

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. HAKEKAT MATEMATIKA

Kata Matematika secara etimologi berasal dari Yunani “*mathein*” atau “*mathenein*” yang artinya mempelajari.¹ Ada pula yang mengatakan matematika berasal dari bahasa latin yaitu “*mathematike*” yang artinya *relating to learning* atau berkaitan dengan pengetahuan.² Perkataan ini mempunyai akar kata *mathema* yang berarti pengetahuan atau ilmu (*knowledge, science*).

Secara istilah, pengertian matematika banyak diberikan oleh para ahli dan para matematikawan yang sesuai dengan sudut pandangnya masing-masing, sehingga pemaknaanya sangat luas dan fleksibel. Sebagaimana menurut James & James dalam kamus matematikanya mengatakan bahwa matematika adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran, dan konsep-konsep yang berhubungan satu dengan yang lainnya dengan jumlah yang banyak yang terbagi ke dalam tiga bidang, yaitu aljabar, analisis dan geometri.³ Johnson dan Rising dalam bukunya mengatakan bahwa matematika adalah pola berpikir, pola mengorganisasikan, pembuktian yang logik, matematika itu adalah bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas, dan akurat, representasinya dengan simbol dan padat, lebih berupa bahasa simbol mengenai

¹ Andi Hakim Nasution, *Landasan Matematika*, (Jakarta : Bhratara Karya Aksara, 1982), hal. 12

² The Liang Gie, *Filsafat Matematika Bagian Kedua*, (Yogyakarta : Yayasan Studi Ilmu dan Teknologi, 1993), hal. 5

³ Erman Suherman et. al, *Strategi Pembelajaran Matematika...*, hal.16

ide daripada mengenai bunyi.⁴ Sementara Herman Hudojo dalam bukunya mengatakan bahwa matematika sebagai ilmu mengenai struktur dan hubungan-hubungannya, simbol-simbol diperlukan. Simbol-simbol itu penting untuk memanipulasi aturan-aturan dengan operasi yang ditetapkan. Simbolisasi menjamin adanya komunikasi dan mampu memberikan keterangan untuk membentuk suatu konsep baru. Konsep baru terbentuk karena adanya pemahaman terhadap konsep sebelumnya sehingga matematika itu konsep-konsepnya tersusun secara hirarkis. Simbolisasi itu barulah berarti bila suatu simbol itu dilandasi suatu ide. Jadi kita harus memahami ide yang terkandung dalam simbol tersebut. Dengan perkataan lain, ide harus dipahami terlebih dahulu sebelum ide tersebut disimbolkan.

Perbedaan-perbedaan pemberian definisi oleh para ahli di atas akan dapat membuka cakrawala pengetahuan kita tentang matematika, sehingga pengetahuan kita akan bertambah luas dengan tidak hanya memandang matematika dari satu segi saja. Tetapi secara singkat dapat dikatakan bahwa matematika berkenaan dengan ide/konsep-konsep abstrak yang tersusun secara hierarkis dan penalarannya deduktif.⁵ Sebagian besar konsep matematika memang bersifat abstrak apalagi jika sudah mencapai kasus yang lebih kompleks, keabstrakan itu semakin terasa.

Meski terdapat definisi yang berbeda tentang matematika, dapat terlihat adanya ciri-ciri khusus atau karakteristik yang dapat merangkum pengertian

⁴ Ibid., hal. 17

⁵ Herman Hudojo, *Mengajar Belajar ...*, hal. 3

matematika secara umum. Soedjadi memaparkan dalam buku beliau tentang beberapa karakteristik tersebut sebagai berikut:

1. Memiliki obyek kajian abstrak.
2. Bertumpu pada kesepakatan.
3. Berpola pikir deduktif.
4. Mempunyai simbol yang kosong dari arti.
5. Memperhatikan semesta pembicaraan.
6. Konsisten dalam sistemnya.⁶

Adapun penjabaran dari masing-masing item tersebut di atas adalah sebagai berikut:

a. Memiliki obyek kajian abstrak

Dalam matematika obyek dasar yang dipelajari adalah abstrak atau obyek mental. Obyek-obyek itu merupakan obyek pikiran. Obyek dasar ini meliputi fakta, konsep, operasi ataupun relasi dan prinsip. Dari obyek dasar inilah dapat disusun suatu pola dan struktur matematika.

b. Bertumpu pada kesepakatan

Dalam matematika kesepakatan merupakan tumpuan yang amat penting. Kesepakatan yang amat mendasar adalah aksioma dan konsep primitif. Aksioma diperlukan untuk menghindarkan berputar-putar dalam pembuktian. Sedangkan konsep primitif diperlukan untuk menghindarkan berputar-putar pada pendefinisian.

c. Berpola pikir deduktif

⁶ Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia*, (Jakarta: Direktorat Jendral DIKTI, DEPDIKNAS, 2000), hal. 13

Dalam memahami matematika sebagai “ilmu” adalah hanya diterima pola pikir deduktif. Maksud pola berpikir deduktif secara sederhana dapat dikatakan pemikiran yang berpangkal dari hal yang bersifat umum diterapkan atau diarahkan kepada hal yang bersifat khusus.

d. Mempunyai simbol yang kosong dari arti

Dalam matematika banyak sekali simbol-simbol yang digunakan, baik berupa huruf ataupun bukan huruf. Makna dari huruf dan tanda itu tergantung dari permasalahan yang mengakibatkan terbentuknya model tersebut.

e. Memperhatikan semesta pembicaraan

Dalam menggunakan matematika diperlukan kejelasan dalam lingkup apa model itu dipakai. Bila lingkup pembicaraannya bilangan, maka simbol-simbol diartikan bilangan. Namun bila lingkup pembicaraannya transformasi, maka simbol-simbol itu diartikan transformasi. Lingkup pembicaraan inilah yang disebut dengan semesta pembicaraan.

f. Konsisten dalam sistemnya

Dalam matematika terdapat banyak sistem yang berkaitan satu sama lain, tetapi ada pula sistem yang dapat dipandang terlepas satu sama lain. Kontradiksi antara sistem tersebut tetap bernilai benar pada sistem dan strukturnya sendiri.

Sebagaimana pembahasan di atas, matematika berkaitan dengan ide-ide abstrak yang diberi simbol-simbol yang tersusun secara hirarkis dan penalarannya deduktif. Apabila peserta didik mempelajari konsep B yang mendasarkan pada konsep A, maka ia perlu memahami lebih dulu konsep A. Tanpa memahami

konsep A, tidak mungkin ia memahami konsep B. Ini berarti, mempelajari matematika haruslah bertahap dan berurutan serta mendasarkan kepada pengalaman belajar yang lalu.

B. BELAJAR MATEMATIKA

Dalam belajar matematika, jika terputus-putus akan mengganggu terjadinya proses belajar, karena matematika merupakan ilmu yang herarki. Ini berarti proses belajar matematika akan terjadi dengan lancar bila belajar itu sendiri dilakukan secara kontinyu. Di dalam proses belajar, terjadi juga proses berpikir. Begitu pula seseorang dikatakan belajar matematika jika dia melakukan proses berpikir matematik.

Berpikir matematik merupakan kegiatan mental, yang dalam prosesnya selalu menggunakan abstraksi dan generalisasi.⁷ Sehingga seseorang yang belajar matematika dituntut untuk mempunyai kemampuan dalam membuat abstraksi dan generalisasi. Abstraksi merupakan proses untuk menyimpulkan hal-hal yang sama dari sejumlah objek atau situasi yang berbeda. Sedangkan generalisasi adalah membuat perkiraan berdasarkan kepada pengetahuan yang dikembangkan melalui contoh-contoh khusus.

Dalam upaya untuk mewujudkan keberhasilan dan kelancaran dalam kegiatan proses belajar matematika, adanya sistem pembelajaran yang terkonsep juga sangat mendukung keberhasilan tersebut. Berikut ini adalah pemaparan pembelajaran yang ditekankan pada konsep-konsep matematika.⁸

⁷ Maryono, *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa...*, hal. 10

⁸ Heruman, *Model Pembelajaran Matematika di Sekolah Dasar*, (Bandung: PT Remaja Rosdakarya, 2008), hal. 3

1. Penanaman Konsep Dasar (Penanaman Konsep), yaitu pembelajaran suatu konsep baru matematika, ketika peserta didik belum pernah mempelajari konsep tersebut. Pembelajaran penanaman konsep dasar merupakan jembatan yang harus dapat menghubungkan kemampuan kognitif peserta didik yang konkrit dengan konsep baru matematika yang abstrak.
2. Pemahaman Konsep, yaitu pembelajaran lanjutan dari penanaman konsep, yang bertujuan agar peserta didik lebih memahami suatu konsep matematika.
3. Pembinaan Keterampilan, yaitu pembelajaran lanjutan dari penanaman konsep dan pemahaman konsep. Pembelajaran pembinaan keterampilan bertujuan agar peserta didik lebih terampil dalam menggunakan berbagai konsep matematika.

Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa dalam proses belajar matematika itu perlu dilakukan terlebih dahulu penanaman terhadap konsep dasar sebelum memahami konsep matematika pada tingkat yang lebih tinggi. Selain itu, sistem pembelajaran yang kontinyu merupakan faktor pendukung keberhasilan dan kelancaran proses belajar matematika.

C. PEMAHAMAN

Pemahaman merupakan salah satu indikator yang digunakan untuk mengetahui keberhasilan siswa dalam mempelajari suatu konsep. Beberapa ahli mendefinisikan pemahaman dengan definisi yang berbeda-beda. Seperti halnya menurut Menurut Duffin dan Simpson pemahaman adalah kesadaran dari struktur mental yang internal. Sedangkan menurut Sierpinska pemahaman merupakan suatu hal yang nyata sebagai pengalaman mental seseorang yang potensial atau

aktifitas kognitif yang berlangsung pada waktu yang lebih panjang.⁹ Menurut Purwanto, pemahaman adalah tingkat kemampuan yang mengharapakan siswa mampu memahami arti atau konsep, situasi serta fakta yang diketahuinya. Untuk memahami suatu objek secara mendalam, seseorang harus mengetahui: 1) objek itu sendiri; 2) relasinya dengan objek lain yang sejenis; 3) relasinya dengan objek lain yang tidak sejenis; 4) relasidual dengan objek lainnya yang sejenis; 5) relasi dengan objek dalam teori lainnya.

Pemahaman konsep merupakan hal yang penting dalam pembelajaran matematika. Pemahaman konsep sebagai kemampuan siswa untuk (1) Menjelaskan konsep dimana siswa mampu untuk mengungkapkan kembali apa yang telah dikomunikasikan kepadanya; (2) Menggunakan konsep pada berbagai situasi yang berbeda; (3) Mengembangkan beberapa akibat dari adanya suatu konsep, dapat diartikan bahwa siswa paham terhadap suatu konsep akibatnya siswa mempunyai kemampuan untuk menyelesaikan setiap masalah dengan benar.¹⁰ Pemahaman konsep perlu ditanamkan pada siswa dalam pembelajaran matematika sejak jenjang pendidikan paling dasar supaya mudah untuk mempelajari level konsep matematika yang lebih tinggi.

Adapun indikator pemahaman konsep yang dijelaskan oleh Depdiknas, antara lain yaitu : (1) menyatakan ulang sebuah konsep, (2) mengklasifikasi objek-objek menurut sifat-sifat tertentu (sesuai dengan konsepnya), (3) memberikan contoh dan non-contoh dari konsep, (4) menyajikan konsep dalam

⁹ Fatqurhohman, *Pemahaman Konsep Matematika Siswa Dalam Menyelesaikan Masalah Bangun Datar*, Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Volume 4, Nomor 2, Tahun 2012, hal. 128

¹⁰ J.M. Duffin & A.P. Simpson, A. *Search for understanding*, (Journal of Mathematical Behavior).

berbagai bentuk representasi matematis, (5) mengembangkan syarat perlu atau syarat cukup suatu konsep, (6) menggunakan, memanfaatkan, dan memilih prosedur atau operasi tertentu, dan (7) mengaplikasikan konsep atau algoritma pemecahan masalah.¹¹

Selanjutnya, Dubinsky menyatakan bahwa pemahaman tentang konsep matematika merupakan hasil konstruksi dan rekonstruksi dari objek-objek matematika yang dilakukan melalui aktivitas aksi, proses, dan objek yang dikoordinasi dalam suatu skema.¹² Skema merupakan struktur kognitif yang digunakan seseorang untuk mengadaptasi dan mengorganisasikan stimulus (pengetahuan) yang datang dari lingkungan.¹³ Secara sederhana, skema diibaratkan sebagai konsep-konsep atau kategori-kategori yang dipergunakan untuk mengidentifikasi dan mengklasifikasikan stimulus-stimulus (pengetahuan/informasi) yang datang dari luar.

Kesumawati menyatakan bahwa landasan penting yang harus dimiliki oleh peserta didik dalam usahanya untuk berpikir menyelesaikan permasalahan matematika maupun permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, adalah kemampuan dalam memahami konsep matematika. Pentingnya kemampuan pemahaman konsep matematika juga dijelaskan dalam prinsip pembelajaran matematika yang dinyatakan oleh *National Council of Teaching Mathematics* (NCTM) yaitu: “Para peserta didik harus belajar matematika dengan pemahaman, secara aktif membangun pengetahuan baru dari pengalaman dan pengetahuan

¹¹ Nila Kesumawati, *Pemahaman Konsep Matematik dalam Pembelajaran Matematika*, (Palembang: Jurnal Semnas Matematika dan Pendidikan Matematika. Vol.2-231, 2008), hal. 234.

¹² Ed. Dubinsky, *Using A Theory of...*, hal. 11

¹³ Herman Hudojo, *Pengembangan Kurikulum dan Pembelajaran Matematika*, (Malang: IKIP Malang, 2003), hal. 59

sebelumnya.” Prinsip ini didasarkan pada ide bahwa belajar matematika dengan pemahaman adalah penting. Belajar matematika tidak hanya memerlukan keterampilan menghitung tetapi juga memerlukan kecakapan untuk berpikir dan beralasan secara matematis untuk menyelesaikan soal-soal baru dan mempelajari ide-ide baru yang akan dihadapi oleh peserta didik di masa yang akan datang.

Berdasarkan kajian teori yang telah dikemukakan di atas, maka pemahaman pada penelitian ini diartikan sebagai kemampuan siswa untuk mengkonstruksi dan merekonstruksi aksi, proses dan objek matematika serta mengorganisasikannya dalam struktur kognitif (skema) yang digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan tentang konsep turunan fungsi.

Berdasarkan kajian teori yang telah dikemukakan di atas, maka pemahaman pada penelitian ini diartikan sebagai kemampuan siswa untuk mengkonstruksi dan merekonstruksi aksi, proses dan objek matematika serta mengorganisasikannya dalam struktur kognitif (skema) yang digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan tentang konsep turunan fungsi.

D. TEORI APOS

Teori APOS (*Action, Process, Object, Scheme*) merupakan teori konstruktivis tentang bagaimana terjadinya/berlangsungnya pencapaian pembelajaran suatu konsep atau prinsip matematika, yang dapat digunakan sebagai suatu elaborasi tentang konstruksi mental, aksi, proses, objek, dan skema. Orang yang gencar mengembangkan teori APOS adalah Ed. Dubinsky. Menurut Dubinsky definisi teori APOS adalah sebagai berikut:

*APOS Theory is our elaboration of the mental constructions of actions, processes, objects, and schemas. In studying how students might learn a particular mathematical concept, an essential ingredient which the researcher must provide is an analysis of the concept in terms of these specific constructs.*¹⁴

Dalam makalahnya, Dubinsky menulis : “*APOS Theory can be used directly in the analysis of data by a researcher. In very fine grained analysis, the researcher can compare the success or failure of students on a mathematical task with the specific mental construction they may or may not have made,*”¹⁵ Teori APOS ini dapat digunakan untuk menganalisis struktur kognitif siswa dalam memahami suatu konsep.

Teori APOS lahir dari hipotesis bahwasanya pengetahuan matematika berada dalam kecenderungan individu untuk terlibat dalam situasi masalah matematika dengan cara memanipulasi mental aksi, proses, objek dan mengorganisasi ketiganya dalam skema.¹⁶ Ide ini muncul dari usaha untuk mengembangkan karya Piaget pada abstraksi reflektif dalam pembelajaran anak-anak ke level pembelajaran matematika perguruan tinggi. Sebagaimana tujuan dari teori APOS yang dijelaskan sebagai berikut:

APOS Theory arose out of an attempt to understand the mechanism of reflective abstraction, introduced by Piaget to describe the development of

¹⁴ Ed. Dubinsky, *Using a Theory of Learning...*, hal. 11

¹⁵ Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. *APOS: A Constructivist Theory of Learning...*, hal. 4

¹⁶ Ed. Dubinsky & McDonal, M. A. *APOS: A Constructivist Theory of Learning...*, hal. 2

*logical thinking in children, and extend this idea the more advanced mathematical concepts (Dubinsky, 1991a).*¹⁷

Teori APOS muncul dengan tujuan untuk memahami mekanisme abstraksi reflektif yang diperkenalkan oleh J. Piaget yang menjelaskan perkembangan berpikir logis matematika untuk anak-anak. Kemudian ide tersebut dikembangkan untuk konsep matematika yang lebih luas, terutama untuk membentuk perkembangan berpikir logis bagi mahasiswa.

Abstraksi reflektif merupakan abstraksi yang didasarkan pada koordinasi, relasi, operasi dan penggunaan yang tidak langsung keluar dari sifat-sifat objek itu sendiri, tetapi dari tindakan terhadap objek itu. Abstraksi ini disebut sebagai abstraksi logis atau matematis.

Teori APOS dapat digunakan untuk membandingkan kemampuan individu dalam mengkonstruksi mental yang telah terbentuk untuk suatu konsep matematika. Misalkan, ada dua individu yang kelihatannya sama-sama menguasai konsep matematika. Dengan Teori APOS dapat dideteksi lebih lanjut siapa yang konsep matematikanya lebih baik, berarti jika salah satu di antara keduanya mampu menjelaskan lebih lanjut suatu konsep sedangkan yang satunya tidak mampu, maka secara otomatis ia berada pada tingkat pemahaman yang lebih baik dari pada yang satunya. Sehingga, dapat dikatakan bahwa teori APOS ini merupakan tahapan-tahapan individu dalam memahami konsep pelajaran.

Teori APOS merupakan elaborasi tentang konstruksi mental dari aksi (*action*), proses (*process*), objek (*object*), skema (*schema*). Menurut Dubinsky,

¹⁷ *Ibid.*, hal. 4

kerangka kerja teori APOS dalam mengkonstruksi konsep matematika adalah sebagai berikut.

1. Aksi (*action*)

*An action is a transformation of objects perceived by the individual as essentially external and as requiring, either explicitly or from memory, step by step instructions on how to perform the operation.*¹⁸

Aksi (*action*) adalah transformasi dari objek-objek yang dipahami individu sebagai bagian eksternal yang esensial dan sebagai kebutuhan, secara eksplisit atau dari memori, instruksi tahap demi tahap tentang bagaimana melakukan operasi. Pada tahap aksi terjadi pengulangan fisik atau manipulasi mental dengan mentransformasikan objek matematika melalui beberapa cara atau aktifitas yang mendasarkan pada beberapa algoritma secara eksplisit.¹⁹

Transformasi dalam hal ini merupakan suatu reaksi eksternal yang diberikan secara rinci pada tahap-tahap yang harus dilakukan, jadi kinerja pada tahap aksi berupa aktifitas prosedural. Pada tahap ini siswa masih membutuhkan bimbingan untuk melakukan transformasi, baik secara fisik ataupun secara mental objek. Contohnya, siswa membutuhkan pemahaman awal tentang limit fungsi, yang kemudian ditransformasikan untuk memikirkan tentang konsep turunan fungsi. Siswa tersebut mampu mencari turunan dari suatu fungsi menggunakan konsep limit. Ia mampu menyelesaikan pengerjaan dengan prosedur yang tepat. Dalam keadaan ini, siswa tersebut dianggap berada pada tahap aksi.

¹⁸ *Ibid.*, hal. 2

¹⁹ Maryono, *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa...*, hal. 16

2. Proses (*Process*)

*When an action is repeated and the individual reflects upon it, he or she can make an internal mental construction called a process which the individual can think of as performing the same kind of action, but no longer with the need of external stimuli.*²⁰

Ketika aksi dilakukan secara berulang dan dilakukan refleksi atas aksi itu, maka aksi-aksi tersebut diinteriorisasi menjadi proses, yaitu suatu konstruk internal yang dilakukan pada aksi yang sama tetapi sekarang tidak perlu rangsangan internal.²¹ Sehingga proses (*Process*) didefinisikan sebagai struktur kognitif yang melibatkan imajinasi tentang transformasi mental atau fisik objek, sehingga siswa merasakan transformasi menjadi bagian internal dirinya dan mampu mengontrol transformasi tersebut.²²

Perubahan transformasi dari eksternal ke dalam internal (pikiran) anak disebut interiorisasi (*interiorization*).²³ Interiorisasi dari suatu aksi merupakan perubahan aktifitas prosedural menuju konstruksi mental pada proses internal yang relatif untuk sederetan aksi pada objek kognitif yang dapat dilakukan atau dibayangkan untuk dilakukan dalam pikiran tanpa mengerjakan semua tahapan-tahapan pekerjaan.²⁴ Contohnya, siswa yang berada dalam tahap proses sudah memahami bahwa turunan fungsi merupakan penurunan dari konsep limit. Ia mampu menjelaskan dengan benar langkah-langkah prosedural yang ia kerjakan.

²⁰ Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. *APOS: A Constructivist Theory...*, hal. 3

²¹ *Ibid.*,

²² Minanur Rohman. *Analisis Miskonsepsi Siswa...*, hal. 22-23

²³ Aneshkumar Maharaj (dalam Minanur Rohman), *Analisis Miskonsepsi Siswa...*, hal. 22-

²⁴ Lasmi Nurdin, *Analisa Pemahaman Siswa SMA...*, hal.14

3. Objek (*Object*)

*An object is constructed from a process when the individual becomes aware of the process as a totality and realizes that transformations can act on it.*²⁵

Objek (*Object*) adalah tahap struktur kognitif dimana siswa menyadari proses-proses transformasi tersebut sebagai satu kesatuan, dan sadar bahwasanya transformasi dapat dilakukan dalam satu kesatuan tersebut.²⁶ Proses-proses baru dapat juga dikonstruksi (dibentuk) dengan cara mengkoordinasi proses-proses yang sudah ada. Bila hal tersebut menjadi suatu proses sendiri untuk ditransformasikan oleh suatu aksi, maka dikatakan proses itu telah dienkapsulasikan menjadi suatu objek.²⁷ Jadi, enkapsulasi (*encapsulation*) merupakan suatu transformasi mental dari suatu proses pada suatu objek kognitif, dengan indikasinya seorang individu melakukan refleksi pada penerapan operasi untuk proses tertentu, menjadi sadar terhadap proses secara totalitas bahwa ternyata transformasi (apakah aksi atau proses) dapat dilakukan dan dikonstruksi secara nyata sebagai transformasi.²⁸ Contohnya, siswa mampu untuk mencari nilai turunan suatu fungsi dengan menggunakan konsep limit maupun dengan teorema dengan langkah langkah yang tepat.

4. Skema (*Schema*)

A schema for a certain mathematical concept in an individual's collection of actions, processes, objects, and other schemas which are linked by some

²⁵ Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. *APOS: A Constructivist Theory...*, hal. 3

²⁶ Minanur Rohman. *Analisis Miskonsepsi Siswa...*, hal. 22

²⁷ Dubinsky, Ed. *Using A Theory of...*, hal.

²⁸ Maryono, *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa...*, hal. 18

*general principles to form a framework in the individual's mind that may be brought to bear upon a problem situation involving that concept.*²⁹

Skema (*Schema*) adalah kumpulan aksi, proses, objek dan mungkin skema lain yang dihubungkan dengan beberapa prinsip umum untuk membentuk kerangka berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan konsep yang dipelajarinya.³⁰ Konstruksi yang mengaitkan aksi, proses, objek yang terpisah untuk objek tertentu sehingga menghasilkan suatu skema tertentu disebut tematisasi.³¹ Contohnya, siswa mampu mencari nilai turunan fungsi menggunakan konsep limit ataupun teorema dengan prosedur yang tepat, serta dapat menjelaskan konsep-konsep yang berkaitan dengan prosedur yang ia lakukan.

Kejadian-kejadian kognitif menginteriorisasikan suatu aksi menuju suatu proses, mengenkapsulasikan suatu proses ke dalam suatu objek, dan mentematisasikan suatu objek ke dalam skema dalam kerangka teori ini disebut ekuilibrisasi.³²

Siswa yang mencapai keadaan ekuilibrium telah berhasil menyeimbangkan antara struktur kognisi dengan pengalaman yang diperolehnya dari interaksi dengan lingkungan. Menurut Piaget, dengan berinteraksi, seseorang akan memperoleh skema.³³

Selanjutnya, Zaskis dan Campbell mengungkapkan bahwa kejadian-kejadian kognitif ini dapat dijelaskan dengan baik dalam kerangka teori APO

²⁹ Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. *APOS: A Constructivist Theory...*, hal. 3

³⁰ Minanur Rohman. *Analisis Miskonsepsi Siswa...*, hal. 22

³¹ Ed. Dubinsky, *Using A Theory of...*, hal.

³² R. Zaskis and Campbell, *Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teacher's Understanding (Journal Mathematics Education)*, hal. 540 – 563

³³ Wowo Sunaryo Kuswana, *Taksonomi Berfikir*, (Bandung: PT Remaja Rosdakarya, 2011), hal. 159

(*Action, Process, Object*). Perbedaan antara aksi dengan proses ditunjukkan oleh kegiatan prosedural dan pemahaman prosedural. Sedangkan perbedaan antara proses dan objek ditunjukkan oleh suatu pemahaman prosedural dan pemahaman konseptual.³⁴

Keempat tahap tersebut tersusun secara hierarkis, artinya siswa harus melewati tahap tertentu untuk naik ke tahap selanjutnya. Hal ini disebabkan setiap pembahasan satu komponen saling berkaitan dengan komponen lainnya secara berurutan. Namun pada kenyataannya, ketika seseorang mengembangkan pemahamannya terhadap suatu konsep matematika, tidaklah selamanya dilakukan secara linear. Misalnya, ketika seseorang dihadapkan pada suatu soal turunan fungsi, maka kemungkinan dia tidak mulai dari tahap aksi tetapi mulai dari tahap objek kemudian baru tahap lainnya. Jadi tidak menutup kemungkinan bahwa, jika siswa sudah berada dalam tahap objek atau bahkan skema, maka siswa tersebut mungkin tidak perlu melewati tahap proses. Ini dikarenakan proses-proses transformasi telah terinteriorisasi sempurna ke dalam pikiran siswa.

Teori APOS sangat berguna dalam memahami pembelajaran mahasiswa dalam berbagai topik pada kalkulus, aljabar abstrak, statistika, matematika diskrit, dan topik matematika lainnya.³⁵ Dari penjelasan di atas dapat digarisbawahi bahwa Teori APOS dapat digunakan untuk memahami pembelajaran pada topik kalkulus. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa teori APOS juga bisa diterapkan untuk memahami pembelajaran siswa pada materi turunan di SMA/MA, karena turunan adalah salah satu kajian pada topik kalkulus.

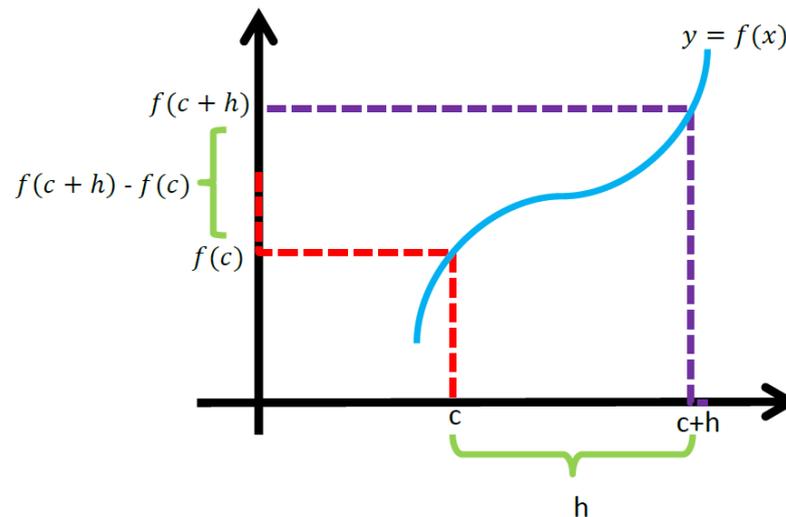
³⁴ Lasmi Nurdin, *Analisa Pemahaman Siswa SMA Laboratorium...*, hal. 14

³⁵ *Ibid.*, hal. 2

E. MATERI TURUNAN FUNGSI

1. Pengertian Turunan

Perhatikan grafik dibawah ini !



Gambar 2.1 Grafik Turunan Fungsi

Jika nilai h makin kecil (mendekati nol) maka nilainya menjadi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ yang disebut laju perubahan nilai fungsi f pada $x = c$.

Bentuk limit seperti ini disebut turunan (derivatif) fungsi f pada $x=c$. Apabila turunan fungsi $f(x)$ dinyatakan dengan $f'(x)$, maka dapat didefinisikan bahwa:

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca “ f aksen”) yang nilainya pada x sebarang bilangan adalah

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika nilai limitnya ada, fungsi f dikatakan diferensiabel di x dan f' disebut fungsi turunan dari f .³⁶ Turunan dari $y = f(x)$ seringkali ditulis dengan $y' = f'(x)$. Notasi dari $y' = f'(x)$ juga dapat ditulis:

$$\frac{dy}{dx} \text{ dan } \frac{df(x)}{dx}$$

Contoh soal:

Tentukan turunan dari $f(x) = 4x - 3$!

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4(x+h) - 3) - (4x - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4x + 4h - 3) - (4x - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x + 4h - 3 - 4x + 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

2. Teorema Turunan Fungsi Aljabar

a) Jika $y = f(x) = k$ dengan k konstanta, maka $f'(x) = 0$

Contoh:

$$f(x) = 2 \rightarrow f'(x) = 0$$

³⁶ Suwarsimi Murniati, dkk., *Matematika Kelas XI Semester 2 Program IPS*, (Jakarta: Yudhistira, 2015), hal. 110-112

- b) Jika $y = f(x) = ax$ dengan a bilangan rasional, $f'(x) = a$
- c) Jika $y = f(x) = x^n$ dengan n bilangan rasional, maka $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Contoh:

$$f(x) = 2x^3 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} = 6x^2$$

- d) Jika u dan v adalah fungsi-fungsi dari x yang dapat diturunkan, dengan $y = f(x) = u(x) \pm v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

Contoh:

Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 2$

Jawab:

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 2$$

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^{4-1} - 2 \cdot 3x^{3-1} + 1 - 0$$

$$= 12x^3 - 6x^2 + 1$$

Jadi, turunan dari fungsi $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 2$ adalah $f'(x) =$

$$12x^3 - 6x^2 + 1$$

- e) Jika u dan v adalah fungsi-fungsi dari x yang dapat diturunkan, dan $y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Contoh:

Tentukan turunan fungsi $f(x) = (2x^3 - 1)(4x^2 - 5x)$!

Jawab:

$$f(x) = (2x^3 - 1)(4x^2 - 5x)$$

$$\text{Misal } u = 2x^3 - 1 \rightarrow u' = 6x^2$$

$$v = 4x^2 - 5x \rightarrow v' = 8x - 5$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= u'v + uv' \\
 &= (6x^2)(4x^2 - 5x) + (2x^3 - 1)(8x - 5) \\
 &= 24x^4 - 30x^3 + 16x^4 - 10x^3 - 8x + 5 \\
 &= 40x^4 + 40x^3 - 8x + 5
 \end{aligned}$$

f) Jika u dan v adalah fungsi-fungsi dari x yang dapat diturunkan, dan

$$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \text{ untuk } v(x) \neq 0, \text{ maka } f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}.^{37}$$

Contoh:

$$\text{Tentukan turunan dari fungsi } f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x + 3}$$

Jawab:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x + 3}$$

$$\text{Misal: } u = 3x^2 - 2x \rightarrow u' = 6x - 2$$

$$v = x + 3 \rightarrow v' = 1$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(6x - 2)(x + 3) - (1)(3x^2 - 2x)}{(x + 3)^2} \\
 &= \frac{6x^2 + 18x - 2x - 6 - 3x^2 + 2x}{(x + 3)^2} \\
 &= \frac{3x^2 + 16x - 6}{(x + 3)^2}
 \end{aligned}$$

³⁷ Sri Lestari dan Diah Ayu Kurniasih, *Buku Matematika Siswa untuk Kelas XI SMA/MA/SMK/MAK Semester 2 Progam Studi IPS*, (Jakarta: Kemendikbud, 2014), hal 162-168

3. Aturan Rantai

Jika $y = f(u) = u^n$ dengan $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ atau

$$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'.^{38}$$

Contoh:

Tentukan turunan dari $y = (3x + 5)^{10}$!

Jawab:

$$y = (3x + 5)^{10}$$

$$\text{Misal } u = 3x + 5 \rightarrow u' = 3$$

Sehingga,

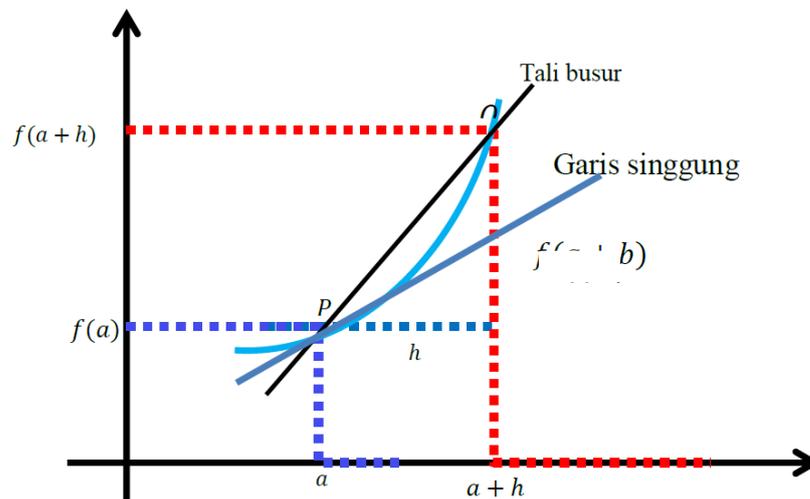
$$\begin{aligned} y = u^{10} \rightarrow y' &= n \cdot u^{n-1} \cdot u' \\ &= 10 \cdot (3x + 5)^{10-1} \cdot 3 \\ &= 30(3x + 5)^9 \end{aligned}$$

Jadi turunan dari fungsi $y = (3x + 5)^{10}$ adalah $y' = 30(3x + 5)^9$

³⁸ *Ibid.*, hal. 170

4. Persamaan Garis Singgung pada Kurva

Perhatikan kurva dibawah ini !



Gambar 2.2 Persamaan garis singgung kurva

Garis yang melalui titik P dan Q disebut tali busur dengan kemiringan (gradien):

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Jika h mendekati 0 ($h \rightarrow 0$), maka gradien garis PQ mendekati gradien garis singgung kurva di titik P, sehingga gradien garis singgung:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} m_{PQ} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Persamaan garis singgung yang melalui titik (a, b) dengan gradien garis m adalah $y - b = m(x - a)$. Dengan mensubstitusikan $m = f'(x)$, persamaan garis tersebut dapat ditulis sebagai

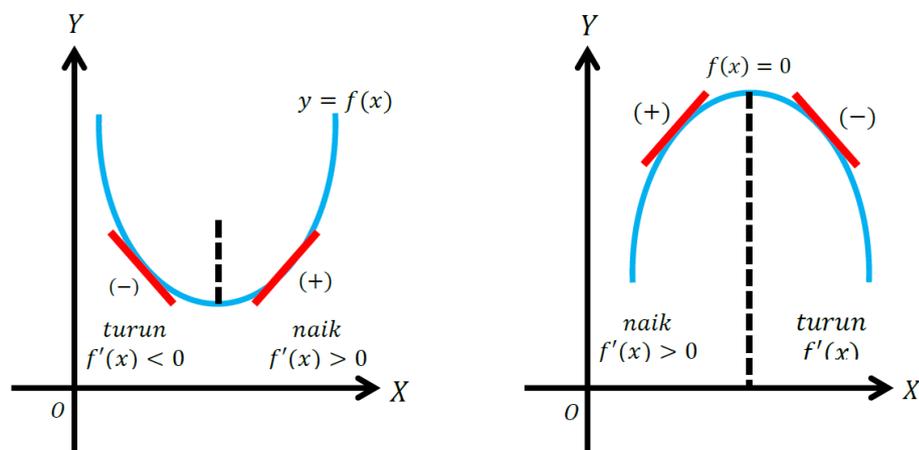
$$y - b = f'(x)(x - a)$$

Kesimpulan:

Misalkan terdapat fungsi f kontinu, dengan titik (a, b) terletak pada kurva fungsi $f(x)$, maka persamaan garis singgung kurva fungsi $f(x)$ di titik (a, b) diberikan oleh:

$$y - b = f'(x)(x - a)$$

5. Fungsi Naik dan Fungsi Turun



Gambar 2.3 Fungsi Naik dan Fungsi Turun

misalkan fungsi f dapat diturunkan pada selang $I \in x$.

- Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik x pada I , maka f naik pada I
- Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik x pada I , maka f turun pada I .³⁹

F. PEMAHAMAN KONSEP MATEMATIKA BERDASARKAN TEORI APOS PADA MATERI TURUNAN FUNGSI

Teori APOS dapat digunakan secara langsung dalam menganalisis data.

Peneliti dapat membandingkan keberhasilan subjek dalam mengerjakan suatu masalah matematika melalui suatu konstruksi mental. Teori APOS sangat baik

³⁹ Sri Lestari dan Diah Ayu Kurniasih, *Buku Matematika Siswa untuk Kelas XI SMA/MA/SMK/MAK Semester 2 Progam Studi IPS*, (Jakarta: Kemendikbud, 2014), hal 172-176

digunakan untuk memahami proses belajar siswa dalam berbagai topik matematika, khususnya materi tentang turunan fungsi.

Dalam mendeskripsikan pemahaman siswa diperlukan indikator pemahaman siswa berdasarkan teori APOS. Adapun indikator pemahaman siswa berdasarkan teori APOS pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

a) Tahap *Action* (Aksi)

Aksi (*action*) adalah transformasi dari objek-objek yang dipahami individu sebagai bagian eksternal yang esensial dan sebagai kebutuhan, secara eksplisit atau dari memori, instruksi tahap demi tahap tentang bagaimana melakukan operasi. Pada tahap aksi terjadi pengulangan fisik atau manipulasi mental dengan mentransformasikan objek matematika melalui beberapa cara atau aktifitas yang mendasarkan pada beberapa algoritma secara eksplisit. Indikator pemahaman konsep pada tahap aksi adalah siswa melakukan perhitungan untuk mencari turunan fungsi tanpa pertimbangan prosedur mana yang benar atau tanpa mengetahui alasan menggunakan prosedur tersebut.

b) Tahap *Process* (Proses)

Process (proses) adalah perubahan aktifitas prosedural menuju konstruksi mental pada proses internal yang relatif untuk sederetan aksi pada objek kognitif yang dapat dilakukan atau dibayangkan untuk dilakukan dalam pikiran tanpa mengerjakan semua tahapan-tahapan pekerjaan. Indikator pemahaman konsep pada tahap proses ini adalah sebagai berikut:

- 1) Siswa menentukan turunan fungsi dengan menggunakan berbagai cara, seperti berimajinasi untuk membayangkan prosedur/metode penyelesaian yang tepat.
- 2) Siswa masih kesulitan jika diberikan permasalahan baru yang sedikit berbeda dengan contoh yang diberikan guru.
- 3) Siswa masih belum mampu melibatkan definisi, teorema dan rumus-rumus yang berlaku pada turunan fungsi dalam kegiatan perhitungannya.

c) Tahap *Object* (Objek)

Objek (*Object*) adalah tahap struktur kognitif dimana siswa menyadari proses-proses transformasi tersebut sebagai satu kesatuan, dan sadar bahwasanya transformasi dapat dilakukan dalam satu kesatuan tersebut.⁴⁰ Proses-proses baru dapat juga dikonstruksi (dibentuk) dengan cara mengkoordinasi proses-proses yang sudah ada. Indikator pemahaman konsep pada tahap objek adalah sebagai berikut:

- 1) Siswa menunjukkan kemampuannya melakukan perhitungan berdasarkan pada definisi, teorema dan rumus-rumus pada turunan fungsi
- 2) Siswa mampu mengaplikasikan konsep turunan fungsi dalam kasus yang berbeda.

⁴⁰ Minanur Rohman. *Analisis Miskonsepsi Siswa...*, hal. 22

d) Tahap *Scheme* (Skema)

Skema (*Schema*) adalah kumpulan aksi, proses, objek dan mungkin skema lain yang dihubungkan dengan beberapa prinsip umum untuk membentuk kerangka berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan konsep yang dipelajarinya. Indikator pemahaman konsep pada tahap skema adalah sebagai berikut. Siswa menunjukkan kemampuannya dalam membuat hubungan konsep turunan fungsi dengan konsep matematika yang lain (aljabar, suku banyak, akar/pangkat, persamaan garis, dll).

G. PENELITIAN TERDAHULU

Penelitian yang berhubungan dengan analisis pemahaman berdasarkan Teori APOS yang dilaporkan oleh peneliti sebagai berikut:

1. Penelitian yang dilakukan oleh Yunika Lestaria Ningsih pada tahun 2016 yang berjudul “Kemampuan Pemahaman Konsep Matematika Mahasiswa Melalui Penerapan Lembar Aktivitas Mahasiswa (LAM) Berbasis Teori APOS Pada Materi Turunan”. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui kemampuan pemahaman konsep matematika mahasiswa melalui penerapan Lembar Aktivitas Mahasiswa (LAM) berdasarkan teori APOS (Aksi-Proses-Objek-Skema) pada materi turunan.
2. Penelitian yang dilakukan oleh Risky Tri Evani, mahasiswa jurusan Tarbiyah program studi Tadris Matematika Sekolah Tinggi Agama Islam Negeri Tulungagung dengan judul “Analisis Pemahaman Siswa Berdasarkan Teori

APOS (*Action, Process, Object Dan Schema*) pada Materi Persamaan Linier Satu Variabel di Kelas VII MTs Al-Ma'arif Tulungagung Semester II Tahun Ajaran 2016/2017". Penelitian ini mendeskripsikan tingkat pemahaman matematis siswa pada tiap kemampuan matematis siswa terhadap materi Persamaan Linier Satu Variabel.

3. Penelitian yang dilakukan oleh Evy Ramadina yang berjudul "Pemahaman Siswa Ditinjau Dari Gaya Belajar Terhadap Fungsi Trigonometri Berdasarkan Teori APOS (*Action, Processes, Object, Shcema*) Kelas X SMA Al Azhaar Tulungagung Tahun Pelajaran 2014/2015". Penelitian ini mendeskripsikan tingkat pemahaman siswa dan tingkat perkembangan skema siswa dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan fungsi trigonometri berdasarkan gaya belajarnya.

Tabel 2.1 Persamaan dan Perbedaan Penelitian Peneliti dengan Penelitian Terdahulu

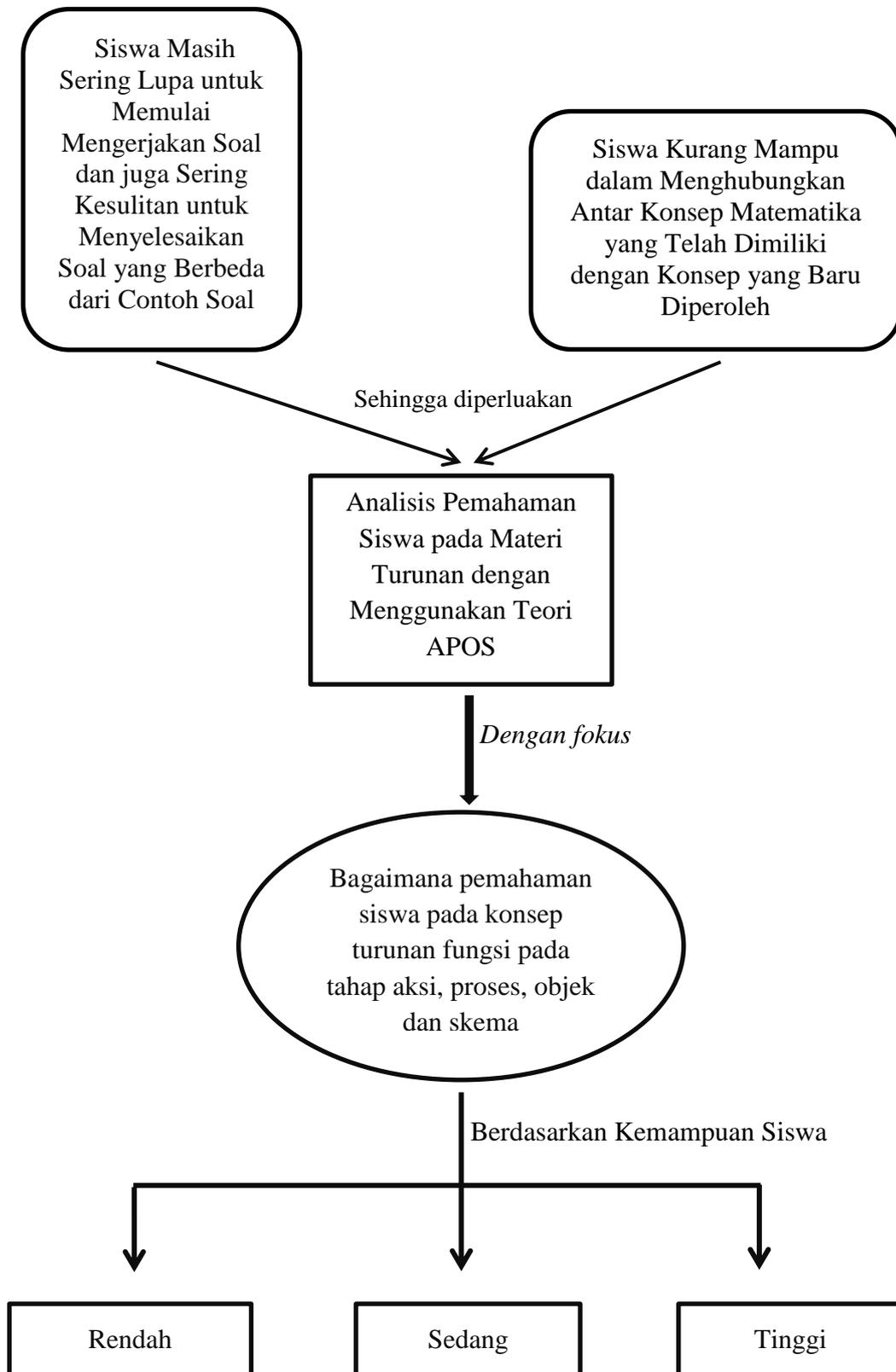
No	Judul	Persamaan	Perbedaan
1	Analisis Pemahaman Siswa Berdasarkan Teori APOS (<i>Action, Process, Object</i> Dan <i>Schema</i>) pada Materi Persamaan Linier Satu Variabel di Kelas VII MTs Al-Ma'arif Tulungagung Semester II Tahun Ajaran 2016/2017	<ul style="list-style-type: none"> • menganalisis tentang pemahaman siswa menggunakan teori APOS • menggunakan pendekatan penelitian kualitatif 	<ul style="list-style-type: none"> • Lokasi pelaksanaan penelitian • Materi matematika yang digunakan • Subyek penelitian
2	Kemampuan Pemahaman Konsep Matematika Mahasiswa Melalui Penerapan Lembar Aktivitas Mahasiswa (LAM) Berbasis Teori APOS Pada Materi Turunan	<ul style="list-style-type: none"> • Menelaah kemampuan pemahaman menggunakan teori APOS • Pendekatan penelitian • Materi yang digunakan 	<ul style="list-style-type: none"> • Lokasi dan subyek penelitian • Peneliti menggunakan Lembar Aktivitas Mahasiswa (LAM) turunan dalam pembelajaran untuk membantu mahasiswa dalam mengkonstruksi pemahaman konsep turunan
3.	Pemahaman Siswa Ditinjau Dari Gaya Belajar Terhadap Fungsi Trigonometri Berdasarkan Teori APOS (<i>Action, Processes, Object, And Shcema</i>) Kelas X SMA Al Azhaar Tulungagung Tahun Pelajaran 2014/2015	<ul style="list-style-type: none"> • Menelaah tentang pemahaman siswa • Pendekatan dan jenis penelitian yang digunakan sama 	<ul style="list-style-type: none"> • Lokasi dan tahun pelaksanaan penelitian • Subjek penelitian • Materi yang digunakan penelitian. • Analisis pemahaman ditinjau dari gaya belajar siswa

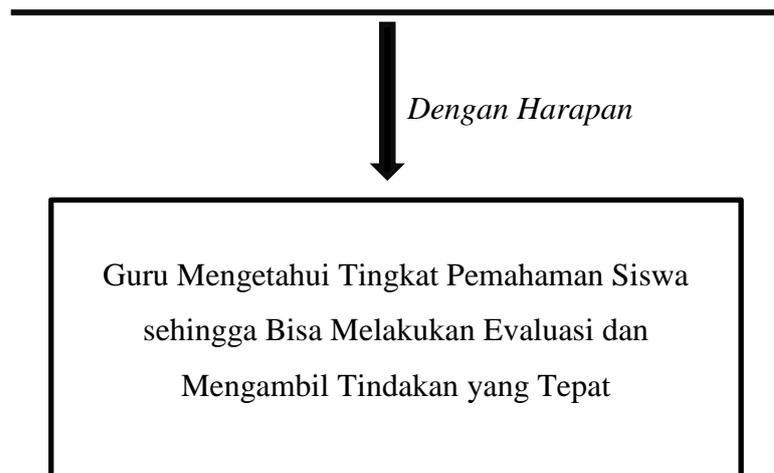
H. KERANGKA BERPIKIR

Setelah terjadi proses pembelajaran matematika, setiap siswa diharapkan akan memperoleh pemahaman matematis. Namun kenyataannya, memahami suatu konsep dengan baik seringkali dilewatkan oleh siswa. Sehingga mereka cenderung kurang mampu dalam menghubungkan antar konsep matematika yang telah dimiliki dengan konsep yang baru diperoleh serta masih sering bingung penggunaan teorema untuk menyelesaikan masalah matematika.

Kondisi tersebut tidak bisa dibiarkan. Oleh karena itu, perlu adanya analisa tentang pemahaman siswa guna mengetahui secara pasti sampai dimana tingkat pemahaman siswa pada materi yang disampaikan oleh guru. Salah satu analisis yang dapat digunakan untuk mengetahui bagaimana siswa memahami suatu konsep matematika adalah dengan menggunakan teori APOS (*Action, Process, Object, Scheme*).

Hal ini bisa dijadikan bahan evaluasi, utamanya untuk guru, bagaimana menentukan tindakan. Apabila tingkat pemahaman siswa telah diketahui, maka akan lebih mudah untuk mengatasi persoalan siswa tentang pemahaman.





Bagan 2.1 Kerangka Berpikir Penelitian