

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### A. Hakekat Matematika

##### 1. Pengertian Matematika

Secara etimologi, kata matematika berasal perkataan Latin *Mathematike* yang mulanya diambil dari perkataan Yunani *mathematike* yang berarti mempelajari. Perkataan itu mempunyai asal katanya *mathea* yang berarti pengetahuan atau ilmu (*knowledge, science*). Kata *mathematike* berhubungan pula dengan kata lainnya yang hampir sama, yaitu *mathein* atau *mathenein* yang artinya belajar atau hal yang dipelajari.<sup>19</sup> Jadi, berdasarkan asal katanya, maka perkataan matematika berarti ilmu pengetahuan yang didapat dengan berpikir (bernalar).

Matematika lebih menekankan kegiatan dalam dunia rasio (Penalaran), bukan menekankan dari hasil eksperimen atau hasil observasi matematika terbentuk karena pikiran-pikiran manusia, yang berhubungan dengan idea, proses dan penalaran.<sup>20</sup> Matematika terbentuk dari pengalaman manusia dalam dunianya secara empiris. Kemudian pengalaman itu diproses di dalam dunia rasio, diolah secara analisis dengan penalaran di dalam struktur kognitif sehingga sampai terbentuk

---

<sup>19</sup> Catur, Supratmono. *Matematika Asyik*. Hal. 6

<sup>20</sup> Ruseffendi, E.T. (1988). *Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika Untuk Meningkatkan CBSA*. Hal 148

konsep-konsep matematika supaya konsep-konsep matematika yang terbentuk itu mudah dipahami oleh orang lain dan dapat dimanipulasi secara tepat, maka digunakan bahasa matematika atau notasi matematika yang bernilai global (*universal*). Konsep matematika didapat karena proses berpikir, karena itu logika adalah dasar terbentuknya matematika. Pada awalnya cabang matematika yang ditemukan adalah Aritmatika atau berhitung, Aljabar, Geometri. Setelah itu ditemukan Kalkulus, Statistika, Topologi, Aljabar Abstrak, Aljabar Linear, Himpunan, Geometri Linear, Analisis Vektor, dan lain-lain.

Sampai saat ini belum ada kesepakatan yang bulat di antara para ahli matematika mengenai definisi matematika.<sup>21</sup> Bahkan beberapa pendapat mengenai pengertian matematika merupakan hasil dari pengetahuan dan pengalaman yang berbeda dari masing-masing matematikawan.<sup>22</sup> Hal ini disebabkan oleh ilmu matematika itu sendiri, di mana matematika merupakan disiplin ilmu yang memiliki kajian sangat luas, sehingga penjelasan mengenai apa dan bagaimana tentang matematika akan terus mengalami perkembangan seiring dengan pengetahuan dan kebutuhan manusia serta laju perubahan zaman.

Beberapa pengertian matematika baik secara umum maupun secara khusus. Hudojo menyatakan bahwa: “matematika merupakan ide-ide abstrak yang diberi simbol-simbol itu tersusun secara hirarkis dan

---

<sup>21</sup>Herman Hudojo, *Strategi Mengajar Belajar Matematika*, (Malang: IKIP Malang, 1990) , hal. 2

<sup>22</sup>Erman Suherman, et. all., *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*, (Bandung: JICA, 2003), hal 15.

penalarannya dedukti, sehingga belajar matematika itu merupakan kegiatan mental yang tinggi.” Sedangkan James dalam kamus matematikanya menyatakan bahwa “Matematika adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran dan konsep-konsep berhubungan lainnya dengan jumlah yang banyak yang terbagi ke dalam tiga bidang, yaitu aljabar, analisis dan geometri. Menurut Wittgenstein, Matematika adalah suatu cara untuk menemukan jawaban terhadap masalah yang dihadapi manusia; suatu cara menggunakan informasi, menggunakan pengetahuan tentang bentuk dan ukuran, menggunakan pengetahuan tentang menghitung, dan yang paling penting adalah memikirkan dalam diri manusia itu sendiri dalam melihat dan menggunakan hubungan-hubungan.”<sup>23</sup>

Menurut istilah, matematika adalah ilmu pengetahuan yang diperoleh melalui proses bernalar.<sup>24</sup> Namun, bukan berarti ilmu-ilmu lain diperoleh dengan tidak melalui suatu proses penalaran, akan tetapi dalam ilmu matematika lebih menekankan aktivitas dalam dunia *rasio* (penalaran), sedangkan dalam ilmu lainya lebih menekankan hasil observasi atau eksperimen disamping penalaran itu sendiri. Matematika terbentuk dari suatu hasil pemikiran manusia yang mendalam yang berhubungan dengan ide, proses dan penalaran. Pada tahap awal, matematika terbentuk dari pengalaman manusia dalam dunianya secara

---

<sup>23</sup> Hasratuddin. “Pembelajaran Matematika Sekarang dan yang akan Datang Berbasis Karakter” Dalam Jurnal Didaktik Matematika: Vol. 1, No. 2, September 2014. Hal.30

<sup>24</sup>A.H. Fathani, *Matematika: Hakikat & Logika*, (Yogyakarta: Ar-Ruzz Media, 2009), hal.17

empiris, karena matematika berdasarkan dari aktivitas manusia itu sendiri. Kemudian pengalaman itu diproses dalam rasio, dan diolah secara analisis serta sintesis dengan penalaran di dalam struktur kognitif, sehingga sampailah pada suatu kesimpulan-kesimpulan berupa konsep-konsep matematika.<sup>25</sup>

Konsep matematika didapat melalui suatu proses berpikir secara mendalam, sehingga keterampilan berpikir mendalam (berpikir kritis) perlu dikembangkan dalam pembelajaran matematika. Hal ini sesuai dengan tujuan pendidikan matematika sekolah yang memberikan penekanan pada penataan cara bernalar anak serta pembentukan pribadi anak. Karena itu dalam proses belajar matematika, dipengaruhi oleh kemampuan berpikir itu sendiri. Di mana materi matematika dan keterampilan berpikir kritis merupakan dua hal yang tidak dapat dipisahkan karena materi matematika dapat dipahami melalui berpikir kritis dan berpikir kritis dapat dilatih melalui belajar matematika.<sup>26</sup> Dengan demikian terlihat jelas adanya hubungan antara proses pembelajaran matematika dengan berpikir kritis.

Kemudian perlu diketahui bahwasanya ilmu matematika berbeda dengan disiplin ilmu lainnya. Matematika memiliki suatu bahasa tersendiri dari pada ilmu lainnya, yaitu bahasa yang terdiri dari simbol-simbol dan angka.<sup>27</sup> Bahasa yang dimaksud adalah bahasa *universal* (yang merupakan

---

<sup>25</sup>Erman Suherman, et. all., *Strategi Pembelajaran Matematika* ....., hal. 16

<sup>26</sup>*Ibid*, hal. 16

<sup>27</sup>Moch Masykur dan A.H. Fathani, *Mathematical Intelligence*....., hal. 44

keepakatan bersama).<sup>28</sup> Sehingga agar konsep-konsep matematika yang telah terbentuk dan disepakati dapat dipahami oleh orang lain dan dapat dengan mudah dimanipulasi secara tepat, maka digunakan *bahasa matematika*.

## 2. Bahasa Matematika

Bahasa merupakan suatu sistem yang terdiri dari lambang kata-kata dan kalimat-kalimat yang disusun sesuai dengan suatu aturan tertentu dan digunakan oleh sekelompok orang untuk berkomunikasi. Bahasa dapat tumbuh dan berkembang dikarenakan penggunaan oleh manusia itu sendiri. Begitu pula sebaliknya, manusia dapat berkembang karena suatu bahasa. Hubungan manusia dan bahasa merupakan dua hal yang tidak dapat dipisahkan. Seperti petuah dari Mudjia Rahardjo, “Dimana ada manusia, disitu pasti ada bahasa”.<sup>29</sup>

Dilihat dari segi fungsinya, bahasa memiliki dua fungsi. *Pertama*, sebagai alat menyatakan ide, pikiran dan gagasan/perasaan. *Kedua*, sebagai alat yang digunakan untuk berkomunikasi dengan orang lain.<sup>30</sup> Apabila dalam berkomunikasi maka itu tidak mungkin alias mustahil dilakukan tanpa menggunakan suatu bahasa. Karena komunikasi pada hakikatnya merupakan proses penyampaian pesan dari pengirim kepada penerima. Sebagai bahasa, matematika memiliki kelebihan tersendiri jika dibandingkan dengan bahasa-bahasa lainnya. *Pertama*, bahasa matematika

---

<sup>28</sup> Herman Hudojo, *Strategi Mengajar Belajar Matematika*, (Malang: IKIP Malang, 1990), hal. 62

<sup>29</sup> Moch Masykur dan A.H. Fathani, *Mathematical Intelligence.....*, hal. 45

<sup>30</sup> *Ibid.*, hal. 45

memiliki makna *tunggal*, sehingga satu kalimat matematika tidak dapat ditafsirkan bermacam-macam.<sup>31</sup>

Matematika adalah sebuah bahasa. Matematika merupakan cara berpikir dan alat berpikir.<sup>32</sup> Bahasa matematika berusaha dan berhasil menghindari kerancuan arti, karena setiap kalimat (istilah atau variabel) dalam matematika sudah memiliki suatu arti atau definisi tertentu. Ketunggalan arti ini mungkin karena adanya kesepakatan antara matematikawan atau telah ditentukan sendiri oleh penulis di awal tulisannya. Dalam hal ini, orang dibebaskan untuk menggunakan istilah/variabel matematika yang memiliki arti berlainan. Namun dia harus menjelaskan terlebih dahulu di awal pembicaraan atau tulisannya bagaimana tafsiran yang diinginkan tentang istilah matematika yang digunakannya. *Kedua*, bahasa matematika juga mengembangkan bahasa numerik (menggunakan simbol-simbol angka) yang memungkinkan untuk melakukan pengukuran secara kuantitatif.<sup>33</sup> Sedangkan bahasa verbal hanya mampu mengemukakan pernyataan yang sifatnya kualitatif. Jika kita menggunakan bahasa verbal, kita hanya dapat mengatakan bahwa A lebih cantik dari B dan kita tidak dapat berbuat apa-apa bila ingin mengetahui seberapa eksak derajat kecantikan si A. Namun, dengan bahasa matematika kita dapat mengetahui berapa derajat kecantikan seseorang secara eksak, salah satunya dengan menggunakan pendekatan logika *fuzzy*.

---

<sup>31</sup> *Ibid.*, hal. 47

<sup>32</sup> Catur, Supratmono. *Matematika Asyik*. Hal. 7

<sup>33</sup> Moch Masykur dan A.H. Fathani, *Mathematical Intelligence.....*, hal. 45

Fungsi lainnya bagi dunia keilmuan, matematika memiliki peran sebagai suatu bahasa simbolik yang memungkinkan terwujudnya komunikasi yang cermat dan tepat.<sup>34</sup> Matematika dalam komunikasi ilmiah memiliki peran ganda, yaitu sebagai ratu sekaligus pelayan ilmu (*abdi*). Sebagai ratu karena matematika merupakan bentuk tertinggi dari logika, sedangkan di sisi lain matematika sebagai pelayan karena matematika memberikan bukan saja sistem organisasi ilmu yang bersifat logis, tetapi juga pernyataan-pernyataan dalam bentuk model matematika. Matematika bukan saja menyampaikan informasi secara jelas dan tepat, tetapi juga singkat. Suatu rumus matematika jika ditulis dalam bahasa verbal membutuhkan rentetan kalimat yang banyak sekali, dimana makin banyak kata-kata makin besar juga peluang untuk terjadi salah informasi dan salah interpretasi, maka dalam bahasa matematika semua itu cukup ditulis dengan model yang sangat sederhana sekali. Dengan kata lain, salah satu ciri bahasa matematika adalah bersifat ekonomis.

### **3. Karakteristik Matematika**

Setelah membaca dan memahami uraian tentang definisi matematika di atas, seolah-olah tampak bahwa matematika merupakan pribadi yang mempunyai beragam corak penafsiran dan pandangan. Namun, dibalik keragaman itu semua, dalam setiap pandangan matematika terdapat beberapa ciri atau karakteristik matematika yang secara umum disepakati bersama, yaitu sebagai berikut.

---

<sup>34</sup>*Ibid.*, hal. 49

### a. Memiliki Objek Kajian Abstrak

Matematika mempunyai objek kajian yang bersifat abstrak, walaupun tidak setiap yang abstrak adalah matematika karena beberapa matematikawan menganggap bahwa objek matematika itu *konkret* dalam pikiran mereka. Ada empat objek kajian matematika, yaitu fakta, operasi atau relasi, konsep dan prinsip.<sup>35</sup>

### b. Bertumpu pada Kesepakatan

Simbol-simbol dan istilah-istilah dalam matematika merupakan kesepakatan atau konvensi yang penting. Dengan simbol dan istilah yang telah disepakati dalam matematika maka pembahasan selanjutnya akan menjadi mudah dilakukan dan dikomunikasikan. Kesepakatan yang amat mendasar adalah aksioma (postulat, pernyataan pangkal yang tidak perlu pembuktian) dan konsep primitif (pengertian pangkal yang tidak perlu didefinisikan, *undefined term*).<sup>36</sup> Aksioma diperlukan untuk menghindari proses berputar-putar dalam pembuktian (*circulus in probando*). Sedangkan konsep primitif diperlukan untuk menghindari proses berputar-putar dalam pendefinisian (*circulus in defienindo*).<sup>37</sup> Beberapa aksioma dapat membentuk suatu sistem aksioma, yang selanjutnya dapat menurunkan berbagai teorema. Dalam aksioma tentu terdapat konsep

---

<sup>35</sup> A.H. Fathani, *Matematika Hakikat* ....., hal. 59

<sup>36</sup> R Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia*, (Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional, 2000), hal. 16

<sup>37</sup> A.H. Fathani, *Matematika*....., hal. 67



primitif tertentu. Dari satu atau lebih konsep primitif dapat dibentuk konsep baru melalui pendefinisian.<sup>38</sup>

### c. **Berpola Pikir Deduktif**

Matematika itu pengetahuan struktur yang terorganisasikan, aksioma-aksioma, sifatsifat, seni atau matematika itu dapat disebut juga ilmu deduktif.<sup>39</sup> Ini berarti proses pengerjaan matematika harus bersifat deduktif. Matematika tidak menerima generalisasi berdasarkan pengamatan (induktif), tetapi harus berdasarkan pembuktian deduktif. Pola pikir deduktif secara sederhana dapat dikatakan pemikiran yang berpangkal dari hal yang bersifat umum diterapkan atau diarahkan kepada hal yang bersifat khusus.<sup>40</sup> Pola pikir deduktif ini dapat terwujud dalam bentuk yang amat sederhana, tetapi juga dapat terwujud dalam bentuk yang tidak sederhana.<sup>41</sup>

### d. **Memiliki Simbol yang Kosong dari Arti**

Dalam matematika terdapat banyak sekali simbol, baik yang berupa huruf latin, Yunani maupun simbol-simbol khusus lainnya. Rangkaian simbol-simbol dalam matematika dapat membentuk suatu model matematika. Model matematika dapat berupa persamaan, pertidaksamaan, maupun fungsi. Selain itu ada pula model matematika

---

<sup>38</sup> R.Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika* ....., hal. 16

<sup>39</sup> Nur Choירו Siregar dan Marsigit, “*Pengaruh Pendekatan **Discovery** Yang Menekankan Aspek Analogi Terhadap Prestasi Belajar, Kemampuan Penalaran, Kecerdasan Emosional Spiritual*”. Dalam *Jurnal Pendidikan Matematika: Volume 2 – Nomor 2, November 2015*. Hal. 225

<sup>40</sup> A.H. Fathani, *Matematika: Hakikat* ....., hal. 68

<sup>41</sup> R.Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika* ....., hal. 16

yang berupa gambar (*pictoral*) seperti bangun-bangun geometrik, grafik maupun diagram.<sup>42</sup> Huruf-huruf yang digunakan dalam model persamaan, misalnya " $x + y = z$ " belum tentu bermakna atau berarti bilangan, demikian juga dengan tanda "+" belum tentu berarti operasi tambah untuk dua bilangan. Jadi, secara umum huruf dan tanda dalam model " $x + y = z$ " masih kosong dari arti, terserah kepada yang akan memanfaatkan model itu. Kosongnya arti ini memungkinkan matematika memasuki medan garapan dari ilmu bahasa (*linguistik*).<sup>43</sup>

#### e. Memperhatikan Semesta Pembicaraan

Sehubungan dengan kosongnya arti dari simbol-simbol matematika, menunjukkan dengan jelas bahwa dalam penggunaan matematika diperlukan kejelasan dalam ruang lingkup apa model itu dipakai. Bila lingkup pembicaraannya bilangan, maka simbol-simbol itu diartikan bilangan. Bila lingkup pembicaraannya transformasi, maka simbol-simbol itu diartikan sebagai suatu transformasi. Ruang lingkup pembicaraan itulah yang disebut dengan semesta pembicaraan. Benar salahnya atau ada tidaknya penyelesaian pada suatu soal atau masalah, juga ditentukan oleh semesta pembicaraan yang digunakan.<sup>44</sup>

#### f. Konsisten dalam Sistemnya

Dalam matematika terdapat berbagai macam sistem yang terbentuk dari beberapa aksioma dan memuat beberapa teorema. Ada

---

<sup>42</sup> A.H. Fathani, *Matematika: Hakikat* ....., hal. 70

<sup>43</sup> R.Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika* ....., hal. 17

<sup>44</sup> A.H. Fathani, *Matematika: Hakikat* ....., hal. 71

sistem-sistem yang saling berkaitan dan ada pula sistem-sistem yang dapat dipandang lepas satu dengan lainnya. Seperti halnya sistem-sistem aljabar dengan sistem-sistem geometri dapat dipandang lepas satu dengan lainnya. Di dalam sistem aljabar, terdapat beberapa sistem yang lain yang lebih kecil yang berkaitan satu dengan yang lainnya. Demikian pula sistem di dalam geometri.<sup>45</sup>

Berdasarkan karakteristik dari matematika (lihat, misalnya Kline, 1968; Bell, 1978; National Research Council, 1989; dan Souviney, 1994), matematika mempunyai potensi yang besar untuk memberikan berbagai macam kemampuan, dan sikap yang diperlukan oleh manusia agar ia bisa hidup secara cerdas (*intelligent*) dalam lingkungannya, dan agar bisa mengelola berbagai hal yang ada di dunia ini dengan sebaik-baiknya. Setiap potensi matematika yang dimiliki dapat dikembangkan untuk meningkatkan kemampuan-kemampuan matematika yang ada. Kemampuan-kemampuan yang dapat diperoleh dari matematika antara lain;<sup>46</sup> a) Kemampuan berhitung. b) Kemampuan mengamati dan membayangkan bangunan-bangunan geometris yang ada di alam beserta dengan sifat-sifat keruangan (*spatial properties*) masing-masing. c) Kemampuan melakukan berbagai macam pengukuran, misalnya panjang, luas, volume, berat dan waktu. d) Kemampuan mengamati, mengorganisasi, mendeskripsi, menyajikan, dan menganalisis data. e) Kemampuan melakukan kuantifikasi terhadap berbagai variabel dalam

---

<sup>45</sup> *Ibid.*, hal. 69

<sup>46</sup> Hasratuddin. "Pembelajaran Matematika Sekarang dan yang akan Datang Berbasis Karakter" Dalam Jurnal Didaktik Matematika: Vol. 1, No. 2, September 2014. Hal.33

berbagai bidang kehidupan, sehingga hubungan antara variabel yang satu dan variabel yang lain dapat diketahui secara lebih eksak. f) Kemampuan mengamati pola atau struktur dari suatu situasi. g) Kemampuan untuk membedakan hal-hal yang relevan dan hal-hal yang tidak relevan pada suatu masalah. h) Kemampuan membuat prediksi atau perkiraan tentang sesuatu hal berdasarkan data-data yang ada. i) Kemampuan menalar secara logis, termasuk kemampuan mendeteksi adanya kontradiksi pada suatu penalaran atau tindakan. j) Kemampuan berpikir dan bertindak secara konsisten. k) Kemampuan berpikir dan bertindak secara mandiri (*independen*) berdasarkan alasan yang dapat dipertanggung jawabkan. l) Kemampuan berpikir kreatif, dan kemampuan memecahkan masalah dalam berbagai situasi. Di samping dapat memberikan kemampuan-kemampuan, bidang studi matematika juga berguna untuk menanamkan atau memperkuat sikap-sikap tertentu. Sikap-sikap yang dapat ditumbuh kembangkan melalui bidang studi matematika antara lain ialah sikap teliti (cermat), sikap kritis, sikap efisien, sikap telaten, konsisten dan memiliki kebenaran yang universal. Dengan demikian, suatu hal yang pentas Copernicus dan Galileo mengatakan bahwa” *Mathematics is language in which God wrote the Universe*”

#### **4. Ciri-ciri Matematika**

Layaknya ilmu pengetahuan lain, matematika memiliki ciri-ciri atau sifat khas yang membedakan matematika dengan ilmu-ilmu yang lain. Frans Susilo, SJ. dalam bunga rampai untuk menghormati 72 tahun Pater

J.I.G.M. Drost, S.J. Susilo, dalam Suwarno (ed.), menulis ciri-ciri matematika berikut ini:<sup>47</sup>

- 1) Matematika bukanlah ilmu yang memiliki kebenaran mutlak. Kebenaran dalam matematika adalah kebenaran nisbi yang tergantung pada kesepakatan yang disetujui bersama.
- 2) Matematika bukanlah ilmu yang tidak bisa salah. Sebagai ilmu yang dibentuk dan dikembangkan oleh manusia, tentu matematika tidak lepas dari kesalahan dan keterbatasan. Meskipun demikian, melalui kesalahan-kesalahan itulah matematika didorong dan dipacu untuk terus tumbuh dan berkembang.
- 3) Matematika bukanlah kumpulan angka, simbol, dan rumus yang tidak ada kaitannya dengan dunia nyata. Justru sebaliknya, matematika tumbuh dan berakar dari dunia nyata.
- 4) Matematika bukanlah kumpulan teknik pengerjaan yang hanya perlu dihafal saja sehingga siap pakai untuk menyelesaikan soal-soal. Dalam matematika, keindahan bukan semata-mata hanya ditentukan dari hasil akhir tetapi justru dari latar belakang dan proses yang mengantarkan sampai terjadinya hasil akhir tersebut.
- 5) Objek matematika adalah unsur-unsur yang bersifat sosialkultural-historis, yaitu merupakan milik bersama seluruh umat manusia, sebagai salah satu sarana yang dipergunakan manusia untuk mengembangkan segi-segi tertentu dalam perikehidupan

---

<sup>47</sup> Catur, Supratmono. *Matematika Asyik*. Hal. 8

manusiawinya, dan yang terbentuk melalui proses panjang menyejarah yang membentuk wajah matematika itu sendiri.<sup>48</sup>

Masih dalam buku yang sama, Yansen Marpaung, secara implisit menuliskan bahwa matematika memiliki sekurangnya dua ciri penting. *Pertama*, Matematika secara historis berkembang bukan secara deduktif, tetapi empiris induktif. Dalam perkembangannya, para ahli kemudian menggunakan metode deduksi untuk mempelajari matematika. Matematika dikenal sebagai ilmu deduktif.<sup>49</sup> Ini berarti proses pengerjaan matematika harus bersifat deduktif. Dengan menggunakan metode ini pula para ahli mulai gencar mempertanyakan kembali kebenaran teorema-teorema yang sudah ada dengan menggugat aksioma-aksioma sebelumnya sehingga matematika maju dan berkembang dengan sangat pesat. Kemudian yang *kedua*, Aksioma-aksioma dalam matematika bersifat konsisten. Dengan demikian, teorema-teorema yang diturunkan dari aksioma-aksioma sebelumnya tidak mengalami pertentangan satu dengan yang lain. Dalam matematika terdapat berbagai macam sistem yang terbentuk dari beberapa aksioma dan memuat beberapa teorema. Ada sistem-sistem yang saling berkaitan dan ada pula sistem-sistem yang dapat dipandang lepas satu dengan lainnya. Seperti halnya sistem-sistem aljabar dengan sistem-sistem geometri dapat dipandang lepas satu dengan lainnya. Di dalam sistem aljabar, terdapat beberapa sistem yang lain yang

---

<sup>48</sup> *Ibid*, hal. 9

<sup>49</sup> Erman Suherman, et al., *Strategi Pembelajaran* ....., hal. 18

lebih kecil yang berkaitan satu dengan yang lainnya. Demikian pula sistem di dalam geometri.<sup>50</sup>

Sedangkan menurut Suwarsono, sifat-sifat khas matematika antara lain: objek bersifat abstrak. menggunakan lambang-tambang yang tidak banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari. dan proses berpikir yang dibatasi oleh aturan-aturan yang ketat. Meskipun Matematika mempunyai objek kajian yang bersifat abstrak, beberapa matematikawan menganggap bahwa objek matematika itu *konkret* dalam pikiran mereka. Ada empat objek dasar kajian matematika, yaitu konsep, prinsip dan operasi.<sup>51</sup>

## **B. Kemampuan Berpikir Kritis**

### **1. Pengertian Berpikir**

Terdapat berbagai macam definisi tentang pengertian berpikir. Berpikir adalah suatu tingkah laku yang menggunakan ide, yaitu suatu proses simbolis.<sup>52</sup> Dengan kata lain, berpikir merupakan suatu kegiatan mental yang melibatkan kinerja dari otak. Selain itu, Ruggiero juga mengartikan berpikir sebagai suatu aktivitas mental untuk membantu memformulasikan atau menyelesaikan masalah, dan membuat sesuatu keputusan atau memenuhi hasrat keingintahuan.<sup>53</sup> Dengan pendapat tersebut, Ruggiero menunjukkan bahwa ketika seseorang merumuskan suatu masalah, menyelesaikan masalah ataupun ingin memahami sesuatu,

---

<sup>50</sup> 49Ibid., hal. 69

<sup>51</sup> Hasratuddin. “Pembelajaran Matematika Sekarang dan yang akan Datang Berbasis Karakter” Dalam Jurnal Didaktik Matematika: Vol. 1, No. 2, September 2014. Hal.31

<sup>52</sup> Ahmad Fauzi, *Psikologi Umum*, (Bndung: Pustaka Setia, 2004), hal. 47

<sup>53</sup> 51Vincent Ryan Ruggiero, *The Art of Thinking: A Guide to Critical and Creative Thought*, (New York: Pearson Education Inc, 1998)

maka ia telah melakukan suatu aktivitas berpikir. Di mana berpikir tidak hanya terpusat pada aktivitas kerja otak saja, melainkan juga melibatkan seluruh pribadi manusia serta perasaan dan kehendak manusia. Memikirkan sesuatu berarti mengarahkan diri pada objek tertentu, menyadari secara aktif dan menghadirkannya dalam pikiran kemudian mempunyai wawasan tentang objek tersebut.

Berpikir juga didefinisikan sebagai berkembangnya ide dan konsep di dalam diri seseorang.<sup>54</sup> Perkembangan ide dan konsep ini berlangsung melalui proses perhubungan antara bagian-bagian informasi yang tersimpan di dalam diri seseorang yang berupa pengertian-pengertian. Bahkan menurut Gieles, berpikir diartikan sebagai berbicara dengan dirinya sendiri di dalam batin, yaitu mempertimbangkan, merenungkan, menganalisis, membuktikan sesuatu, menunjukkan alasan-alasan, menarik kesimpulan, meneliti sesuatu jalan pikiran, mencari bagaimana berbagai hal itu berhubungan antara satu dengan yang lain. Hal ini didukung oleh Solso yang mendefinisikan berpikir sebagai sebuah proses dimana representasi mental baru yang dibentuk melalui transformasi informasi dengan interaksi yang kompleks atribut-atribut mental seperti penilaian, abstraksi, logika, imajinasi, dan pemecahan masalah.<sup>55</sup>

Presseisen dalam Rochaminah, memberi pengertian berpikir sebagai suatu aktivitas mental dalam usaha untuk memperoleh

---

<sup>54</sup> Bochensi, *Thinking* dalam [http:// www.scribd.com/doc/87900727/ Berpikir#Psikologi](http://www.scribd.com/doc/87900727/Berpikir#Psikologi) Pendidikan Pola Pikir AnalogisUNESA, diakses 14 November 2018

<sup>55</sup> Solso, dalam [http:// www.psikologi.or.id/mycontents/uploads thinking.pdf](http://www.psikologi.or.id/mycontents/uploads/thinking.pdf) , diakses 14 November 2018



pengetahuan. Oleh karena itu, berpikir merupakan proses kognitif yang tidak dapat dilihat secara fisik. Hasil dari berpikir dapat berupa ide, pengetahuan, prosedur, argumen, dan keputusan.<sup>56</sup>

Dari beberapa macam definisi mengenai berpikir yang telah dipaparkan di atas, pada dasarnya ciri utama dari berpikir adalah adanya suatu abstraksi. Dengan demikian dapat ditarik kesimpulan bahwa berpikir adalah bergaul dengan abstraksi-abstraksi, atau dengan kata lain berpikir adalah meletakkan atau mencari hubungan antara abstraksi-abstraksi. Berpikir erat kaitannya dengan daya jiwa-jiwa yang lain, seperti halnya dengan tanggapan, ingatan, pengertian dan perasaan yang berarti berhubungan dengan kemampuan mental.

Berpikir sebagai suatu kemampuan mental dapat dibedakan menjadi beberapa jenis, antara lain berpikir logis, analitis, sistematis, kritis dan kreatif.<sup>57</sup> Berpikir logis dapat diartikan sebagai kemampuan berpikir untuk menarik suatu kesimpulan yang sah menurut aturan logika dan dapat membuktikan bahwa kesimpulan tersebut benar sesuai dengan pengetahuan-pengetahuan sebelumnya yang sudah diketahui. Berpikir analitis adalah kemampuan berpikir untuk menguraikan, memperinci dan menganalisis informasi-informasi yang digunakan untuk memahami suatu pengetahuan dengan menggunakan akal pikiran yang logis, bukan hanya berdasarkan perasaan atau tebakan saja. Berpikir sistematis adalah

---

<sup>56</sup> In Hi Abdullah, "Berpikir Kritis Matematika". Dalam Jurnal Pendidikan Matematika: Vol. 2, No. 1, April 2013. Hal.67

<sup>57</sup> Ary Woro Kurniasih, *Penjenjangan Kemampuan Berpikir Kritis dan Identifikasi Tahap Berpikir Kritis Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika FMIPA UNNES dalam Menyelesaikan Masalah Matematika*, (Malang: Tesis Tidak Diterbitkan, 2010), hal. 16-17

kemampuan berpikir untuk mengerjakan atau menyelesaikan suatu tugas sesuai dengan langkah-langkah, urutan, tahapan, atau perencanaan yang tepat, efektif dan efisien. Berpikir logis, analitis dan sistematis ketiganya saling berkaitan. Untuk dapat dikatakan sebagai berpikir sistematis seseorang perlu berpikir secara analitis dan memahami informasi yang digunakan. Kemudian, untuk dapat dikatakan berpikir analitis diperlukan kemampuan berpikir logis dalam mengambil kesimpulan terhadap situasi.

Sedangkan untuk berpikir kritis dan kreatif, menurut Crawford & Brown merupakan perwujudan dari aktivitas berpikir tingkat tinggi (*higher order thinking*).<sup>58</sup> Karena berpikir kritis dan kreatif adalah kompetensi kognitif tertinggi di atas kemampuan berpikir yang lainnya. Di mana berpikir kritis dapat dipandang sebagai suatu kemampuan berpikir untuk membandingkan dua atau lebih informasi, dan bisa menyimpulkannya dengan penuh pertimbangan, kejelasan serta dapat mengevaluasi dari apa yang telah didapatkan dari pemikiran tersebut. Sedangkan berpikir kreatif ditandai dengan adanya penciptaan sesuatu yang baru dari hasil berbagai ide, keterangan, konsep, pengalaman maupun pengetahuan yang ada di dalam pikirannya. Berpikir kritis dapat diajarkan dengan lebih banyak menggunakan otak kiri sedangkan berpikir kreatif lebih banyak menggunakan otak kanan.<sup>59</sup> Dari penjelasan tersebut, disadari bahwa

---

<sup>58</sup> C.M. Crawford & E. Brown, *Focusing Upon Higher Order Thinking Skills: Webquest and The Learned-Centered Mathematical Learning Environmen*, dalam *Journal Interactive Online Learning*. Vol. 3(2), 1541-4914.2010. hal. 4

<sup>59</sup> Johnson Lamb, *Critical and Creative Thinking-Bloom's Taxonomy*, dalam <http://www.http://eduscapes.com/tap/topic69.htm>, diakses 20 Januari 2013

berpikir kritis dan kreatif tidak dapat dipisahkan.<sup>60</sup> Namun, untuk tujuan pembahasan ini, perlu memisahkan kedua aktivitas mental tersebut.

## 2. Berpikir Kritis

Beberapa tahun terakhir berpikir kritis menjadi suatu istilah yang sangat populer dalam dunia pendidikan. Karena berpikir kritis memungkinkan peserta didik untuk menemukan kebenaran di tengah-tengah kejadian dan informasi yang mereka hadapi di setiap harinya.<sup>61</sup> Berpikir kritis juga membantu peserta didik untuk bisa bertahan dalam perkembangan pendidikan di zaman saat ini. Kata kritis berasal dari bahasa Yunani yaitu *kritikos* dan *kriterion*.<sup>62</sup> Kata *kritikos* berarti pertimbangan sedangkan *kriterion* mengandung makna ukuran baku atau standar. Secara etimologi, kata kritis mengandung makna pertimbangan yang didasarkan pada suatu ukuran baku atau standar. Dengan demikian secara etimologi berpikir kritis mengandung makna suatu kegiatan mental yang dilakukan seseorang untuk dapat memberikan pertimbangan dengan menggunakan ukuran atau standar tertentu. Berpikir kritis (*critical thinking*) adalah kemampuan dalam menganalisis dan mengevaluasi informasi yang didapat dari hasil pengamatan, pengalaman, penalaran maupun komunikasi untuk memutuskan apakah informasi tersebut dapat

---

<sup>60</sup> Elani B. Johnson, *Contextual Teaching and Learning*, (Bandung: MLC, 2007), hal. 184

<sup>61</sup> Fachrurazi, *Penerapan Pembelajaran Berbasis Masalah untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis dan Komunikasi Matematis Siswa Sekolah Dasar*, Edisi Khusus (1). 2011. hal. 80

<sup>62</sup> Paul, Elder & Bartell dalam Lambertus, *Pentingnya Melatih Keterampilan Berpikir Kritis dalam Pembelajaran Matematika di Sekolah Dasar*, dalam Jurnal Forum Kependidikan. Vol. 28(2). 2009. hal. 137

dipercaya sehingga dapat memberikan kesimpulan yang rasional dan benar.<sup>63</sup>

Terdapat berbagai macam definisi tentang berpikir kritis yang dikemukakan beberapa ahli, di antaranya sebagai berikut:

- a. Menurut Beyer berpikir kritis adalah suatu cara berpikir disiplin yang digunakan seseorang untuk mengevaluasi validitas sesuatu (pernyataan-pernyataan, ide-ide, argumen dan penelitian).<sup>64</sup>
- b. Berpikir kritis menurut Johnson merupakan sebuah proses terarah dan jelas yang digunakan dalam kegiatan mental seperti memecahkan masalah, mengambil keputusan, membujuk, menganalisis asumsi, dan melakukan penelitian ilmiah. Senada dengan itu, Ennis yang dikutip Lipman mengemukakan aspek dalam berpikir kritis adalah *focus* (fokus), *reasons* (alasan), *inference* (simpulan), *situation* (situasi), *clarity* (kejelasan), dan *overview* (tinjau ulang).<sup>65</sup>
- c. Mason dalam Lunenburg menyatakan bahwa konsep berpikir kritis salah satu trend yang paling signifikan dalam pendidikan dan memiliki hubungan yang dinamis bagaimana guru mengajar dan peserta didik belajar. Lunenburg menambahkan setelah kita memahami konten yang tidak terpisahkan dari pemikiran yang menghasilkan, mengatur,

---

<sup>63</sup> Ratna Purwati dkk. "Analisis Kemampuan Berpikir Kritis Siswa Dalam Menyelesaikan Masalah Persamaan Kuadrat Pada Pembelajaranmodel *Creative Problem Solving*" Dalam Jurnal Pendidikan: ©Kadikma, Vol. 7, No. 1, hal. 84-93, April 2016

<sup>64</sup> Beyer, *Critical thinking*, dalam <http://furahasekai.wordpress.com/2011/10/06/kemampuan-berpikir-kritis-dan-kreatif-matematika/> diakses 20 Januari 2013

<sup>65</sup> Zetriuslita, dkk. "Analisis Kemampuan Berpikir Kritis Matematis Mahasiswa Dalam Menyelesaikan Soal Uraian Kalkulus Integral Berdasarkan Level Kemampuan Mahasiswa". Dalam Jurnal Ilmiah: Vol 5, No. 1, Februari 2016. Hal. 57

menganalisis, mensin-tesis, mengevaluasi, dan mentransformasinya. Sejalan dengan itu Marzano berpikir kritis adalah sesuatu yang masuk akal, berpikir reflektif yang difokuskan pada apa keputusan yang diyakini, dikerjakan dan diperbuat.<sup>66</sup>

- d. Menurut Chaffe berpikir kritis adalah aktivitas berpikir untuk menyelidiki secara sistematis proses berpikir itu sendiri serta berpikir secara terorganisasi mengenai proses berpikir diri sendiri dan orang lain yang akan membekali anak untuk sebaik mungkin menghadapi informasi yang mereka dengar, baca, kejadian yang mereka alami dan keputusan yang mereka buat setiap hari.<sup>67</sup>
- e. Menurut Paul Berpikir kritis adalah suatu cara berpikir tentang berbagai subjek, konten, atau masalah di mana pemikir meningkatkan kualitas pemikirannya dengan terampil mengambil alih struktur yang melekat dalam pemikiran dan menerapkan standar intelektual mereka.<sup>68</sup>
- f. Menurut Robert Ennis, berpikir kritis adalah sebuah proses berpikir yang dalam mengungkapkan tujuan yang dilengkapi alasan yang tegas tentang suatu kepercayaan dan kegiatan yang telah dilakukan.<sup>69</sup>
- g. Menurut McPeck berpikir kritis adalah berpikir spesifik dan tergantung pada pengetahuan mendalam serta pemahaman isi dan epistemologi yang disiplin.<sup>70</sup>

---

<sup>66</sup> *Ibid*, Hal. 57

<sup>67</sup> Chaffe dalam Lambertus, *Pentingnya Melatih Keterampilan Berpikir Kritis .....*, hal. 137

<sup>68</sup> Paul, *Defining Critical Thinking*, dalam <http://www.criticalthinking.org/>, diakses 20 Januari 2019

<sup>69</sup> Robert Ennis, *Critical Thinking*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall. 1996

h. Menurut Siegel berpikir kritis berarti harus tepat dalam alasan dan bersikap rasional serta bertindak atas dasar suatu alasan.<sup>71</sup>

Berdasarkan berbagai macam pengertian tentang berpikir kritis yang dikemukakan oleh para ahli, walaupun menggunakan istilah yang berbeda-beda sesuai dengan sudut pandang dan fokus perhatian yang dianut masing-masing, namun banyak memiliki kesamaan. Oleh karena itu, Mason menyatakan ada 3 aspek penting dalam aktivitas berpikir kritis, yaitu (1) keterampilan bernalar kritis (seperti kemampuan untuk menilai suatu penalaran dengan tepat), (2) karakter yang meliputi sikap kritis (*skeptisisme*, cenderung menanyakan suatu pertanyaan penyelidikan) dan komitmen untuk mengekspresikan sikap tersebut, serta orientasi moral yang memotivasi berpikir kritis, (3) pengetahuan substansial dalam bidang tertentu seperti konsep berpikir kritis dan disiplin tertentu di mana seseorang mampu berpikir kritis.<sup>72</sup>

Menurut Perkins & Murphy, terdapat empat tahap berpikir kritis matematis yaitu *clarification, assessment, inference, dan strategy/tactics* sedangkan indikator kemampuan berpikir kritis matematis dirinci pada tiap tahapan berpikir kritis matematis. Dengan indikator tersebut, tahap pencapaian berpikir kritis matematis peserta didik dapat diketahui. Selain itu, menurut Zimmerman, kemandirian belajar memuat tiga ciri utama

<sup>70</sup> J. McPeck, *Critical Thinking and education*, Oxford: Martin Robertson, 1981

<sup>71</sup> H.Siegel, *Educating Reason: Rationality, Critical Thinking and Education*, (London: Routledge, 1990)

<sup>72</sup> Mason dalam Ary Woro Kurniasih, *Penjenjangan Kemampuan Berpikir Kritis dan Identifikasi Tahap Berpikir Kritis Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika FMIPA UNNES dalam Menyelesaikan Masalah Matematika*, (Malang: Tesis Tidak Diterbitkan, 2010), hal. 22

yaitu menyusun strategi belajar, melakukan refleksi belajar agar menjadi efektif, dan proses motivasi yang saling terkait. Kemandirian belajar peserta didik akan membantu peserta didik mengenali dirinya dan menjadi manajer dalam belajarnya, sehingga kemampuan berpikir kritis matematis peserta didik dapat meningkat seiring dengan meningkatnya kemandirian belajar peserta didik.<sup>73</sup>

Sedangkan Beyer mengidentifikasi keterampilan yang dibutuhkan agar berpikir kritis menjadi lebih efektif ada 8 , yaitu (1) Membedakan hal antara fakta-fakta yang dapat dibuktikan dan menilai klaim, (2) Membedakan informasi, klaim, bernalar yang relevan dan yang tidak relevan, (3) Menentukan ketelitian faktual suatu pernyataan, (4) Menentukan kredibilitas sumber, mengidentifikasi klaim (5) Mengidentifikasi asumsi yang tidak dinyatakan, (6) Mendeteksi bias, (7) Mengidentifikasi ketidakkonsistenan logis dalam bernalar, (8) Mengakui ketidakkonsistenan logis dalam bernalar, dan (9) Menentukan kekuatan argumen atau klaim.<sup>74</sup>

Robert Ennis juga mengidentifikasi berpikir kritis menjadi 12 indikator yang dikelompokkannya dalam lima besar aktivitas, yaitu sebagai berikut.<sup>75</sup>

- 1) Memberikan penjelasan sederhana (*elementary clarification*).

---

<sup>73</sup> Qurrotul Ainiyah. "Analisis Kemampuan Berpikir Kritis Matematis pada Pembelajaran PSPBL Berbantuan Smart Point Ditinjau dari Kemandirian Belajar". Dalam jurnal: FMIPA Universitas Negeri Semarang.

<sup>74</sup> S. Burris, *Effect of Problem-Based Learning on Critical Thinking Ability and Content Knowledge of Secondary Agriculture Students*, (Columbia: Disertasi Tidak Diterbitkan, 2005)

<sup>75</sup> Nur Farida, *Proses Berpikir Kritis Mahasiswa Melalui Perkuliahan Penyelesaian Program Linear*, (Malang: Tesis Tidak Diterbitkan, 2010), hal.18

Berisi memfokuskan suatu pertanyaan, menganalisis asumsi, bertanya dan menjawab pertanyaan klarifikasi dan pertanyaan yang menantang.

2) Membangun keterampilan dasar (*basic support*).

Terdiri atas mempertimbangkan apakah narasumber dapat dipercaya atau tidak, dan mengobservasi serta mempertimbangkan hasil observasi.

3) Menyimpulkan (*interference*).

Terdiri atas kegiatan mendeduksi atau mempertimbangkan hasil deduksi, menginduksi dan mempertimbangkan hasil deduksi serta membuat dan mengkaji nilai-nilai hasil pertimbangan.

4) Membuat penjelasan lanjut (*advanced clarification*).

Terdiri dari mendefinisikan suatu istilah dan mempertimbangkan definisi serta mengidentifikasi asumsi.

5) Mengatur strategi dan taktik (*strategy and tactics*).

Meliputi menentukan suatu tindakan dan berinteraksi dengan orang lain.

Dalam memutuskan apa yang akan dipercaya, diperlukan informasi yang reliabel dan pemahaman terhadap topik atau lapangan studi. Berdasarkan definisi Ennis maka seseorang yang berpikir kritis mampu mengambil keputusan mengenai apa yang akan diyakini dan apa yang akan dilakukan berdasarkan informasi yang dapat dipercaya dan pemahaman terhadap topik yang dihadapi.



Adapun penjelasannya terdapat pada tabel berikut ini.<sup>76</sup>

**Tabel 2.1** Indikator Kemampuan Berpikir Kritis Menurut Ennis

No	Kelompok	Indikator	Sub Indikator
1	Memberikan penjelasan sederhana	Memfokuskan pertanyaan	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Mengidentifikasi atau merumuskan pertanyaan</li> <li>– Mengidentifikasi atau merumuskan kriteria untuk mempertimbangkan kemungkinan jawaban</li> <li>– Menjaga kondisi berpikir</li> </ul>
		Menganalisis argumen	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Mengidentifikasi kesimpulan</li> <li>– Mengidentifikasi kalimat kalimat pertanyaan</li> <li>– Mengidentifikasi kalimat kalimat bukan pertanyaan</li> <li>– Mengidentifikasi dan menangani suatu ketidaktepatan</li> <li>– Melihat struktur dari suatu argumen</li> <li>– Membuat ringkasan</li> </ul>
		Bertanya dan menjawab pertanyaan	Memberikan penjelasan sederhana
		klarifikasi dan pertanyaan yang menantang	Menyebutkan contoh
2	Membangun keterampilan dasar	Mempertimbangkan apakah sumber dapat dipercaya atau tidak	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Mempertimbangkan keahlian</li> <li>– Mempertimbangkan kemenarikan konflik</li> <li>– Mempertimbangkan kesesuaian sumber</li> <li>– Mempertimbangkan reputasi</li> <li>– Mempertimbangkan penggunaan prosedur yang tepat</li> <li>– Mempertimbangkan risiko untuk reputasi</li> <li>– Kemampuan untuk memberikan alasan</li> <li>– Kebiasaan berhati-hati</li> </ul>
		Mengobservasi dan mempertimbangkan hasil observasi	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Mengurangi dugaan</li> <li>– Menggunakan waktu yang singkat antara observasi dan laporan</li> <li>– Melaporkan hasil observasi</li> </ul>

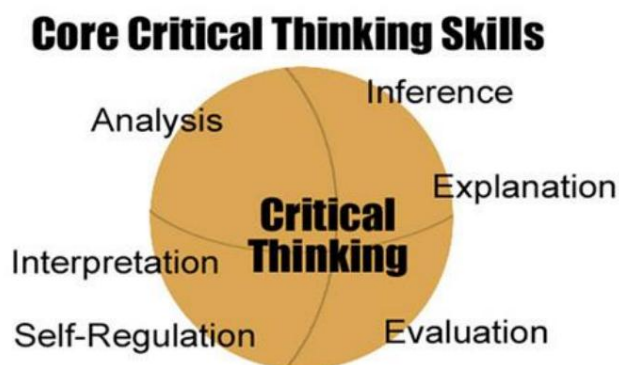
<sup>76</sup> Ennis dalam <http://evisapinatulbahriah.wordpress.com/2011/06/30/indikator-berpikirkritis-dan-kreatif/>, diakses pada 20 November 2018

			<ul style="list-style-type: none"> <li>- Merekam hasil observasi</li> <li>- Menggunakan bukti-bukti yang benar</li> <li>- Menggunakan akses yang baik</li> <li>- Penguatan</li> <li>- Mempertanggungjawabkan hasil observasi</li> </ul>
3	Menyimpulkan	Mendeduksi dan mempertimbangkan deduksi	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siklus logika Euler</li> <li>- Mengkondisikan logika</li> <li>- Menyatakan tafsiran</li> </ul>
		Menginduksi dan mempertimbangkan hasil induksi	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Mengemukakan hal yang umum</li> <li>- Mengemukakan kesimpulan dan hipotesis</li> <li>- mengemukakan hipotesis merancang eksperimen menarik kesimpulan sesuai fakta</li> <li>- menarik kesimpulan dari hasil menyelidiki</li> </ul>
		Membuat dan mengkaji nilai-nilai hasil pertimbangan	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Membuat dan menentukan hasil pertimbangan berdasarkan latar belakang fakta-fakta</li> <li>- Membuat dan menentukan hasil pertimbangan berdasarkan akibat</li> <li>- Membuat dan menentukan hasil pertimbangan berdasarkan penerapan fakta</li> <li>- Membuat dan menentukan hasil pertimbangan keseimbangan dan masalah</li> </ul>
4	Memberikan penjelasan lanjut	Mendefinisikan istilah dan mempertimbangkan definisi	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Membuat bentuk definisi</li> <li>- Strategi membuat definisi</li> <li>- Bertindak dengan memberikan penjelasan lanjut</li> <li>- Mengidentifikasi dan menangani ketidakbenaran yg disengaja</li> <li>- Membuat isi definisi</li> </ul>
		Mengidentifikasi asumsi	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Penjelasan bukan pernyataan</li> <li>- Mengonstruksi argument</li> </ul>
5	Mengatur strategi dan taktik	Menentukan tindakan	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Mengungkap masalah</li> <li>- Memilih kriteria untuk mempertimbangkan solusi yang mungkin</li> <li>- Merumuskan solusi alternatif</li> <li>- Menentukan tindakan sementara</li> <li>- Mengulang kembali</li> </ul>

			– Mengamati penerapannya
		Berinteraksi dengan orang lain	– Menggunakan argumen – Menggunakan strategi logika – Menggunakan strategi retorika – Menunjukkan posisi, orasi, atau tulisan

(adaptasi dari Ennis)

Berdasarkan beberapa penjelasan dari indikator-indikator di atas, para ahli dalam *The California Critical Thinking* menyimpulkan ada enam inti dari kegiatan berpikir kritis yaitu interpretasi, analisis, evaluasi, penarikan kesimpulan, eksplanasi dan pengaturan diri.<sup>77</sup> Berikut adalah gambaran yang diberikan oleh Paul dan rekannya.<sup>78</sup>



**Gambar 2.1** Inti Kemampuan Berpikir Kritis

Salah satu modal dasar atau modal intelektual yang sangat penting bagi setiap orang dan merupakan bagian yang *fundamental* dari kematangan manusia adalah Kemampuan berpikir kritis.<sup>79</sup> Oleh karena itu, kemampuan berpikir kritis merupakan hal yang penting bagi peserta didik

<sup>77</sup> Lambertus, *Pentingnya Melatih Keterampilan Berpikir Kritis.....*, hal. 138

<sup>78</sup> Paul, Fisher and Nisich dalam <http://www.blogdiar.net/edukasi/apa-itu-berpikir-kritiscritical-thinking.html> diakses pada 22 November 2018

<sup>79</sup> Liliyasi, *Model Pembelajaran IPA untuk Meningkatkan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi Calon Guru sebagai Kecenderungan Baru pada Era Globalisasi*, dalam Jurnal Pengajaran MIPA. Vol. 2(1). 2001. 55-56

di setiap jenjang pendidikan yang ada. Hal ini sesuai dengan prioritas perkembangan pendidikan yang tertera pada Kurikulum 2013 di mana peserta didik diharapkan mampu untuk berpikir matematis, yaitu mulai berpikir logis, analitis, sistematis, kritis, kreatif serta kemampuan bekerja sama.<sup>80</sup>

Untuk mendukung penentuan kemampuan berpikir kritis peserta didik, menurut Ennis ada beberapa sifat-sifat atau bakat berpikir kritis yang mendasarinya, yaitu mencari penjelasan pertanyaan, menggunakan penalaran, mencoba menjadi sumber informasi yang baik, menggunakan dan menyebutkan sumber informasi yang kredibel, sensitif terhadap perasaan dan pengetahuan. Hal ini sesuai dengan penjelasan Nindha Ayu yang menyebutkan beberapa sifat dari berpikir kritis antara lain sebagai berikut.<sup>81</sup>

a. Rasa Ingin Tahu

Rasa ingin tahu ditunjukkan peserta didik untuk selalu terdorong dalam menyatakan sesuatu.

b. Bersifat Imajinatif

Sifat imajinatif dapat ditunjukkan peserta didik dalam memperagakan hal-hal yang belum pernah terjadi dan terkadang menggunakan khayalan, namun peserta didik mengetahui perbedaan antara suatu hal khayalan dengan kenyataan.

---

<sup>80</sup> Lambertus, *Pentingnya Melatih Keterampilan Berpikir Kritis.....*, hal. 136

<sup>81</sup> Nindha Ayu Berlianti, *Model Pembelajaran Berbasis Masalah untuk Meningkatkan Keterampilan Berpikir Kritis dan Kreatif pada Pelajaran IPA Siswa Kelas VII Semester 1 SMP PGRI 1 Ngraho Bojonegoro*, (Malang: Skripsi Tidak Diterbitkan, 2011), hal. 20-21

c. Tertantang oleh Kemajemukan

Perilaku peserta didik senang menjajaki persoalan-persoalan dan selalu melibatkan diri dalam tugas yang majemuk serta terdorong untuk mengatasi suatu masalah-masalah yang sulit.

d. Sifat Berani Mengambil Resiko

Perilaku peserta didik selalu tidak takut gagal atau mendapat kritik bahkan bersedia mengakui kesalahan dan kegagalannya, serta mampu berusaha untuk selalu mencoba. Yang tak kalah penting adalah peserta didik berani mempertahankan gagasan atau pendapat meski belum tentu gagasan atau pendapatnya itu benar.

Berdasarkan dari pemaparan di atas, berpikir kritis merupakan suatu proses mental yang melibatkan pengetahuan, keterampilan bernalar, dan karakter bernalar intelektual bernalar. Pemikiran yang seperti inilah yang diperlukan dalam proses pembelajaran matematika, terutama dalam memahami konsepnya. Karena Pada dasarnya untuk belajar matematika diperlukan kemampuan berpikir tingkat tinggi, dengan kata lain belajar matematika dapat memahami hingga ke inti sarinya adalah dengan menggunakan kemampuan berpikir kritis. Begitu juga sebaliknya, kemampuan berpikir kritis dapat dilatih dan dibiasakan kepada peserta didik dengan melalui pembelajaran matematika. Di mana, kemampuan berpikir kritis dan pelajaran matematika keduanya tidak dapat dipisahkan. Pada penelitian ini, untuk mempermudah penilaian dari kemampuan berpikir kritis digunakanlah model Paul dan Elder.

### 3. Model Berpikir Kritis Paul dan Elder

Richard Paul dan Linda Elder merupakan pakar berpikir kritis dalam tradisi filosofis yang menyusun suatu model berpikir kritis dengan nama populer yaitu Model Berpikir Kritis Paul dan Elder. Menurut Paul dan Elder, ada 3 macam komponen berpikir kritis yaitu a) elemen bernalar; b) standar intelektual bernalar dan c) karakter intelektual bernalar.<sup>82</sup>

Untuk memperjelas dalam penilaian yang akan digunakan, berikut komponen-komponen berpikir kritis Paul dan Elder.

#### a. Elemen Bernalar

Terdiri dari 8 Elemen bernalar, yaitu sebagai berikut.<sup>83</sup>

##### 1) Tujuan (*purpose*)

Untuk memahami beberapa hal, seseorang harus dapat mendefinisikan tujuan dengan jelas.

##### 2) Pertanyaan (*questions*)

Penalaran adalah usaha menjawab pertanyaan yang menjadi masalah, dapat dilakukan dengan cara menggambarkan sesuatu, menetapkan pertanyaan dan menyelesaikan masalah.

##### 3) Asumsi (*assumptions*)

Mencoba mengidentifikasi asumsi dengan jelas dan menentukan apakah asumsi tersebut dapat untuk dipertanggungjawabkan serta

---

<sup>82</sup> Siti Rahmatillah dkk. *Tingkat Kemampuan Berpikir Kritis Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Barisan Dan Deret Aritmatika Di Sman 5 Jember*. Dalam Jurnal Pendidikan : Kadikma, Vol. 8, No. 2, hal. 51-60, Agustus 2017. Hal 52

<sup>83</sup> Paul dan Elder dalam *Penjenjangan Kemampuan Berpikir Kritis.....*, hal. 27-28

bagaimana asumsi tersebut membentuk sudut pandang.

4) Sudut Pandang (*points of view*)

Penalaran dibuat dengan memperhatikan beragam sudut pandang sehingga memberikan beragam alternatif penyelesaian.

5) Informasi (*information*)

Berpikir mencoba mengidentifikasi informasi (data dan fakta), meyakinkan bahwa informasi yang digunakan jelas dan relevan dengan pertanyaan yang menjadi pokok masalah.

6) Konsep dan ide (*concepts*)

Penalaran dinyatakan dan dibentuk berdasarkan konsep dan ide yaitu definisi, teori, prinsip, aturan dan model. Dalam hal ini diperlukan untuk mengidentifikasi konsep dan menjelaskannya.

7) Penyimpulan (*inferences*)

Penalaran terdiri dari penarikan kesimpulan atau interpretasi yang menggambarkan kesimpulan dan memberi pengertian dari data.

8) Implikasi (*implications*)

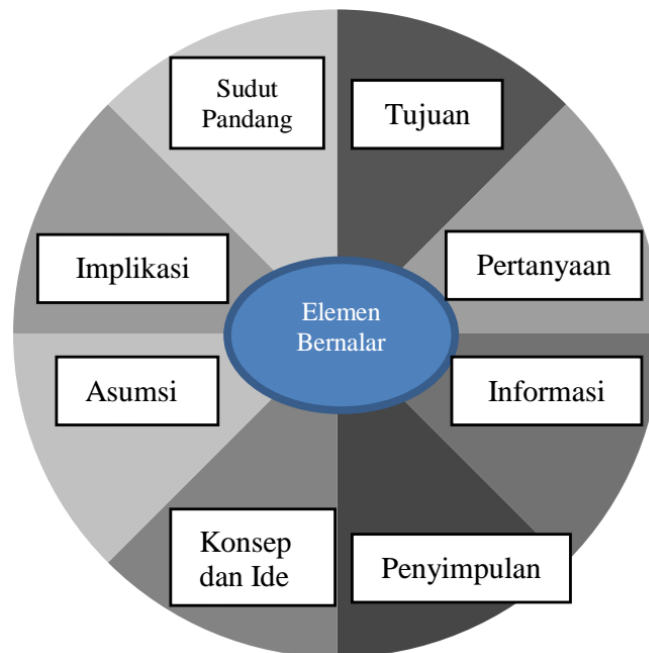
Penalaran akan memiliki implikasi dan konsekuensi. Karena itu penting untuk menemukan implikasi dan konsekuensi dari suatu penalaran, mencari implikasi negatif dan positifnya serta mempertimbangkan konsekuensi yang mungkin terjadi.

**Tabel 2.2** Indikator Elemen Bernalar Paul dan Elder

No.	Elemen Bernalar	Indikator Berpikir Kritis
1.	Tujuan	Menjelaskan tujuan masalah
		Mengidentifikasi ciri-ciri masalah
		Merancang proses yang ingin dicapai
2.	Pertanyaan	Membuat pertanyaan terhadap masalah

		Bertanya dan menjawab pertanyaan klarifikasi
3.	Asumsi	Mengidentifikasi asumsi Memprediksi kemungkinan yang akan terjadi
4.	Konsep	Mendefinisikan istilah Mendeskripsikan teori dan konsep Mengaitkan hasil observasi dengan konsep
5.	Informasi	Mendeskripsikan informasi Mempertimbangkan kredibilitas sumber Menjelaskan hasil observasi
6.	Sudut Pandang	Mempertimbangkan hasil penelitian sebelumnya Membuat argumen terhadap masalah
7.	Penyimpulan	Menginterpretasikan pernyataan/gambar Menginterpretasikan hasil observasi Membuat dan menilai keputusan
8.	Implikasi	Memprediksi kemungkinan terhadap masalah Mengidentifikasi sumber-sumber masalah Mengantisipasi dan mencari solusi terhadap masalah

Berikut gambaran mengenai elemen bernalar menurut Paul dan Elder.<sup>84</sup>



(adaptasi dari Paul dan Elder)

**Gambar 2.2** Elemen Bernalar Paul dan Elder

<sup>84</sup> Paul and Elder, *The Miniature Guide to Critical Thinking* ....., hal. 5



## b. Standar Intelektual Bernalar

Adapun standar intelektual bernalar yang paling penting, yaitu sebagai berikut.<sup>85</sup>

### 1) Kejelasan (*clarity*)<sup>86</sup>

Kejelasan adalah pintu gerbang dari standar intelektual. Jika pernyataannya tidak jelas, kita tidak bisa menentukan apakah itu akurat atau relevan. Dalam rangka merespon suatu pernyataan, kita harus mengetahui pertanyaan yang membantu kejelasan bernalar seseorang, yaitu apakah elemen bernalarnya jelas, apakah tujuannya jelas, apakah dapat diberikan contoh dan dapatkah dibuat ilustrasinya.

### 2) Ketepatan (*accuracy*)

Ketepatan merupakan elemen bernalar yang bebas dari kesalahan dan mengandung kebenaran. Pertanyaan yang dapat membantu mengetahui ketepatan bernalar seseorang, yaitu apakah elemen bernalar benar, bagaimana mengecek kebenaran elemen bernalarnya dan bagaimana dapat mengetahui bahwa elemen bernalar tersebut benar.

### 3) Ketelitian (*precision*)

Ketelitian merupakan elemen bernalar menjelaskan sesuatu sesuai dengan tepat. Pertanyaan yang dapat membantu mengetahui ketelitian bernalar seseorang, yaitu apakah elemen bernalar tersebut memiliki

---

<sup>85</sup> Siti Rahmatillah dkk. *Tingkat Kemampuan Berpikir Kritis Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Barisan Dan Deret Aritmatika Di Sman 5 Jember*. Dalam Jurnal Pendidikan : Kadikma, Vol. 8, No. 2, hal. 51-60, Agustus 2017. Hal 52

<sup>86</sup> Paul and Elder, *The Miniature Guide to Critical Thinking* ....., hal. 10-11

ketelitian, dapatkah dijelaskan dengan rinci dan dapatkah penalaran yang dibuat lebih spesifik.

4) Relevansi (*relevance*)

Relevansi berhubungan dengan pokok masalah yang dihadapinya. Pertanyaan yang dapat membantu mengetahui relevansi seseorang, yaitu apakah elemen bernalar tersebut relevan, bagaimana elemen bernalar tersebut berhubungan dengan pertanyaan, apakah elemen bernalar tersebut mengandung pokok-pokok masalah dan bagaimana elemen bernalar tersebut membantu mengatasi pokok permasalahan.

5) Kedalaman (*depth*)

Pertanyaan yang dapat membantu mengetahui kedalaman dalam bernalar seseorang, yaitu apakah elemen bernalar cukup dalam atau sangat dangkal, bagaimana menjawab kekompleksan pertanyaan, apakah dapat dicari sejumlah masalah dari suatu pertanyaan dan faktor-faktor apa yang membuat bernalar menjadi sukar.

6) Keluasan (*breadth*)

Keluasan adalah elemen bernalar mengandung sudut pandang. Pertanyaan yang dapat membantu mengetahui keluasan bernalar seseorang, yaitu apakah perlu dicari/ diduga sudut pandang yang lain, apakah terdapat cara lain untuk melihat pertanyaan, apakah bernalar ini seperti terlihat sebagai sudut pandang yang konservatif, bagaimana melihat bernalar dari sudut pandang yang lain dan apakah elemen berpikir cukup luas ataukah perlu dicari data yang lebih luas lagi.

### 7) Logis (*logic*)

Kombinasi berpikir yang mendukung satu sama lainnya dan membuat pengertian dalam kombinasi maka berpikir menjadi logis. Ketika kombinasi tidak mendukung antara satu dengan yang lainnya (terdapat kontradiksi) atau tidak dapat membuat suatu pengertian maka kombinasi berpikir tersebut tidaklah logis. Pertanyaan yang membantu mengetahui kelogisan bernalar, yaitu apakah elemen bernalar tersebut membuat suatu pengertian, apakah ada dampak dari apa yang disampaikan dan bagaimana dampaknya.

### c. Karakter Intelektual Bernalar

Pemikir yang baik akan berusaha terbuka sehingga mereka akan mengembangkan karakter intelektual bernalar seperti berikut.<sup>87</sup>

#### 1) Kerendahan Hati Intelektual (*intellectual humility*)

Kerendahan hati intelektual yang dimaksud adalah pengetahuan tentang hal yang tidak diketahui, sensitivitas terhadap apa yang telah diketahui dan apa yang tidak diketahui. Menyadari dari keterbatasan seseorang. Kerendahan hati intelektual bergantung pada penghargaan bahwa seseorang tidak dapat menuntut pada apa yang benar-benar diketahui oleh seseorang. Hal ini berdampak pada kurangnya kesombongan dari orang yang intelektual.

---

<sup>87</sup> Paul and Elder, *The Miniature Guide to Critical Thinking* ....., hal. 16-17

2) Keberanian Intelektual (*intellectual courage*)

Keberanian intelektual yang dimaksud adalah kecenderungan untuk menanyakan sesuatu kepercayaan yang dirasakan benar. Keberanian ini berhubungan dengan pengakuan bahwa ide mempertimbangkan bahaya atau kemustahilan yang terkadang dibenarkan secara rasional dan kesimpulan serta kepercayaan ditanamkan pada kita terkadang salah atau menyesatkan. Keberanian intelektual diperlukan karena dapat terjadi kebenaran yang dianggap berbahaya atau mustahil dan menyimpang, atau kesalahan dari beberapa ide yang dipegang teguh oleh kelompok sosial.

3) Empati Intelektual (*intellectual empathy*)

Empati intelektual yang dimaksud adalah kesadaran akan kebutuhan untuk mempunyai pandangan-pandangan yang berbeda dengan pandangan yang dimiliki seseorang. Menyadari kebutuhan imajinatif menempatkan seseorang pada pikiran orang lain untuk memahami pikiran orang lain tersebut dengan sungguh-sungguh. Karakter ini berhubungan dengan kemampuan merekonstruksi sudut pandang dan bernalar orang lain dengan tepat.

4) Integritas Intelektual (*intellectual integrity*)

Pengakuan kebutuhan kebenaran pikiran seseorang, konsisten dengan standar intelektual yang diterapkan, menerapkan apa yang dianjurkan orang lain, serta jujur mengakui ketidaksesuaian dan ketidakkonsistenan pikiran dan tindakannya sendiri.

5) Ketekunan Intelektual (*intellektual perseverance*)

Kecenderungan untuk terus bekerja dengan cara yang dipilih meskipun muncul suatu perasaan frustrasi dalam mengerjakannya. Menyadari kebutuhan menggunakan pengertian mendalam intelektual dan kebenaran meskipun sukar,. Pengertian kebutuhan berjuang dengan pertanyaan yang membingungkan dan tidak tentu selama beberapa lama untuk mendapatkan pemahaman atau pengertian yang lebih mendalam.

6) Percaya Diri dengan Penalarannya (*faith in reason*)

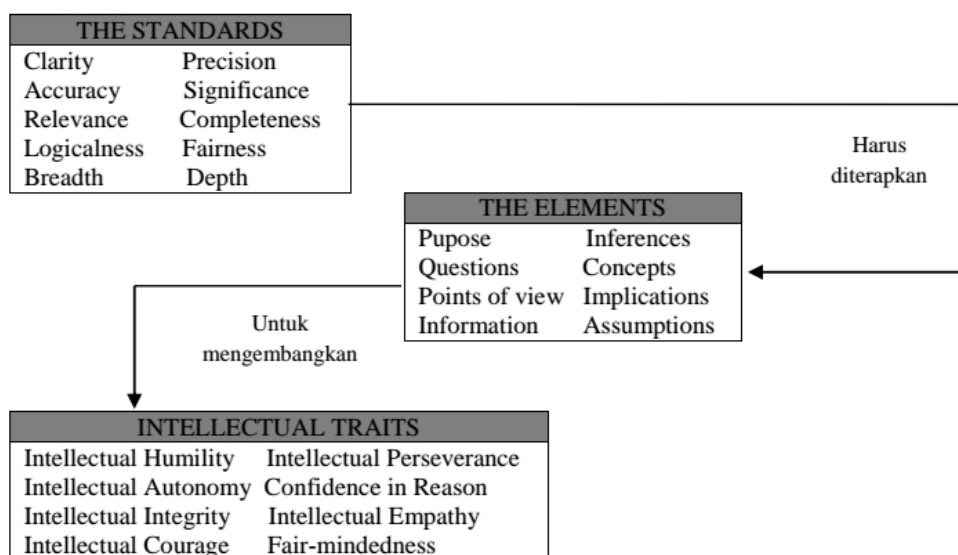
Kepercayaan bahwa minat tinggi seseorang dapat dilayani dengan cara mendorong orang untuk membuat kesimpulannya sendiri dengan mengembangkan kecakapan rasionalnya, menggambarkan kesimpulan yang bernalar, mengajak orang lain dengan penalaran dan menjadi pribadi yang bernalar, meskipun terdapat halangan mendalam pada karakter asli pikiran manusia dan masyarakat.

7) Berpikir Terbuka (*faith-mindedness*)

Menyadari kebutuhan membahas beragam sudut pandang tanpa referensi dari perasaan orang lain atau minat pribadi, atau perasaan atau minat pribadi orang lain, komunitas atau bangsa, mengakibatkan ketaatan terhadap standar intelektual tanpa referensi terhadap manfaat seseorang atau manfaat sekelompok orang. Dari ketiga komponen berpikir kritis menurut Paul dan Elder, dapat kita pelajari bahwasanya melatih berpikir kritis kepada peserta didik itu tidaklah mudah, karena berpikir kritis

seseorang tidak serta merta dapat langsung diketahui hasilnya. Di mana untuk mengembangkan kemampuan berpikir kritis peserta didik harus melalui berbagai proses yang dapat dilihat hubungannya dari standar intelektual bernalar, elemen bernalar dan karakter intelektual bernalar.

Berikut akan ditunjukkan skema hubungan antara ketiga komponen berpikir kritis tersebut.<sup>88</sup>



(adaptasi dari Paul & Elder)

**Gambar 2.3** Skema hubungan standar intelektual bernalar, elemen bernalar dan karakter intelektual bernalar

Namun, pada dasarnya untuk kemampuan berpikir kritis Paul dan Elder membaginya menjadi 6 tingkatan, yaitu (1) berpikir yang tidak direfleksikan (*unreflective thinking*), (2) berpikir yang menantang (*challenged thinking*), (3) berpikir permulaan (*beginning thinking*), (4) berpikir latihan (*practicing thinking*), (5) berpikir lanjut (*advanced*

<sup>88</sup> Anita. W, *Analisis Kemampuan Berpikir Kritis Siswa dalam Pemecahan Masalah Matematika pada Materi Fungsi di Kelas XI IPA MA Al-Muslihun Kanigoro Blitar Semester Genap Tahun Ajaran 2012/2013*, (Tulungagung: Skripsi Tidak Diterbitkan, 2013), hal. 42

*thinking*), dan (6) berpikir yang unggul (*master thinking*). Di mana jika sesuai dengan tingkatan berpikir kritis Paul dan Elder, maka perkembangan berpikir seseorang itu merupakan suatu proses yang bertahap dan menempatkan seseorang pada tingkatan tertentu serta membutuhkan waktu yang lama (bertahun-tahun).<sup>89</sup> Oleh karena itu, analisis kemampuan berpikir kritis dalam penelitian ini tidak menggunakan tingkat kemampuan berpikir kritis Paul dan Elder melainkan hanya menggunakan elemen bernalar dan standar intelektual bernalar dari Model berpikir kritis Paul dan Elder.

#### 4. Berpikir Kritis dalam Matematika

Berpikir matematis adalah aktivitas mental yang melibatkan suatu abstraksi dan generalisasi ide-ide matematis.<sup>90</sup> Di mana matematika merupakan pelajaran yang memang membutuhkan penalaran lebih, sehingga berpikir tingkat tinggi dalam matematika sangatlah dianjurkan dan digunakan. Hal ini sesuai dengan tujuan pembelajaran matematika sekolah, yaitu agar peserta didik memiliki kemampuan matematis sebagai berikut:<sup>91</sup>

---

<sup>89</sup> Paul & Elder dalam Ary Woro Kurniasih, *Penjenjangan Kemampuan Berpikir Kritis dan Identifikasi Tahap Berpikir Kritis Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika FMIPA UNNESA dalam Menyelesaikan Masalah Matematika*, (Malang: Skripsi Tidak Diterbitkan, 2010), hal. 41-42

<sup>90</sup> Wood, Williams, & McNeal, *Childern's Mathematical Thinking in Different Clasroom Cultures* dalam *Journal for Research in Mathematis Education*. Vol.37 (3): 222-255. 2006. (Online) in <http://www.jstor.org/stable/30035059>. diakses 23 November 2018

<sup>91</sup> Sri Wardhani, *Analisis Si dan SKL Mata Pelajaran Matematika SMP/MTs untuk Optimalisasi Tujuan Mata Pelajaran Matematika* dalam Paket Fasilitas Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika, (Yogyakarta: Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidikan dan Tenaga Kependidikan Matematika, 2008), hal. 2

- a. Memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep, dan mengaplikasikannya secara luwes, akurat, efisien dan tepat dalam pemecahan masalah.
- b. Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti atau menjelaskan gagasan-gagasan dan pernyataan-pernyataan matematika.
- c. Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperolehnya.
- d. Mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah.
- e. Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan nyata, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah.

Agar terpenuhi tujuan dari pembelajaran matematika di sekolah, maka perlu memberikan suatu pengajaran berpikir tingkat tinggi kepada peserta didik. Berpikir tingkat tinggi yang sangat diperlukan dalam pembelajaran matematika adalah berpikir kritis. Karena berpikir kritis merupakan suatu pemikiran yang ideal dengan tujuan untuk bisa memberikan pemahaman yang mendalam kepada peserta didik. Bahkan dengan berpikir kritis pelajaran matematika dapat dipahami hingga ke dalam akar-akarnya. Selain itu, siswa dalam melakukan suatu hal akan



lebih terarah dan menjadi kebiasaan yang baik guna memahami konsep matematika, memecahkan masalah, mengambil kesimpulan dan mengevaluasinya hasil pemikiran secara matang.

Berpikir kritis dalam matematika akan muncul jika peserta didik memiliki keinginan untuk menemukan jawaban dan mencapai suatu pemahaman. Pemikir yang kritis akan meneliti proses berpikir mereka sendiri dan proses berpikir orang lain untuk mengetahui apakah proses berpikir yang mereka lakukan masuk akal atau tidak masuk akal.<sup>92</sup>

Karena itu, berpikir kritis dalam matematika akan menjadikan peserta didik mampu mengorganisasi dan menggabungkan berpikir matematis melalui komunikasi, mengkomunikasikan berpikir matematisnya secara *koheren* dan jelas kepada peserta didik lainnya, menganalisis dan mengevaluasi berpikir matematis dan strategi, menggunakan bahasa matematika untuk mengekspresikan ide-ide matematis dengan tepat.<sup>93</sup>

## 5. Tahap Berpikir Kritis dalam Matematika

Berpikir kritis dapat terjadi melalui suatu tahapan-tahapan berpikir. Sesuai dengan kalimat tersebut Perkins & Murphy membagi tahap berpikir kritis dalam matematika menjadi 4 tahap sebagai berikut:<sup>94</sup>

---

<sup>92</sup> Elaine B. Johnson, *Contextual Teaching & Learning*, (Bandung: MLC, 2007), hal. 187

<sup>93</sup> Ary Woro Kurniasih, *Penjajangan Kemampuan Berpikir Kritis.....*, hal. 47

<sup>94</sup> Perkins dan Murphy dalam Ary Woro Kurniasih, *Penjajangan Kemampuan Berpikir Kritis .....*, hal. 56-57

a. Tahap klarifikasi (*clarification*)

Tahap ini merupakan tahap menyatakan, mengklarifikasi, menggambarkan (bukan menjelaskan) atau mendefinisikan suatu masalah. Aktivitas yang dilakukan adalah menyatakan masalah, menganalisis pengertian dari masalah, mengidentifikasi sejumlah asumsi yang mendasari, mengidentifikasi hubungan di antara pernyataan atau asumsi, mendefinisikan atau mengkritisi suatu definisi pola-pola yang relevan.

b. Tahap asesmen (*assessment*)

Tahap ini merupakan tahap menilai aspek-aspek seperti membuat keputusan pada suatu situasi, mengemukakan fakta-fakta argumen atau menghubungkan masalah dengan masalah yang lain. Pada tahap ini digunakan beragam fakta yang mendukung atau yang menyangkal. Aktivitas yang dilakukan adalah menyediakan atau bertanya apakah penalaran yang dilakukannya valid, penalaran yang dilakukan relevan, menentukan kriteria penilaian seperti kredibilitas sumber, membuat penilaian keputusan berdasarkan kriteria penilaian atau situasi atau topik, memberikan fakta bagi pilihan kriteria penilaian.

c. Tahap penyimpulan (*inference*)

Tahap ini menunjukkan hubungan antara sejumlah ide, menggambarkan kesimpulan yang tepat, menggeneralisasi, menjelaskan (bukan menggambarkan) dan membuat suatu

hipotesis. Aktivitas yang dilakukan antara lain membuat kesimpulan yang tepat dan membuat generalisasinya.

d. Tahap strategi/ taktik (*strategy/ tactic*)

Tahap ini merupakan tahap mengajukan, mengevaluasi sejumlah tindakan, menggambarkan tindakan yang mungkin, mengevaluasi tindakan dan memprediksi hasil tindakan.

Tahap berpikir kritis yang disampaikan oleh Perkins & Murphy di atas (klarifikasi, assesmen, penyimpulan, dan strategi/ taktik), pada dasarnya sama dengan yang disampaikan oleh Ennis (klarifikasi sederhana, mendukung kemampuan dasar, penyimpulan, klarifikasi lanjut, dan strategi/ taktik). Hanya saja tahap klarifikasi Ennis dipecah menjadi 2 yaitu klarifikasi sederhana dan klarifikasi lanjut, sedangkan Perkins dan Murphy menggabungkan kedua klarifikasi pada Ennis tersebut menjadi satu yaitu klarifikasi saja.

Dalam penelitian ini, untuk menganalisis tingkat kemampuan berpikir kritis siswa dalam pemecahan masalah matematika menggunakan Model Berpikir Kritis Paul dan Elder, yaitu elemen bernalar dan standar intelektual bernalar saja. Dalam hal ini karakter intelektual bernalar tidak digunakan karena karakter tidak bisa diteliti dengan mudah dan memerlukan waktu yang lama minimal 1 semester.

Pada indikator elemen bernalar dari Paul & Elder yang digunakan pada penelitian ini hanya menggunakan 4 indikator saja, yaitu Informasi, Konsep dan Ide, Penyimpulan dan Sudut Pandang. Hal jini dikarenakan

peneliti menilai bahwa dalam analisis berpikir kritis model Paul & Elder cukup dengan menggunakan 4 indikator tersebut. Hal ini sesuai dengan penelitian terdahulu dari Anita W. di dalam skripsinya dan juga penelitian dari Ary Woro Kurniasih dalam tesisnya.

Tingkat kemampuan berpikir kritis disingkat menjadi TKBK dalam penelitian ini disusun secara diskrit yaitu 0, 1, 2, 3, dan 4. Berikut akan diuraikan pada tabel 2.2

**Tabel 2.3** Tingkat Kemampuan Berpikir Kritis (TKBK)

<b>TKBK</b>	<b>Karakteristik TKBK</b>
TKBK 4 (sangat kritis)	<p>Pada tingkat ini, peserta didik mampu menyelesaikan masalah.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan informasi berupa data dan fakta yang jelas, tepat, teliti dan relevan.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan pada konsep dan ide berupa definisi, konsep, teorema, prinsip dan prosedur yang jelas, tepat, relevan dan dalam.</p> <p>Peserta didik dalam penyimpulan jelas dan logis.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan sudut pandang yang jelas dan luas (beragam alternatif penyelesaian).</p>
TKBK 3 (kritis)	<p>Pada tingkat ini, peserta didik mampu menyelesaikan masalah.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan informasi berupa data dan fakta yang jelas, tepat, teliti dan relevan.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan pada konsep dan ide berupa definisi, konsep, teorema, prinsip dan prosedur yang jelas, tepat, relevan dan dalam.</p> <p>Peserta didik dalam penyimpulan jelas dan logis.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan sudut pandang yang jelas tetapi terbatas (penyelesaian tunggal).</p>
TKBK 2 (cukup kritis)	<p>Pada tingkat ini, peserta didik belum mampu menyelesaikan masalah.</p>

	<p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan informasi berupa data dan fakta yang jelas, tepat, teliti dan relevan.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan pada konsep dan ide berupa definisi, konsep, teorema, prinsip dan prosedur yang jelas, tepat, relevan dan dalam.</p> <p>Peserta didik dalam penyimpulan tidak jelas dan kurang logis.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan sudut pandang yang jelas tetapi terbatas (penyelesaian tunggal).</p>
TKBK 1 (kurang kritis)	<p>Pada tingkat ini, peserta didik belum mampu menyelesaikan masalah.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan informasi berupa data dan fakta yang jelas, tidak tepat, tidak teliti dan tidak relevan.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan pada konsep dan ide berupa definisi, konsep, teorema, prinsip dan prosedur yang jelas, tidak tepat, tidak relevan dan tidak dalam.</p> <p>Peserta didik dalam penyimpulan tidak jelas dan kurang logis.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan sudut pandang yang tidak jelas dan terbatas (penyelesaian tunggal).</p>
TKBK 0 (tidak kritis)	<p>Pada tingkat ini, peserta didik belum mampu menyelesaikan masalah.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan informasi berupa data dan fakta yang tidak jelas, tidak tepat, tidak teliti dan tidak relevan.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan pada konsep dan ide berupa definisi, konsep, teorema, prinsip dan prosedur yang tidak jelas, tidak relevan dan tidak dalam.</p> <p>Peserta didik dalam penyimpulan tidak jelas dan tidak logis.</p> <p>Peserta didik dalam mengidentifikasi dan menyelesaikan masalah berdasarkan sudut pandang yang tidak jelas dan terbatas (penyelesaian tunggal).</p>

(adaptasi dari Paul & Elder)

Untuk memperjelas pemahaman mengenai tabel TKBK di atas, berikut akan diberikan tabel rincian dari penilaian komponen elemen bernalar dan standar intelektual bernalar dalam TKBK.<sup>95</sup>

**Tabel 2.4** Rincian Penilaian Komponen Elemen Bernalar dan Standar Intelektual Bernalar dalam TKBK

Elemen Bernalar	SIB	TKBK 4	TKBK 3	TKBK 2	TKBK 1	TKBK 0
Informasi	Jelas	√	√	√	√	-
	Tepat	√	√	√	-	-
	Teliti	√	√	√	-	-
	Relevan	√	√	√	-	-
Konsep dan ide	Jelas	√	√	√	√	-
	Tepat	√	√	√	-	-
	Relevan	√	√	√	-	-
	Dalam	√	√	√	-	-
Penyimpulan	Jelas	√	√	-	-	-
	Logis	√	√	Kurang	Kurang	-
Sudut pandang	Jelas	√	√	√	-	-
	Luas	√	Terbatas	Terbatas	Terbatas	-

(adaptasi Paul & Elder oleh Ary Woro Kurniasih)

SIB : Standar Intelektual Bernalar

TKBK : Tingkat Kemampuan Berpikir Kritis

Berdasarkan *tabel* tersebut, peserta didik dikelompokkan ke dalam masing-masing tingkat sesuai dengan karakteristik yang telah disusun. Namun menurut Kurniasih dari hasil penelitian yang dilakukan, tidak ada satu pun peserta didik yang menempati atau mendekati tingkat kemampuan berpikir kritis (TKBK) 4. Tapi terdapat peserta didik yang memiliki kriteria mendekati kriteria TKBK 3, 2, 1 dan 0. Berdasarkan kenyataan yang ada, tabel penilaian komponen elemen bernalar dan

<sup>95</sup> Siti Rahmatillah dkk. *Tingkat Kemampuan Berpikir Kritis Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Barisan Dan Deret Aritmatika Di Sman 5 Jember*. Dalam Jurnal Pendidikan : Kadikma, Vol. 8, No. 2, hal. 51-60, Agustus 2017. Hal 53

standar intelektual bernalar dalam TKBK direvisi (perbaiki) sesuai dengan kenyataan. Adapun perbaikannya adalah sebagai berikut.

**Tabel 2.5** *Revisi* Penilaian Komponen Elemen Bernalar dan Standar Intelektual Bernalar dalam TKBK

<b>Elemen Bernalar</b>	<b>SIB</b>	<b>TKBK 3</b>	<b>TKBK 2</b>	<b>TKBK 1</b>	<b>TKBK 0</b>
Informasi	Jelas	√	√	√	-
	Tepat	√	√	√	-
	Teliti	√	√	√	-
	Relevan	√	√	√	-
Konsep dan ide	Jelas	√	√	√	-
	Tepat	√	√	-	-
	Relevan	√	√	-	-
	Dalam	-	-	-	-
Penyimpulan	Jelas	√	-	-	-
	Logis	√	-	-	-
Sudut pandang	Jelas	√	-	-	-
	Luas	Terbatas	Terbatas	Terbatas	Terbatas

(adaptasi Paul & Elder oleh Ary Woro Kurniasih)

SIB : Standar Intelektual Bernalar

TKBK : Tingkat Kemampuan Berpikir Kritis

Sehingga dalam penelitian ini, peneliti menggunakan acuan penelitian terdahulu dengan mengikuti jejak Ary Woro Kurniasih yang menggunakan 4 Tingkat Kemampuan Berpikir Kritis (TKBK), yaitu TKBK 3 (kritis), TKBK 2 (cukup kritis), TKBK 1 (kurang kritis) dan TKBK 0 (tidak kritis). Karena peneliti juga menyadari bahwasanya setiap manusia tidak ada yang bisa sangat sempurna, sedangkan TKBK 4 (sangat kritis) memerlukan kesempurnaan yang luar biasa dan hanya diperuntukkan kepada orang yang benar-benar mampu memenuhinya, atau dalam arti lain keluasan pengetahuan yang tak terbatas.

### C. Pemecahan Masalah Dalam Matematika

Kita sering mengenal Pemecahan masalah dengan sebutan *problem solving*. *Problem solving* berasal dari bahasa Inggris yang terdiri dari kata *problem* artinya masalah, soal, atau persoalan dan *solve* artinya pemecahan masalah. Masalah merupakan sesuatu yang harus diselesaikan (dipecahkan).<sup>96</sup> Masalah bagi seseorang itu bersifat pribadi/ individu. Masalah dapat diartikan suatu situasi atau pertanyaan yang dihadapi seorang individu atau kelompok ketika mereka tidak mempunyai aturan, algoritma/ prosedur tertentu atau hukum yang segera dapat digunakan untuk menentukan jawabannya atau menyelesaikannya.<sup>97</sup> Dengan demikian ciri-ciri suatu masalah adalah: (1) individu menyadari/ mengenali suatu situasi (pertanyaan-pertanyaan) yang dihadapi, atau dengan kata lain individu tersebut mempunyai pengetahuan prasyarat, (2) individu menyadari bahwa situasi tersebut memerlukan tindakan atau aksi, dengan kata lain menantang untuk diselesaikan, (3) langkah pemecahan suatu masalah tidak harus jelas atau mudah ditangkap orang lain, dengan kata lain individu tersebut sudah mengetahui bagaimana menyelesaikan masalah itu meskipun belum jelas bagaimana caranya.

Sedangkan pemecahan masalah, menurut Polya adalah suatu usaha mencari jalan keluar dari satu kesulitan guna mencapai satu tujuan yang tidak

---

<sup>96</sup> Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, *Kamus Besar Bahasa Indonesia cet. Ke-3*, (Jakarta: Balai pustaka, 1990), hal. 562

<sup>97</sup> Tatag yuli Eko Siswono, *Model Pembelajaran Matematika Berbasis Masalah untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kreatif*, (Surabaya: Unesa University Press, 2008), hal. 34



begitu mudah untuk dicapai dengan segera.<sup>98</sup> Selain itu, Tatag juga mengartikan pemecahan masalah sebagai suatu proses atau upaya individu untuk merespon atau mengatasi halangan atau kendala ketika suatu jawaban atau metode jawaban penyelesaian masalah tersebut belum tampak jelas.<sup>99</sup> Sehingga dalam pembelajaran matematika, pemecahan masalah mempunyai interpretasi sebagai penyelesaian soal-soal cerita yang tidak rutin dan mengaplikasikan matematika dalam kehidupan sehari-hari.

Adapun alasan pentingnya pemecahan masalah dalam matematika adalah sebagai berikut: (1) dapat mengembangkan keterampilan kognitif secara umum, (2) untuk mendorong kreativitas peserta didik, (3) bagian dari proses aplikasi matematika sendiri, dan (4) dapat memotivasi peserta didik untuk kompeten belajar matematika.<sup>100</sup> Dalam memecahkan masalah diperlukan keterampilan-keterampilan yang harus dimiliki, antara lain: (1) keterampilan empiris yang terdiri dari perhitungan dan pengukuran, (2) keterampilan aplikatif untuk menghadapi situasi yang umum (sering terjadi), serta (3) keterampilan berpikir untuk bekerja pada suatu situasi yang tidak biasa (*unfamiliar*).

Adapun langkah-langkah dalam pemecahan masalah yang dikemukakan oleh Polya adalah sebagai berikut: (1) memahami masalah, (2) membuat rencana penyelesaian, (3) menyelesaikan masalah, dan (4)

---

<sup>98</sup> *Teori Pemecahan Masalah Polya Dalam Pembelajaran Matematika* dalam <http://blacksweetchocolate.blogspot.com/2012/06/teori-pemecahan-masalah-polya-dalam.html>. diakses 22 November 2018

<sup>99</sup> Tatag yuli Eko Siswono, *Model Pembelajaran Matematika.....*, hal. 35

<sup>100</sup> *Ibid.*, hal. 39

memeriksa kembali.<sup>101</sup> Selain itu, langkah lain juga dikembangkan oleh Krulik & Rudnick yang terdiri dari: (1) membaca dan berpikir (*read and think*), (2) mengeksplorasi dan merencanakan (*explore and pland*), (3) menyeleksi suatu strategi (*select a strategy*), (4) mencari suatu jawaban (*find a answer*), serta (5) merefleksi dan memperluas (*reflect and extend*).<sup>102</sup> Bahkan Artzt & Yaloz-Femia juga mengembangkan langkah-langkah dalam proses menyelesaikan masalah sebagai berikut: (1) membaca (*read*), (2) memahami (*understandi*), (3) merencanakan (*plan*), (4) mengimplementasikan (*implement*), (5) memverifikasi (*verify*), (6) memperhatikan (*watch*), dan (7) mendengarkan (*listen*).<sup>103</sup>

Dari penjelasan para ahli yang telah menerangkan bagaimana langka-langkah pemecahan masalah, menunjukkan bahwa dalam memecahkan masalah selalu memperhatikan otak manusia. Di mana otak kiri lebih fokus untuk menunjang aktivitas berpikir kritis dan otak kanan lebih fokus untuk menunjang aktivitas berpikir kreatif. Telah diketahui bahwa berpikir kritis dan kreatif memang dua hal yang tidak dapat dipisahkan.<sup>104</sup> Namun, dalam penelitian ini kiranya harus memisahkan antara keduanya guna menemukan tujuan dari pembahasan utama. Oleh karena itu, pemecahan masalah dapat menjadi pendekatan untuk mengetahui tingkat kemampuan berpikir kritis peserta didik.

---

<sup>101</sup> G.Polya, *How to Solve It*, 2nd ed., Princeton University Press, 1957, ISBN 0 691-08097-6.

<sup>102</sup> Krulik & Rudnick dalam Tatag, *Model Pembelajaran Matematika.....*, hal. 37

<sup>103</sup> A.F. Artzt & Yaloz Femia, *Mathematical Reasoning during Small-Group Problem Solving pdf*, hal. 2

<sup>104</sup> Elaine B.Johnson, *Contextual Teaching & Learning*, (Bandung: MLC, 2007), hal. 184

## D. MATRIKS

### 1) Pengantar Matriks

Dalam banyak situasi, sering kita temui penyajian data secara sistematis dalam bentuk persegi panjang, biasanya mengenai hal yang berhubungan dengan kegiatan sehari-hari, misalkan tentang daftar menu makanan, klasemen liga Italia, dan sebagainya.

Perhatikan ilustrasi berikut.

Menurut catatan buku harian koperasi siswa sebuah sekolah di Jakarta, kelas XII-1 membeli 8 buku Fisika, 22 buku Kimia, 30 buku Biologi, dan 18 buku Matematika. Kelas XII-8 membeli 35 buku Fisika, 18 buku Kimia, 20 buku Biologi, dan 10 buku Matematika. Sementara kelas XII-9 membeli 38 buku Fisika, 29 buku Kimia, 22 buku Biologi, dan 40 buku Matematika.

Semua catatan penjualan buku tersebut dapat disusun secara sistematis dalam suatu daftar seperti berikut:

Daftar Penjualan 4 Macam Buku Pelajaran

Kelas	Fisika	Kimia	Biologi	Matematika
XII-1	8	22	30	18
XII-8	35	18	20	10
XII-9	38	29	22	40

Penyusunan data seperti daftar di atas memberikan gambaran yang jelas mengenai komponen-komponennya. Apabila judul pada baris atas dan lajur kiri kita abaikan, maka didapatkan susunan angka-angka dalam bentuk

persegi panjang yang dibatasi oleh kurung (kurung biasa atau kurung siku) seperti berikut ini.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 22 & 30 & 18 \\ 35 & 18 & 20 & 10 \\ 38 & 29 & 22 & 40 \end{pmatrix}$$

↑ lajur ke-1   
 ↑ lajur ke-2   
 ↑ lajur ke-3   
 ↑ lajur ke-4

← Baris ke-2  
 ← Baris ke-3

Susunan angka-angka dalam bentuk persegi panjang menurut baris dan lajur (kolom) dalam tanda kurung seperti yang ditunjukkan di atas disebut **matriks**.<sup>105</sup> **Definisi:** Matriks ialah suatu kumpulan angka-angka (sering disebut elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjangnya dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris.<sup>106</sup>

Angka-angka seperti 8, 22, 30, ..., 40 dalam matriks A disebut unsur-unsur atau anggota-anggota matriks A. Anggota dalam baris ke- $i$  dan lajur ke- $j$  dinotasikan dengan lambang  $a_{ij}$ . Misalnya, dalam matriks A tersebut:

$a_{23}$  mewakili 20 yang merupakan anggota pada baris ke-2 dan lajur ke-3;

$a_{32}$  mewakili 29 yang merupakan anggota pada baris ke-3 dan lajur ke-2;

$a_{14}$  mewakili 18 yang merupakan anggota pada baris ke-1 dan lajur ke-4.

Untuk mewakili nama matriks, biasanya digunakan huruf kapital, misal A, seperti dalam contoh tersebut.

<sup>105</sup> B.K. Noormandiri, *Matematika SMA Kelas XII Program IPS*, Erlangga, Jakarta, 2007, hlm. 60

<sup>106</sup> J. Suprpto, *Pengantar Matrix Edisi Revisi*, Rineka Cipta, Jakarta, 1998, hlm. 3

Perlu diperhatikan bahwa susunan angka-angka dalam suatu matriks hanya bertujuan untuk menunjukkan susunan beberapa data atau angka dan bukan untuk memberi jumlah nilai bagi sekumpulan angka. Oleh karena itu, matriks tidak mempunyai nilai yang mewakili jumlah angka-angka anggotanya.<sup>107</sup>

## 2) Ordo Suatu Matriks

Perhatikan matriks A berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 22 & 30 & 18 \\ 35 & 18 & 20 & 10 \\ 38 & 29 & 22 & 40 \end{pmatrix}$$

Matriks A di atas mempunyai 3 baris dan 4 lajur dan biasanya dinyatakan dengan  $3 \times 4$ . Banyak baris dan lajur suatu matriks disebut **ordo**. Jumlah ordo matriks  $A = 3 \times 4$  dan banyak anggota matriks A adalah  $n(A) = 3 \times 4 = 12$  anggota.

Matriks ordo  $m \times n$  mempunyai  $m \times n$  anggota yang disusun dalam  $m$  baris dan  $n$  lajur. Matriks ordo  $m \times n$  secara umum ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \\ \\ \\ \\ \downarrow \\ \end{array} \begin{array}{l} m \text{ baris} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} n \text{ lajur} \end{array}$$

108

## 3) Matriks-Matriks Khusus

<sup>107</sup> B.K. Noormandiri, *Matematika SMA Kelas XII Program IPS*, Erlangga, Jakarta, 2007, hlm. 60-61

<sup>108</sup> B.K. Noormandiri, *Matematika SMA Kelas XII Program IPS*, Erlangga, Jakarta, 2007, hlm. 61-62

### 1. Matriks Kolom

Secara umum, suatu matriks yang mempunyai ordo  $= m \times 1$ , dengan  $m > 1$ , disebut matriks kolom. Contoh:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

### 2. Matriks Baris

Suatu matriks yang hanya mempunyai 1 baris atau mempunyai ordo  $= 1 \times n$ , dengan  $n > 1$ , disebut matriks baris. Contoh:

$$A = (-7 \ 1), B = (5 \ 0 \ -2 \ 4)$$

### 3. Matriks Persegi

Matriks persegi ialah suatu matriks dimana banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom ( $m = n$ ). Contoh:

$$m = n = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{109}$$

### 4. Matriks Diagonal

Matriks diagonal ialah suatu matriks dimana semua elemen diluar diagonal pokok mempunyai nilai nol dan paling tidak satu elemen pada diagonal pokok  $\neq 0$ , biasanya diberi simbol D. Contoh:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{110}$$

---

<sup>109</sup> J. Suprpto, *Pengantar Matrix Edisi Revisi*, Rineka Cipta, Jakarta, 1998, hlm. 18

## 5. Matriks Nol

Matriks nol ialah suatu matriks yang semua anggotanya merupakan angka nol. Contoh:

$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 6. Matriks Identitas

Matriks identitas ialah suatu matriks persegi dengan anggota-anggota pada diagonal utam adalah 1 dan anggota-anggota lainnya adalah 0. Contoh:

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{111}$$

## 7. Matriks Transpos

Definisi:

Transpos suatu matriks  $A = (a_{ij})$  ialah suatu matriks baru yang mana elemen-elemennya diperoleh dari elemen-elemen matriks A dengan syarat bahwa baris-baris dan kolom-kolom matriks menjadi kolom-kolom dan baris-baris dari matriks yang baru ini, dengan perkataan lain baris ke- $i$  dari matriks A menjadi menjadi kolom ke- $i$  dari matriks baru. Transpos matriks A diberi simbol  $A^T$  (baca A transpos) dan ditulis  $A^T = (a_{ij}^T = a_{ij})$ . Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \text{ maka } A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

## 8. Kesamaan Dua Matriks

---

<sup>110</sup> *Ibid.*, hlm. 9

<sup>111</sup> B.K. Noormandiri, *Matematika SMA Kelas XII Program IPS*, Erlangga, Jakarta, 2007, hlm. 64

Secara umum dua buah matriks dikatakan sama jika memenuhi dua syarat, yaitu:

- a. Mempunyai ordo sama, dan
- b. Anggota-anggota yang seletak sama.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B dan anggota yang seletak sama, maka matriks  $A=B$ .<sup>112</sup>

#### 4) Penjumlahan Dan Pengurangan Matriks

##### 1. Penjumlahan Matriks

Tabel berikut ini menunjukkan nilai yang diperoleh Dina dan Dian untuk mata pelajaran Ekonomi, Bahasa Inggris dan Matematika dalam 2 kali ulangan.

Mata Pelajaran	Ulangan Ke- 1		Ulangan Ke- 2		Jumlah	
	Diana	Dian	Dina	Dian	Dina	Dian
Ekonomi	94	88	87	72	181	160
Bahasa Indonesia	90	92	79	82	169	174
Bahasa Inggris	80	83	81	94	161	177

<sup>112</sup> B.K. Noormandiri, Matematika SMA Kelas XII Program IPS, (Jakarta: Erlangga, 2007), hal 67



Matematika	72	70	90	88	162	158
------------	----	----	----	----	-----	-----

Informasi mengenai nilai ulangan seperti dalam tabel di atas, dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan matriks sebagai berikut.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{A} & \text{B} & \text{C} \\
 \begin{pmatrix} 94 & 88 \\ 90 & 92 \\ 80 & 83 \\ 72 & 70 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 87 & 72 \\ 79 & 82 \\ 81 & 94 \\ 90 & 88 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 181 & 160 \\ 169 & 174 \\ 161 & 177 \\ 162 & 158 \end{pmatrix} \\
 \text{Ulangan ke-1} & \text{Ulangan ke-2} & \text{Jumlah}
 \end{array}$$

Proses menjumlahkan matriks A dan B menjadi suatu matriks baru seperti contoh di atas dikenal sebagai **Penjumlahan matriks**. Perlu diketahui bahwa dua buah matriks A dan B dapat dijumlahkan jika  $\text{ordo A} = \text{ordo B}$ .

Misalnya:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix}$$

## 2. Pengurangan Matriks

Pengurangan dua matriks dapat dilakukan jika dan hanya jika kedua matriks mempunyai ordo yang sama. Misal Matriks

$$P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ dan } Q = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ maka } P - Q \text{ adalah}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}$$

## 5) Perkalian Matriks Dengan Skalar

Perkalian suatu matriks dengan suatu skalar ialah perkalian setiap unsur matriks dengan skalar tersebut.

Misalnya: (i) Jika matriks  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dan  $k$  ialah suatu skalar

$$\text{Maka } kA = k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

(ii) Jika diketahui matriks  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  maka:

- $A + A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$

Karena  $A + A = 2A$ , maka  $2A = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$

- Demikian juga  $3A = 3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$

Jika  $k$  adalah bilangan real, maka  $k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$

## F. Perkalian Matriks

### 1. Perkalian Matriks Baris dengan Matriks Kolom

Tabel-tabel berikut ini menunjukkan berat barang dan daftar harga barang yang dibeli oleh Ina dari sebuah toko.

Tabel Berat barang belanjaan.

	Beras	Gula	Tepung
Berat (kg)	8	3	5

Tabel Daftar harga

	Harga (Rp)/kg
Beras	2.500,00
Gula	2.000,00
Tepung	1.500,00

Jumlah uang yang dibayar oleh Ina dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

$$\text{Untuk beras} = \text{berat} \times \text{harga} = (8 \times \text{Rp}2.500,00) = \text{Rp}20.000,00$$

$$\text{Untuk gula} = \text{berat} \times \text{harga} = (3 \times \text{Rp}2.000,00) = \text{Rp}6.000,00$$

$$\text{Untuk tepung} = \text{berat} \times \text{harga} = (5 \times \text{Rp}1.500,00) = \text{Rp}7.500,00$$

Jadi, proses perhitungan di atas dapat pula dikerjakan dengan cara perkalian 2 matriks sebagai berikut :

- Tulis berat ke-3 barang dalam matriks baris;  $(8 \ 3 \ 5)$
- Tulis harga ke-3 barang dalam matriks kolom;  $\begin{pmatrix} 2.500 \\ 2.000 \\ 1.500 \end{pmatrix}$
- Kalikan matriks baris dengan matriks kolom;

$$\begin{aligned} & (8 \ 3 \ 5) \begin{pmatrix} 2.500 \\ 2.000 \\ 1.500 \end{pmatrix} \\ &= (8 \times 2.500 + 3 \times 2.000 + 5 \times 1.500) \\ &= 20.000 + 6.000 + 7.500 \\ &= 33.500 \end{aligned}$$

Contoh di atas menunjukkan bahwa perkalian matriks baris dengan matriks kolom merupakan korespondensi satu saja. Perkalian antara kedua matriks mungkin terjadi jika dan hanya jika banyak *kolom* pada matriks baris sama dengan banyak *baris* pada matriks lajur.

## 2. Perkalian Dua Matriks

Perhatikan daftar pembelian alat tulis Ani dan Budi di sebuah toko beserta daftar harga alat tulis berikut.

	Pensil	Harga
Ani	3	2
Budi	4	5

	Harga
Pensil	300
Buku	500

Dari kedua daftar tersebut kita dapat memperoleh daftar baru, yang merupakan jumlah uang belanja dari Ani dan Budi.

	Pengeluaran
Ani	1.900
Budi	3.700

Proses penjumlahan hasil kali yang diperoleh dari perkalian elemen-elemen pada matriks yang satu dengan elemen-elemen kolom pada matriks yang lain disebut *perkalian dua matriks*. Proses perkalian matriks tersebut dapat kita sajikan sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 300 + 2 \times 500 \\ 4 \times 300 + 5 \times 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.900 \\ 3.700 \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan perkalian di atas, suatu matriks mempunyai hasil kali *jika banyak lajur matriks kiri sama dengan banyak baris matriks kanan*.

Secara umum dapat dikatakan bahwa matriks A (matriks kiri) dan matriks B (matriks kanan) dapat dikalikan, jika matriks A berordo  $m \times n$  dan matriks B berordo  $n \times p$ . Hasil kali matriks  $A \times B$  adalah matriks berordo  $m \times p$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A & \times & B & = & C \\
 m \times n & & n \times p & & m \times p
 \end{array}$$

Berikut ini akan ditunjukkan proses perkalian dua matriks yang berordo  $2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a \times p) + (b \times r) & (a \times q) + (b \times s) \\ (c \times p) + (d \times r) & (c \times q) + (d \times s) \end{bmatrix}.^{113}$$

Dari hasil perkalian dua matriks tersebut, terlihat bahwa hasil perkalian  $AB$  adalah matriks nol meskipun matriks  $A$  dan  $B$  masing-masing bukan matriks nol sedangkan hasil kali matriks  $BA$  bukan matriks nol. Contoh tersebut menunjukkan bahwa  $AB \neq BA$ , yang berarti *tidak berlaku sifat komutatif pada perkalian dua matriks*. Istilah yang digunakan dalam aljabar, matriks perkalian  $AB$  adalah *matriks  $B$  dikalikan dari kiri oleh matriks  $A$*  dan perkalian  $BA$  adalah *matriks  $B$  dikalikan dari kanan oleh matriks  $A$* .

### Matriks Satuan (Identitas)

Perhatikan contoh perkalian berikut ini.

Jika matriks  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  dan  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

maka

$$AI = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 0 & 0 + b \\ c + 0 & 0 + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 0 & b + 0 \\ 0 + c & 0 + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

---

<sup>113</sup> *Ibid.*, hal 75-77

Pada contoh tersebut ditunjukkan bahwa  $AI = IA$  dan hasil kalinya adalah matriks  $A$ . Demikian pula, jika sembarang matriks yang berordo  $2 \times 2$  dikalikan dengan matriks  $I_2$ , maka hasil kalinya adalah matriks itu sendiri. Matriks  $I_2$  tersebut dinamakan **matriks satuan** atau **matriks identitas perkalian** berordo  $2 \times 2$ .<sup>114</sup>

Sifat-sifat operasi perkalian matriks :

1. Perkalian matriks tidak komutatif, yaitu  $AB \neq BA$
2. Hukum asosiatif berlaku pada operasi matriks:  $(AB)C = A(BC)$
3. Hukum distributif berlaku pada operasi matriks:
  - (i)  $A(B + C) = AB + AC$  (hukum distributif kiri)
  - (ii)  $(B + C)A = BA + CA$  (hukum distributif kanan)
4. Perkalian matriks dengan matriks identitas  $I$  tidak mengubah matriks, yaitu
 
$$AI = IA = A$$
5. Perpangkatan matriks didefinisikan sebagai berikut:
 
$$A^0 = I, A^k = \underbrace{AAA \dots A}_{k \text{ kali}}$$
6.  $A$  adalah matriks ortogonal jika  $AA^T = A^T A = I$ .<sup>115</sup>

### Perpangkatan Matriks Persegi

Perpangkatan suatu matriks persegi merupakan perkalian matriks persegi terhadap dirinya sendiri sebanyak jumlah pangkatnya, ditulis sebagai berikut.

Jika  $k$  sebuah bilangan asli dan  $A$  matriks persegi berordo  $m \times m$ , maka:

---

<sup>114</sup> *Ibid.*, hal 78

<sup>115</sup> Rinaldi Munir, *Matematika Diskrit*, Informatika, Bandung, 2014, hlm. 102

$$A^k = A \cdot A \cdot \dots \cdot A \text{ (sebanyak } k \text{ faktor)}.^{116}$$

## G. Matriks Invers

### 1. Pengertian Matriks Invers

Kita mengetahui bahwa dalam perkalian bilangan real, yakni  $R \times 1 = 1 \times R = R$ , sehingga dikatakan bahwa 1 adalah elemen identitas perkalian.

Misalkan diketahui matriks  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dan  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  maka :

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$AI = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Oleh karena  $IA = AI = A$ , maka  $I$  disebut matriks identitas perkalian.

Apabila matriks  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ , maka

$$(i) \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$(ii) \quad BA = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Oleh karena  $AB = BA = I$ , dengan  $I$  merupakan matriks identitas perkalian, maka dapat dikatakan bahwa  $B$  adalah *matriks invers* bagi  $A$  atau sebaliknya,  $A$  adalah *matriks invers* bagi  $B$ .

Secara umum matriks invers bagi  $A$  diwakili oleh  $A^{-1}$ . Jadi, dalam contoh singkat di atas matriks  $B = A^{-1}$ , berarti  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ .

*Catatan* : Hanya matriks persegi yang mempunyai matriks invers.<sup>117</sup>

### 2. Rumus Determinan dan Invers Matriks

<sup>116</sup> Sukino..*Matematika Jilid 2A untuk SMA/MA Kelas XI semester I*, Erlangga,,Jakarta,2013, hlm. 67

<sup>117</sup> B.K. Noormandiri,*Matematika SMA Kelas XII Program IPS*, Erlangga,Jakarta,2007, hlm. 81

### Rumus Determinan Matriks Ordo $2 \times 2$

Jika  $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  adalah matriks persegi berordo  $2 \times 2$ , maka hasil kali 7 dengan 4 dikurangi dengan hasil kali 9 dengan 3 disebut determinan bagi matriks  $A$ , yang ditulis sebagai :

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 - 9 \times 3 = 1$$

Secara umum, jika

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ maka } |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

### Rumus Invers Matriks Ordo $2 \times 2$

Misalkan  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dan  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , dengan  $ad - bc \neq 0$ ,

maka:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \frac{1}{ad-bc} \\ &= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \frac{1}{ad-bc} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{0}{ad-bc} \\ \frac{0}{ad-bc} & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, jika  $ad - bc = 0$  maka  $\frac{1}{ad-bc}$  tidak didefinisikan. Oleh

karena  $AA^{-1} = I$ , maka :

Jika  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , dengan  $ad - bc \neq 0$ , maka matriks invers dari  $A$  adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

### Determinan Matriks Ordo $3 \times 3$



$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , untuk mencari det (A) dapat diselesaikan dengan dua

cara, yaitu:

a. Metode Sarrus

$$\text{Det } (A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

-   -   -   +   +   +

$$\text{Det } A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot$$

$$a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

b. Metode Ekspansi Kofaktor

Minor ( $M_{ij}$ ) suatu unsur adalah suatu determinan yang dihasilkan setelah terjadi penghapusan baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dimana unsur itu terletak.<sup>118</sup>

Contoh: Minor dari  $a_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

hapus kolom ke-2

hapus baris ke-2

Kofaktor dari elemen  $a_{ij}$  matriks A adalah  $A = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ .

<sup>118</sup> Buku k 13 hal 83

Contoh:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ , minor elemen  $a_{33}$  adalah  $|M_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} =$

$21 - 25 = -4$ . Kofaktor elemen  $a_{33}$  adalah

$$(-1)^{3+3}|M_{33}| = (-1)^6 \cdot -4 = -4. \text{<sup>119</sup>}$$

### Invers Matriks Ordo 3 x 3

Misalkan  $A_{ij}$  adalah kofaktor dari  $a_{ij}$ , maka adjoin A ditentukan oleh:

$$\text{Adjoin}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adjoin}(A). \text{<sup>120</sup>}$$

### H. Persamaan Matriks Berbentuk $AX = B$ dan $XA = B$

Untuk menyelesaikan persamaan matriks berbentuk  $AX = B$  dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$AX = B, \text{ kedua ruas dikalikan dari kiri dengan } A^{-1}$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Seperti pada langkah diatas, untuk persamaan  $XA = B$ , masing-masing ruas dikalikan dari kanan dengan  $A^{-1}$ , sehingga diperoleh

$$XA = B$$

<sup>119</sup> Maslen Sibarani, *Aljabar Linier*, (Jakarta:RajaGrafindo Persada, 2013), hal 84

<sup>120</sup> Buku k 13 hal 75-76

$$(XA)A^{-1} = BA^{-1}$$

$$X(AA^{-1}) = BA^{-1}$$

$$XI = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}.^{121}$$

## I. Menyelesaikan Masalah Yang Melibatkan Matriks

### 1. Menyatakan Sistem Persamaan Linier ke Persamaan Matriks

Kita telah pelajari bahwa jika matriks  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  dan  $L = (l)$ , dengan  $B =$  baris dan  $L =$  skalar, maka

$$BL = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} (l) = \begin{pmatrix} b_1 l \\ b_2 l \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Uraian singkat di atas, kita dapat menyatakan persamaan

$$\text{matriks } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 33 \end{pmatrix} \text{ kesistem persamaan linier, yaitu: } \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 4x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Dengan persamaan dua matriks, diperoleh:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 4x + 5y = 33 \end{cases}$$

Sebaliknya, dari sistem persamaan linier dapat dinyatakan ke bentuk persamaan matriks dengan langkah-langkah sebagai berikut:

#### **Langkah 1:**

$$\text{Nyatakan } 3x + 2y = 11 \text{ kebentuk matriks } \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix} \dots (1)$$

$$\text{Nyatakan } 4x + 5y = 33 \text{ kebentuk matriks } \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \end{pmatrix} \dots (2)$$

#### **Langkah 2:**

Gabungkan persamaan (1) dan (2) hingga menjadi persamaan matriks:

---

<sup>121</sup> *Ibid.*, hal 87

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Secara umum. Jika diketahui persamaan linier:

$$ax + by = p$$

$$cx + dy = q$$

Maka bentuk persamaan matriks dari persamaan tersebut adalah:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

## 2. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier dengan Menggunakan Matriks

Prinsip menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel dengan menggunakan matriks hampir sama dengan cara menyelesaikan persamaan matriks  $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ , hanya saja  $X$  dan  $B$  merupakan matriks berordo  $2 \times 2$

Misalnya diketahui system persamaan linier

$$ax + by = p$$

$$cx + dy = q$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan menggunakan matriks, langkah-langkahnya sebagai berikut

### **Langkah 1:**

Nyatakan sistem persamaan di atas ke persamaan matriks:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Matriks  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  disebut matriks koefisien variabel  $x$  dan  $y$  sedangkan  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

disebut matriks konstanta dari sistem persamaan linier.

**Langkah 2:**

Tentukan matriks invers dari  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Langkah 3:**

Kalikan dari kiri kedua ruas dengan matriks invers:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Seandainya  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$  maka  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$

Jadi,  $x = m$  dan  $y = n$  atau dapat dinyatakan dengan

$$H_p = \{(x,y)|(m,n)\}.$$
<sup>122</sup>

**E. Penelitian Terdahulu**

Penelitian yang berhubungan dengan analisis kemampuan berpikir kritis siswa dalam pemecahan masalah matematika, dilaporkan oleh peneliti sebagai berikut.

1. Penelitian Anita W. Dilaksanakan tahun 2013.<sup>123</sup> Penelitian ini mendeskripsikan kemampuan berpikir kritis dalam pemecahan masalah dengan subjek penelitiannya adalah siswa Kelas XI IPA MA Al-Muslihun Kanigoro Blitar Semester Genap Tahun Ajaran 2012/2013

<sup>122</sup> *Ibid.*, hal 88-90

<sup>123</sup> Anita W, "Analisis Kemampuan Berpikir Kritis Siswa dalam Pemecahan Masalah Matematika pada Materi Fungsi di Kelas XI IPA MA Al-Muslihun Kanigoro Blitar Semester Genap Tahun Ajaran 2012/2013". (Tulungagung:Skripsi Tidak Diterbitkan)\, 2013)

dengan materi Fungsi. Dari penelitian ini tingkat kemampuan berpikir kritis siswa Kelas XI IPA MA Al-Muslihun Kanigoro Blitar Semester Genap Tahun Ajaran 2012/2013 dalam menyelesaikan masalah matematika hanya sampai TKBK 3 (kritis) dan tidak sampai pada TKBK 4 (sangat kritis).

2. Penelitian Ary Woro Kurniasih dilaksanakan tahun 2010.<sup>124</sup> Penelitian ini mendeskripsikan jenjang kemampuan berpikir kritis dan identifikasi tahap berpikir kritis dengan subjek penelitiannya adalah mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika FMIPA Unnes dengan menggunakan materi konsep dan teorema turunan fungsi. Dari penelitian ini tingkat kemampuan berpikir kritis mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika FMIPA UNNES dalam menyelesaikan masalah matematika hanya sampai TKBK 3 (kritis) dan tidak sampai pada TKBK 4 (sangat kritis). Sehingga kesimpulan dari penelitian ini adalah TKBK mahasiswa hanya sampai tingkat kritis dan sebagian besar mahasiswa menunjukkan kemampuan berpikir kritis rendah. Meski penelitian ini hampir sama dengan penelitian yang akan dilaksanakan, namun pada dasarnya berbeda. Karena peneliti menggunakan subjek siswa sedangkan penelitian terdahulu dari Ary Woro Kurniasih menggunakan mahasiswa.

---

<sup>124</sup> Ary Woro Kurniasih, *Penjenjangan Kemampuan Berpikir Kritis dan Identifikasi Tahap Berpikir Kritis Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika FMIPA UNNES dalam Menyelesaikan Masalah Matematika*, (Malang: Tesis Tidak Diterbitkan, 2010)

3. Penelitian Faridhotus Sholihah dilaksanakan tahun 2015.<sup>125</sup> Penelitian ini mendeskripsikan kemampuan berpikir kritis dalam menyelesaikan masalah matematika dengan subjek penelitiannya adalah siswa Kelas X MIA 5 MAN 2 Tulungagung Semester Genap Tahun Ajaran 2014/2015 dengan materi Trigonometri. Dari penelitian ini diperoleh kesimpulan bahwasannya siswa dengan kemampuan tinggi berada pada TKBK 3 dimana ia mampu memenuhi ketuju indikator berpikir kritis serta mampu menyelesaikan masalah melalui 4 tahap pemecahan masalah. Siswa dengan kemampuan sedang berada pada TKBK 1 karena tidak semua indikator berpikir kritis dipenuhi dan hanya sampai pada menentukan rumus yang digunakan dengan tepat. Serta dalam pemecahan masalah yang dilakukan hanya sampai pada tahap merencanakan masalah. Siswa dengan kemampuan rendah berada pada TKBK 0 karena tidak semua indikator berpikir kritis dipenuhinya dan hanya sampai pada merumuskan pokok-pokok permasalahan yang ada dengan jelas.

Rangkuman penelitian terdahulu dalam bentuk tabel adalah sebagai berikut:

**Tabel 2.5** Penelitian Terkait Terdahulu

Nama Pengarang	Judul Penelitian	Tahun Terbit	Penelitian	
			Persamaan	Perbedaan
Anita W.	Analisis Kemampuan Berpikir Kritis Siswa dalam Pemecahan	2013	Penelitian ini sama-sama membahas tentang analisis	Perbedaan dalam penelitian ini terdapat pada subyek,

<sup>125</sup> Faridhotus S. Sholihah, Faridhotus. 2015. *Analisis Kemampuan Berpikir Kritis Siswa dalam Pemecahan Masalah Matematika pada Materi Trigonometri di Kelas X MIA 5 MAN 2 Tulungagung Semester Genap Tahun Ajaran 2014/2015*. (Tulungagung:Skripsi tidak diterbitkan.2015)

	Masalah Matematika pada Materi Fungsi di Kelas XI IPA MA Al-Muslihun Kanigoro Blitar Semester Genap Tahun Ajaran 2012/2013		kemampuan berpikir kritis matematis berdasarkan indikator berpikir kritis dari Paul&Elder, dan dengan menggunakan instrumen penelitian berupa tes soal dan pedoman wawancara.	dimana subyek yang akan digunakan adalah siswa kategori olimpiade matematika kelas XI SMA/MA Sederajat. Dan juga pada materi yang digunakan, yaitu peneliti menggunakan materi Matriks kelas XI.
Ary Woro Kurniasih	Penjenjangan Kemampuan Berpikir Kritis dan Identifikasi Tahap Berpikir Kritis Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika FMIPA UNNES dalam Menyelesaikan Masalah Matematika	2010	Penelitian ini sama-sama membahas tentang analisis kemampuan berpikir kritis matematis berdasarkan indikator berpikir kritis dari Paul&Elder.	Perbedaan dalam penelitian ini terdapat pada subyek, dimana subyek yang akan digunakan adalah siswa kategori olimpiade matematika kelas XI SMA/MA Sederajat. Sedangkan Ary Woro K. Menggunakan mahasiswa sebagai subyeknya. Dan penelitian merupakan penelitian skripsi sedangkan Ary Woro K.



				Merupakan penelitian Tesis.
Faridhotus Sholihah	Analisis Kemampuan Berpikir Kritis Siswa dalam Pemecahan Masalah Matematika pada Materi Trigonometri di Kelas X MIA 5 MAN 2 Tulungagung Semester Genap Tahun Ajaran 2014/2015	2015	Penelitian ini sama-sama membahas tentang analisis kemampuan berpikir kritis matematis	Perbedaan penelitian ini terdapat pada subyek dan materi yang digunakan. Dimana peneliti menggunakan subyek siswa kategori olimpiade matematika dengan materi matriks.

Dari penelitian-penelitian di atas dapat kita lihat berbagai macam cara yang digunakan untuk mengetahui tahap berpikir kritis siswa/ mahasiswa dalam pemecahan masalah. Dari hasil penelitian tersebut siswa mampu mencapai tahap 3, tetapi belum pada tahap 4. Oleh karena itu, peneliti membatasi penilaian tingkat berpikir kritis untuk siswa menengah atas pada level 3, dengan asumsi bahwa siswa tidak dapat mencapai level 4 (berdasarkan penelitian terdahulu).

#### **F. Paradigma Penelitian**

Untuk mengetahui kemampuan berpikir kritis matematis kategori siswa olimpiade matematika kelas XI-MIPA, peneliti menerapkan kurikulum berpikir kritis Paul & Elder. Menurutny terdapat empat indikator berpikir kritis, yaitu Tahap klarifikasi (*clarification*), Tahap asesmen (*assesment*), Tahap penyimpulan (*inference*), Tahap strategi/ taktik (*strategy/ tactic*). Pada

tiap indikator, memiliki kriteria masing-masing. Dengan mengacu pada empat indikator tersebut, peneliti dapat menentukan tingkat kemampuan berpikir kritis siswa.

Dalam penelitian ini, menggunakan acuan penelitian terdahulu dengan mengikuti jejak Ary Woro Kurniasih yang menggunakan 4 Tingkat Kemampuan Berpikir Kritis (TKBK), yaitu TKBK 3 (kritis), TKBK 2 (cukup kritis), TKBK 1 (kurang kritis) dan TKBK 0 (tidak kritis). Karena peneliti juga menyadari bahwasanya setiap manusia tidak ada yang bisa sangat sempurna, sedangkan TKBK 4 (sangat kritis) memerlukan kesempurnaan yang luar biasa dan hanya diperuntukkan kepada orang yang benar-benar mampu memenuhinya, atau dalam arti lain keluasan pengetahuan yang tak terbatas.

**Bagan 2.1 Paradigma Penelitian**