaksi seseorang dengan orang-orang lain.

Piaget menjelaskan Setiap tahap perkembangan meneruskan tahap yang sebelumnya, membentuk' tahap yang baru, dan mengembangkan tahap itu ketingkat yang lebih tinggi lagi.²¹ Secara garis besar, tahap- tahap perkembangan itu dapat dituliskan dengan ciri-cirinya yang khusus dalam sebuah skema pada tabel 2.1²²

Tabel 2.1 Tabel Perkembangan Kognitif Piaget

Tahap	Sensori-motor	Pra-Oprasi	Operasi-Kongkrit	Operasi Formal
Umur	0-2 tahun	2-7 tahun	7-11 tahun	11 tahun keatas

²¹ Ibid...,120

²² Ibid....., hal. 103.

Dasar Pemikiran	Tindakan dan meniru	Simbolis/bahasa dan intuitif, imaginal	Transformasi reversible dan kekekalan, masih kongkret	Deduktif, hipotesis dan induktif, abstrak
Saat Pemikiran	Sekarang	Muali yang “tidak sekarang”	Masih terbatas	Menunggalkan yang sekarang dan memulai yang mendatang
Ciri-ciri Lain	Reflex, kebiasaan, pembedaan saran dan hasil	Egosentris	Decentering, seriasi, klasifikasi, konsep bilangan, waktu, probabilitas, kausalitas	Kombinasi, proporsi, refrensi ganda, dua reversible, fleksibel

Operasi formal mulai pada umur 11 atau 12 tahun keatas, yakni pada usia remaja.

Menurut piaget skema-skema oprasi formal meliputi:²³

1. Proporsi, proporsi adalah pemikiran untuk membandingkan dua hal atau membagikan antara dua hal.
2. Sistem referensi ganda, adalah kemampuan untuk menyatukan atau menggabungkan persoalan atau masalah.
3. Keseimbangan hidrostatis, kemampuan berfikir dalam pemecahan masalah persoalan keseimbangan dan mengetahui mengapa terjadi ketetimbangan.
4. Pengertian probabilitas, untuk mengetahui proses probabilitas, seorang anak harus tau dua operasi pokok, yaitu sistem kombinasi dan perhitungan proporsi. Anak harus dapat menggunakan sistem kombinasi yang memungkinkan melihat segala kemungkinan dari unsur-unsur yang ada.

²³ *Ibid*....., hal. 96.

Dia juga harus dapat menghitung proporsi sehingga dapat menangkap dan menghitung suatu probabilitas $2/3 = 4/6$.

5. Dua reversibilitas, adalah kemampuan membentuk suatu sistem kombinasi dan struktur fundamental yang menunjukkan suatu sintesis lengkap.

5. Teori Piaget dalam pembelajaran Matematika

Secara agak khusus, Piaget banyak berbicara tentang ajaran matematika. Piaget menyarankan agar dalam pengajaran matematika untuk murid, terlebih sebelum tahap operasi formal, lebih ditekankan pada aktivitas, pengalaman, dan penggunaan metode aktif.²⁴ Menurut Piaget, metode pengajaran matematika atau yang lain dalam bentuk ceramah memang baik bagi orang yang sudah dewasa, tetapi banyak menyebabkan hambatan bagi murid yang masih dalam level pengajaran.²⁵

Piaget menekankan beberapa hal pokok dalam mengajarkan matematika pada murid.²⁶

1. Pengajaran matematika tidak boleh melalaikan peran kegiatan-kegiatan, khususnya pada anak-anak yang masih kecil. Pada masa itu, kegiatan terhadap objek sangat penting dalam pengembangan dan pemikiran aritmatika dan relasi geometri. Pengalaman fisis dan pengalaman matematis-logis sangat penting dalam mengembangkan pengetahuan, baik fisis maupun matematis.
2. Beberapa prinsip psikologis yang dapat digunakan dalam pengajaran matematika.

²⁴ Paul Suparno. *Teori Perkembangan Kognitif Jean Piaget*, hal. 149.

²⁵ *Ibid*....., hal. 149.

²⁶ *Ibid*.....,hal.149.

- 1) Pemahaman yang sungguh-sungguh akan suatu pengertian atau suatu teori menuntut suatu penemuan kembali teori itu. Menurut piaget, pengertian yang tepat adalah pengertian yang menuntut seorang murid, paling tidak, dapat menemukan sendiri alasannya.
- 2) Dapat terjadi bahwa meskipun murid dapat memecahkan persoalan, ia tetap belum memahami persoalan itu. Murid belum mengerti segala unsur yang tersangkut meskipun ia dapat menggunakan rumus itu. Oleh karena itu, murid memerlukan latihan dalam mengungkapkan gagasan.
- 3) Formalisasi sebaiknya setelah pengertian dikenal. Lebih baik menggunakan intuisi lebih dulu daripada aksiomatisasi. Pengajaran mulai dari yang kualitatif baru numerik dan metrik.

6. Materi Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel (SPLTV)

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai hal hal yang berkaitan dengan penggunaan sistem persamaan linear tiga variabel. Sebagai contoh, Dina membeli 2 buku tulis, 2 bolpoin dan 1 pensil, Rani membeli 1 buku tulis, 1 bolpoin dan 2 pensil sedangkan Ani membeli 2 buku tulis, 1 bolpoin dan 1 pensil. Jika Dina harus membayar Rp. 8.000,00, Rani Rp. 5.500,00, dan Ani Rp. 6.000,00 berapa harga 1 buku tulis, 1 bolpoin dan harga 1 pensil?

1. Pengertian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel Sistem persamaan linear tiga variabel adalah kumpulan persamaan linear yang mempunyai solusi yang semua persamaannya terdiri dari tiga variabel.²⁷

²⁷ Anggota IKPI, *Modul Pintar Eksis Matematika*, (Bandung: Citra Pustaka, 2013). hal.37.

2. Bentuk umum sistem persamaan linear tiga variabel Bentuk umum dari sistem persamaan linear tiga variabel seperti berikut:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Dengan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, dan d_3 \in \mathbb{R}$

dan $a_1, b_1, c_1 \neq 0; a_2, b_2, c_2 \neq 0; a_3, b_3, c_3 \neq 0$

3. Penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel ini, ada beberapa cara yaitu dengan menggunakan.²⁸

a. Metode substitusi

Langkah-langkah dalam penyelesaian SPLTV dengan menggunakan metode substitusi sebagai berikut.²⁹

- 1) Pilih salah satu persamaan yang sederhana, kemudian nyatakan x sebagai fungsi dari y dan z, atau y fungsi dari x dan z, atau z sebagai fungsi dari x dan y.
- 2) Substitusikan nilai x atau y atau z yang diperoleh pada langkah (1) kedalam dua persamaan yang lain, sehingga diperoleh sistem persamaaan linear tiga variabel
- 3) Selesaikan sistem persamaan linear tiga variabel

²⁸Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia, *Matematika*, (Jakarta:Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, 2014). hal. 110

²⁹ Anggota IKPI, *Modul Pintar Eksis Matematika...*, hal.37

- a. Substitusikan hasil dari sistem persamaan linear tiga variabel kedalam bentuk dari langkah (1), sehingga penyelesaian ketiga variabel telah diperoleh.
- b. Metode eliminasi
- c. Metode gabungan (Metode substitusi dan Metode eliminasi)

Langkah-langkah dalam penyelesaian SPLTV dengan menggunakan metode gabungan sebagai berikut:³⁰

- 1) Eliminasi salah satu peubah x atau y atau z sehingga diperoleh dua persamaan dengan dua variabel atau SPLDV
- 2) Selesaikan SPLDV dari langkah (1)
- 3) Substitusi hasil dari SPLDV langkah ke (2) ke dalam persamaan yang lain, sehingga penyelesaian ketiga variabel dapat diperoleh

- d. Metode cramer/determinan

Metode cramer merupakan suatu metode yang digunakan untuk menentukan himpunan penyelesaian suatu sistem persamaan linear tiga variabel.

- Mencaari nilai x

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

³⁰ *Ibid.*, hal.37

- Mencari nilai y

$$y = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}}$$

- Mencari nilai z

$$x = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}}$$

- b. Membuat model matematika dari soal cerita

Misal diberikan permasalahan seperti berikut!

Ibu membeli 5 kg buah jeruk dan 1 kg buah naga seharga Rp. 50.000 . Ayah membeli 2 kg buah jeruk dan 3 kg buah apel seharga Rp. 78.000. Sedangkan nenek membeli 5 kg buah jeruk, 3 kg buah naga dan 2 kg buah apel seharga Rp. 110.000. Buatlah model matematikanya!

Penyelesaian:

Misal: buah jeruk = x , Buah naga = y , Buah apel = z

Model matematikanya:

- $5x + y = 50.000$
- $2x + 3z = 78.000$
- $5x + 3y + 2z = 110.000$

B. Penelitian Terdahulu

Hasil penelitian terdahulu merupakan hasil penelitian yang sudah teruji kebenarannya, dan dalam penelitian ini dapat dipergunakan sebagai acuan atau pembanding. Hasil penelitian terdahulu yang berhubungan dengan penelitian ini adalah sebagai berikut.

Tabel. 2.2 Penelitian Terdahulu

No	ASPEK	PENELITIAN TERDAHULU	PENELITIAN SEKARANG
1	Judul	Analisis Kemampuan Penalaran Siswa dalam Menyelesaikan Soal Serupa Pisa Pada Siswa Kelas VIII	Analisis Penalaran Siswa Kelas X MAN 3 Tulungagung pada Materi Sistem Persamaan Linier Tiga Variabel (SPLTV) Berdasarkan Teori Piaget Tahun Ajaran 2018/2019
2	Fokus Penelitian	Bagaimana analisis kemampuan penalaran siswa dalam menyelesaikan soal serupa pisa pada siswa kelas VIII	<ol style="list-style-type: none"> 1. Bagaimana penalaran siswa kelas X pada Materi SPLTV pada siswa berkemampuan rendah berdasarkan teori Piaget? 2. Bagaimana penalaran siswa kelas X pada Materi SPLTV pada siswa berkemampuan sedang berdasarkan teori Piaget? 3. Bagaimana penalaran siswa kelas X pada Materi SPLTV pada siswa berkemampuan tinggi berdasarkan teori Piaget?
3	Tujuan Penelitian	Untuk mengetahui bagaimana analisis kemampuan penalaran	1. Mengetahui penalaran siswa kelas X pada

		siswa dalam menyelesaikan soal serupa pisa pada siswa kelas VIII	Materi SPLTV pada siswa berkemampuan rendah berdasarkan teori Piaget. 2. Mengetahui penalaran siswa kelas X pada Materi SPLTV pada siswa berkemampuan sedang berdasarkan teori Piaget. 3. Mengetahui penalaran siswa kelas X pada Materi SPLTV pada siswa berkemampuan tinggi berdasarkan teori Piaget.
4	Lokasi Penelitian	SMP Negeri 2 Banyudono	MAN 3 Tulungagung
5	Subjek Penelitian	Siswa kelas VIII B yang berjumlah 30 siswa.	Siswa kelas X-MIA 3 yang berjumlah 28 siswa.
6	Teknik Pengumpulan Data	Observasi, tes, wawancara, dokumentasi.	Observasi, tes, wawancara, dokumentasi.
7	Teknik Analisis Data	Data kualitatif: teknik analisis deskriptif induktif.	Data kualitatif: teknik analisis deskriptif induktif.

C. Kerangka Berpikir Teoritis (Paradigma)

Gambar 2.1 Kerangka Berpikir

