

BAB IV

HASIL PENELITIAN

A. Deskripsi Data

1. Studi Pendahuluan

Penelitian dengan judul “*Analisis Pemahaman Siswa Tentang Turunan Fungsi Berdasarkan Teori APOS (Action, Process, Object, Scheme) pada Siswa Kelas XI IIS U MAN 1 Tulungagung Tahun Ajaran 2017/2018*” merupakan sebuah penelitian yang dilakukan guna mengetahui sejauh mana siswa dapat memahami materi turunan fungsi. Pemahaman siswa dapat dilihat melalui beberapa tahap berdasarkan teori APOS yaitu Aksi (*Action*), Proses (*Process*), Objek (*Object*) dan Skema (*Schema*).

Lokasi penelitian ini dilakukan di sekolah MAN 1 Tulungagung. Pada hari Sabtu tanggal 2 Maret 2018 peneliti mengajukan surat ijin penelitian ke MAN 1 Tulungagung. Pada hari Selasa tanggal 6 Maret 2018 peneliti menemui Waka Humas dengan membawa proposal penelitian untuk meminta persetujuan secara lisan. Pada hari itu Beliau mengizinkan dan menyarankan untuk segera menemui guru pengampu pelajaran matematika. Karena peneliti pernah melakukan PPL di MAN 1 Tulungagung, maka peneliti telah mengenal salah satu guru pengampu mata pelajaran matematika. Guru pengampu mata pelajaran matematika tersebut adalah H. Shofiyah, S. Pd. Oleh karena itu, peneliti langsung menemui beliau dan merencanakan kapan akan pelaksanaan observasi. Guru pengampu menyambut dengan baik maksud penelitian ini dan bersedia membantu selama proses penelitian berlangsung.

2. Pelaksanaan Lapangan

Pada hari Kamis tanggal 8 Maret 2018, peneliti melakukan observasi pelaksanaan pembelajaran matematika di kelas. Pada waktu itu, materi yang sedang dipelajari adalah penggunaan konsep turunan fungsi untuk menentukan persamaan garis singgung suatu kurva.

Pada saat itu pelajaran dibuka dengan latihan soal yang terdiri dari 1 soal tentang penggunaan turunan fungsi. Soal tersebut berhubungan dengan menentukan persamaan garis singgung kurva menggunakan konsep turunan fungsi aljabar. Dalam mengerjakan soal tersebut siswa membutuhkan keterampilan menurunkan fungsi sederhana, dan selanjutnya menggunakannya untuk mencari persamaan garis singgungnya.

Melalui 2 soal tersebut guru memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengerjakan beberapa menit dibangkunya masing-masing, setelah dirasa cukup beliau menyuruh salah satu siswanya untuk mengerjakan soal tersebut di depan kelas. Dari kesempatan yang diberikan tak satupun siswa berkenan maju untuk mengerjakan soal tersebut. Ada beberapa siswa yang sudah mencoba mengerjakan di bukunya masing-masing, tetapi mereka terlihat masih ragu dengan jawabannya. Ada juga yang berusaha bertanya kepada guru dan meminta petunjuk dalam mengerjakan. Guru juga sudah memberikan rambu-rambu dalam mengerjakan, yang kemudian siswanya disuruh meneruskan langkah tersebut secara mandiri. Sebagian siswa hanya berani mengatakan jawabannya tetapi disaat dia disuruh maju dia tidak berkenan, karena jawaban mereka sebagian hanya terkaan atau perkiraan.

Hingga pada akhirnya guru menunjuk beberapa siswa untuk maju menuliskan jawabanya di papan tulis. Terdapat beberapa siswa yang maju dengan ditunjuk oleh guru. Sebagian besar jawaban mereka betul. Sebagian lagi jawaban akhir mereka salah ketika melakukan aktifitas perhitungan menentukan persamaan garis singung.

Beberapa catatan peneliti terkait dengan pembelajaran pada hari itu adalah bahwa guru pengampu mata pelajaran dalam menyampaikan materi masih didominasi dengan cara tekstual dan ceramah. Selain itu masih terlihat dari beberapa siswa kurang memahami penyajian materi dari guru. Hal ini terlihat dari beberapa siswa yang diam (pasif) dan masih kesulitan dalam menerapkan teorema turunan fungsi dalam persoalan. Sebagian besar siswa terlihat pasif dan tidak mau ketika ditunjuk untuk mengerjakan soal di depan kelas, sehingga kemungkinan besar siswa memang belum memahami penggunaan dan maksud dari konsep turunan fungsi.

Setelah kegiatan pembelajaran selesai peneliti melakukan wawancara dengan guru matematika terkait kemampuan dan pemahaman siswa dalam mempelajari konsep turunan fungsi. Secara umum menurut guru pengampu, tingkat pemahaman siswa tentang konsep turunan fungsi hampir sama, tetapi ada satu atau dua siswa yang memiliki kemampuan yang lebih.

Dalam pembicaraan tersebut peneliti sedikit memberikan gambaran tentang proses penelitiannya kepada guru pengampu mengenai alur dan jalannya penelitian. Peneliti menyampaikan bahwa akan melakukan tes yang membutuhkan waktu 2 jam pelajaran. Peneliti juga menjelaskan bahwa akan

diadakan wawancara kepada beberapa siswa. Tetapi, untuk kegiatan wawancara tidak dilaksanakan pada jam pelajaran agar tidak mengganggu siswa dalam mengikuti kegiatan pembelajaran di kelas.

Pelaksanaan tes dan wawancara siswa akan dilakukan mulai minggu pertama di bulan April. Pada minggu ketiga dan keempat bulan Maret kelas X dan kelas XI libur karena digunakan untuk UAM dan UAS kelas XII.

Pelaksanaan tes dilaksanakan pada tanggal 5 April 2018 pada jam ke 5-6 yaitu pukul 10.15-11.45 WIB. Subjek penelitian yang dipilih merupakan hasil dari observasi peneliti selama pelaksanaan PPL kemarin dan hasil tes sesuai kriteria yang dimiliki peneliti. Selain itu juga peneliti melaksanakan pengecekan keabsahan data melalui teman sejawat yang dalam hal ini peneliti berdiskusi dengan guru mata pelajaran untuk menentukan siswa yang bisa mewakili untuk menjadi subjek penelitian dengan kriteria kemampuan tinggi, sedang dan rendah. Dari hasil pemeriksaan teman sejawat, dalam hal ini pertimbangan dari guru matematika, hasil observasi selama PPL dan hasil tes peneliti memutuskan untuk memilih 6 subjek penelitian yang berdasarkan kemampuan tinggi, sedang, dan rendah. Untuk mempermudah dalam pelaksanaan dan analisa data serta untuk menjaga privasi subjek, maka peneliti melakukan pengkodean kepada setiap siswa. Selanjutnya untuk daftar subjek penelitian secara lengkap dapat dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 4.1 Inisial Subyek Penelitian

No	Inisial Subjek	Tingkat Kemampuan
1.	HRB	Tinggi
2.	SHF	Tinggi
3.	AFL	Sedang

4.	RAK	Sedang
5.	AWA	Rendah
6.	IQA	Rendah

Pada tes tertulis, materi yang digunakan adalah materi tentang turunan fungsi dan penggunaannya dalam menentukan persamaan garis singgung kurva dan tentunya juga akan berhubungan dengan definisi, teorema-teorema, dan rumus-rumus pada turunan fungsi. Dan juga akan melibatkan perhitungan aljabar dan eksponen. Waktu yang dibutuhkan untuk mengerjakan soal adalah 45 menit. Pada waktu pelaksanaan tes, siswa tidak mengetahui bahwa mereka adalah subjek dalam penelitian ini. Mereka hanya mengetahui bahwa tes ini adalah ujian yang hasilnya akan disetorkan kepada guru bidang studi sebagai nilai ulangan harian.

Kegiatan wawancara dilaksanakan di luar jam pelajaran dan masing-masing subjek wawancara membutuhkan waktu 20-30 menit. Untuk memudahkan penyusunan hasil wawancara peneliti menggunakan alat perekam dan juga menggunakan alat tulis untuk merekam kejadian selain suara, misalnya keterangan siswa yang ditulis tanpa di suarakan. Pelaksanaan wawancara ini dilaksanakan di lingkungan sekolah, yakni di kelas atau di taman sekolah. Hal ini mengingat bahwa pelaksanaan wawancara yang tidak pada jam sekolah, sehingga memudahkan untuk mencari tempat yang lebih nyaman dan bersahabat. Adapun rincian subjek wawancara beserta waktu pelaksanaan wawancara disajikan dalam tabel 4.3 sebagai berikut.

Tabel 4.2 Jadwal Pelaksanaan Wawancara

Tanggal	Subyek Wawancara
5 April 2018	HRB
	SHF
6 April 2018	AFL
	RAK
8 April 2018	AWA
	IQA

B. Analisis Data

Pada bagian ini akan dipaparkan data-data yang berkenaan dengan kegiatan penelitian dan subjek penelitian selama pelaksanaan penelitian. Ada dua bentuk data yang diperoleh dalam penelitian ini yaitu, jawaban tes tertulis dan hasil wawancara. Tes yang dilakukan merupakan tes pemahaman konsep berupa pertanyaan dengan jumlah soal sebanyak 3 butir dan memuat kriteria teori APOS, diantaranya :

1. Tahap Aksi

Siswa melakukan perhitungan untuk mencari turunan fungsi tanpa mengetahui alasan menggunakan prosedur tersebut

2. Tahap Proses

- a) Siswa menentukan turunan fungsi dengan menggunakan berbagai cara, seperti berimajinasi untuk membayangkan prosedur/metode penyelesaian yang tepat.
- b) Siswa masih kesulitan jika diberikan permasalahan baru yang sedikit berbeda dengan contoh yang diberikan guru.

- c) Siswa masih belum mampu melibatkan definisi, teorema dan rumus-rumus yang berlaku pada turunan fungsi dalam kegiatan perhitungannya.

3. Tahap Objek

- a) Siswa menunjukkan kemampuannya melakukan perhitungan berdasarkan pada definisi, teorema dan rumus-rumus pada turunan fungsi
- b) Siswa mampu mengaplikasikan konsep turunan fungsi dalam kasus yang berbeda.

4. Tahap Skema

Siswa menunjukkan kemampuannya dalam membuat hubungan konsep turunan fungsi dengan konsep matematika yang lain (aljabar, suku banyak, akar/pangkat, persamaan garis, dll).

Berikut ini diuraikan lebih rinci data yang telah dikumpulkan dengan berbagai tahap pemahaman siswa pada saat menyelesaikan soal-soal turunan fungsi dalam kerangka Teori APOS. Untuk lebih memudahkan dalam memahami data, maka pemaparan data disajikan perbutir soal dalam tes tertulis materi turunan fungsi.

1. Paparan Data Hasil Tes dan Wawancara Pemahaman Siswa Berdasarkan Teori APOS pada Subjek Berkemampuan Tinggi

a. Siswa berinisial HRB

Berdasarkan hasil observasi HRB merupakan siswa yang memiliki kemampuan tinggi, dibuktikan ia peringkat tertinggi dikelasnya. Berdasarkan hasil tes dan wawancara dengan subjek HRB, peneliti membuat analisis pemahaman HRB terhadap materi turunan fungsi berdasarkan tahapan teori APOS.

Jawaban tertulis HRB soal nomer 1a

1. Turunan fungsi

a) $f(x) = 2x^2 \sqrt{x}$

$= 2x^2 x^{1/2}$

$= 2x^{5/2}$

$f'(x) = \frac{5}{2} \cdot 2x^{5/2-1}$

$= \frac{5}{2} \cdot 2x^{3/2}$

$= 5x^{3/2}$

HRB1A.T1

HRB1B.T2

Gambar 4.1 Jawaban tertulis HRB pada masalah nomor 1a

Dari jawaban tersebut terlihat bahwa HRB terlebih dahulu menyederhanakan fungsi supaya mudah untuk diturunkan [HRB1A.T1]. Setelah itu baru ia menurunkan turunan sesuai dengan aturan turunan [HRB1A.T2]. HRB dapat menuliskan simbol dengan benar dan mendapatkan jawaban yang benar. Dalam menentukan turunannya ia dapat melakukan aktifitas prosedural dengan benar. Hal ini dapat diperjelas dengan wawancara dengan HRB sebagai berikut.

Peneliti : *Coba lihat hasil pekerjaanmu, bagaimana kamu bisa*

	<i>mendapatkan jawaban seperti itu? Cara apa yang kamu pakai?</i>	
HRB	<i>: Pakai cara turunan yang biasa bu Shof sampaikan kak.</i>	[HRB1A.W1]
Peneliti	<i>: Bagaimana langkah-langkahmu menyelesaikan turunan ini?</i>	
HRB	<i>: Kalo mengerjakan inikan cuma tinggal pangkatnya dikali angka depan. Terus yang terakhir ini pangkatnya di - 1</i>	
Peneliti	<i>: Bisa di jelaskan lebih detail nggak ?</i>	
HRB	<i>: Inikan kalo akar x kan biar lebih mudah ngitungnya, akar x itukan sama kayak e.. x pangkat setengah. Terus pangkatnya dijumlah jadi dua setengah atau lima per dua.</i>	
Peneliti	<i>: Terus cara menurunkannya?</i>	
HRB	<i>: Cara menurunkannya itukan pangkatnya ditaruh depan, dikali dua, angkanya 2x. Terus pangkatnya dikurangi satu</i>	

Dari hasil wawancara tersebut, HRB dapat menjelaskan bagaimana langkah-langkah pengerjaan yang ia lakukan berdasarkan cara yang ia peroleh dari guru matematika. HRB mencontoh cara pengerjaan yang hampir sama dengan yang dicontohkan oleh guru matematika. Akan tetapi, dalam wawancara selanjutnya HRB tidak yakin ada cara lain yang dapat ia gunakan [HRB1A.W2]. Berikut petikan wawancara tersebut.

Peneliti	<i>: Kira-kira ada nggak cara lain untuk menurunkan fungsi ini?</i>	
HRB	<i>: Kalau sejauh ini teorinya masih itu yang dipakai.</i>	
Peneliti	<i>: Kalau seandainya menggunakan teorema kali itu bisa ndak?</i>	
HRB	<i>: Yang mana kak?</i>	
Peneliti	<i>: Yang $y = u \cdot v$ itu</i>	
HRB	<i>: ooh.. lupa kak. (Mengambil buku)</i>	
Peneliti	<i>: Nah, yang ini. Bisa nggak?</i>	
HRB	<i>: Nggak nggak bisa. Kan kalau.. kalau menurut pemahamanku u sama v itu kayak satu rumpun gitu lo kak</i>	[HRB1A.W2]
Peneliti	<i>: Kalo ini dimisalkan u dan v bisa nggak?</i>	
HRB	<i>: Belum tau. Belum pernah coba yang ini soalnya, Bu Shof ngajarnya yang kaya ada dua</i>	[HRB1A.W3]
	<i>eh kaya e bisa,</i>	
Peneliti	<i>: Coba deh kamu kerjakan kalau bisa,</i>	
HRB	<i>: Pake yang u kali v ?</i>	
Peneliti	<i>: Iya</i>	

Dari hasil wawancara tersebut terlihat bahwa HRB tidak yakin ada cara lain yang dapat ia gunakan untuk mencari nilai turunan [HRB1A.W3]. Ia belum bisa mengaplikasikan salah satu aturan yang terdapat dalam turunan. Hal ini menunjukkan HRB belum memiliki pemahaman konseptual yang baik. Selanjutnya, setelah HRB diberikan sebuah *clue* untuk mencari turunan menggunakan aturan kali, HRB dapat menyelesaikan soal dan mendapatkan nilai yang sama dengan yang ia dapatkan pertama kali.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^2 \sqrt{x} \\
 f'(x) &= u \cdot v \\
 u &= 2x^2 & v &= \sqrt{x} = x^{1/2} \\
 u' &= 4x & v' &= \frac{1}{2}x^{-1/2} \\
 f'(x) &= u'v + uv' \\
 &= 4x(\sqrt{x}) + 2x^2 \left(\frac{1}{2}x^{-1/2} \right) \\
 &= 4x^{3/2} + \cancel{2x^2} x^{3/2} \\
 &= 5x^{3/2} \\
 &= 5x\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

HRB1A.T3

Gambar 4.2 Jawaban ulang HRB pada masalah nomor 1a

HRB dapat menentukan nilai turunan dengan langkah-langkah prosedural yang benar. Ia juga dapat menjelaskannya secara lisan. Akan tetapi ia belum bisa menggunakan aturan turunan fungsi jika ia tidak diberikan *clue* diawal. Dari wawancara ia menjelaskan bahwa HRB belum pernah mencoba menggunakan cara tersebut [HRB1A.W3]. Dengan

demikian berarti pada soal nomor 1a pemahaman HRB berada pada tahap objek.

Jawaban tertulis HRB soal nomer 1b

$$b) g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$u = (x-1)^2 \quad v = x^2+1$$

$$u' = 2(x-1) \quad v' = 2x$$

$$= 2(x-1)$$

$$= 2x-2$$

$$g(x) = \frac{u}{v}$$

$$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(2x-2)(x^2+1) - (x-1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 4x - 2}{(x^2+1)^2}$$

HRB1B.T1
 HRB1B.T2
 HRB1B.T3
 HRB1B.T4
 HRB1B.T7

Gambar 4.3 Jawaban tertulis HRB pada masalah nomor 1b

Dari jawaban tertulis HRB, terlihat bahwa ia memisalkan terlebih dahulu fungsi tersebut dengan simbol u dan v [HRB1B.T1]. Setelah itu HRB menurunkan masing-masing pernyataan yang ia misalkan [HRB1B.T2]. Selanjutnya HRB menuliskan aturan turunan yang ia gunakan untuk mencari nilai turunan fungsinya [HRB1B.T3]. Hal tersebut dijelaskan oleh HRB dalam wawancara berikut.

Peneliti	: Nah sekarang nomor 1b, bagaimana kamu mendapatkan jawaban ini?	
HRB	: Kalo soal ini pake rumus itu kak, u per v.	[HRB1B.W1]
Peneliti	: Kenapa kamu pakai rumus itu ?	
HRB	: Ada rumusnya gitu kak	

Dari wawancara tersebut, terlihat bahwa HRB dapat mengklasifikasikan bentuk fungsi $g(x)$, sehingga HRB dapat menentukan turunan fungsi $g(x)$ dengan menggunakan teorema yang tepat [HRB1B.W1].

HRB menentukan turunan fungsi dengan menggunakan aturan bagi. Langkah pertama ia menurunkan dengan memisalkan pernyataan fungsi $g(x)$ dengan simbol u dan v . HRB dapat menjelaskan bagaimana langkah-langkahnya menentukan nilai turunan $g(x)$ dengan baik [HRB1B.W2]. Akan tetapi ketika ia sampai pada substitusi nilai $u'v - uv'$ ia tidak mensubstitusikan nilai v [HRB1B.T4]. Pada wawancara, ia memberikan alasan bahwa ia lupa [HRB1B.W3]. Berikut cuplikan wawancaranya.

Peneliti	: <i>Bagaimana rumusnya itu?</i>	
HRB	: <i>u aksen v min u v aksen per v kuadrat.</i>	[HRB1B.W2]
	: <i>Terus tinggal dimasukkan.</i>	
Peneliti	: <i>Oke. Terus?</i>	
HRB	: <i>u nya $2x - 2$ terus v nya emm</i>	
Peneliti	: <i>v nya mana?</i>	
HRB	: <i>Oh iya,, lupa kak</i>	[HRB1B.W3]
Peneliti	: <i>Coba kerjakan ulang sini.</i>	

HRB tidak mensubstitusikan pernyataan v hanya karena lupa. Untuk itu peneliti meminta HRB untuk mengerjakan ulang soal dengan benar. Setelah HRB mengerjakan ulang, ia mendapatkan jawaban sebagai berikut.

Handwritten mathematical work for problem 1b. The work shows the quotient rule and simplification steps. Two red boxes highlight specific parts:

HRB1B.T5

HRB1B.T6

Gambar 4.4 Jawaban ulang HRB pada masalah nomor 1b

Dari hasil pengerjaan ulang tersebut, terlihat HRB telah mensubstitusikan nilai v [HRB1B.T5]. Setelah itu HRB melakukan penyederhanaan matematika [HRB1B.T5]. Dari penyederhanaan pertama ke penyederhanaan kedua ia melakukan kesalahan. Operasi aljabar yang ia lakukan belum benar. Ia menyederhanakan $-(x^2 - 2x + 1) \cdot 2x$ menjadi $-2x^3 - 4x^2 + 2x$. Dari wawancara terlihat HRB tidak bisa memberikan penjelasan akan pekerjaannya tersebut [HRB1B.W4].

Peneliti	: <i>Terus dhek ini negatif ini berpengaruh nggak?</i>
HRB	: <i>Emmm....</i> [HRB1B.W4]

Selanjutnya pada jawabannya yang pertama ia juga melakukan kesalahan [HRB1B.T7].

Handwritten mathematical work showing the cancellation technique used by HRB in the first answer:

$$\frac{-2x^3 - 4x^2 + 4x - 2}{2x^2} = -2x^3 + 4x - 2$$

Gambar 4.5 Teknik kanselasi yang dilakukan HRB di soal 1b

HRB melakukan kanselasi pada pernyataan terakhir [HRB1B.T7], yang sebenarnya tidak ada aturan untuk melakukan kanselasi seperti itu. Dari wawancara, HRB ragu-ragu akan jawabannya. HRB mengatakan bahwa ia *ngawur* ketikan mengalkukan kaselasi tersebut [HRB1B.W5]. Sebagaimana wawancara HRB berikut.

Peneliti	: <i>Terus ini ada $-4x^2$ dan $2x^2$ dicoret bisa dijelaskan kenapa ini bisa dicoret?</i>
HRB	: <i>Ndak tahu saya</i>
Peneliti	: <i>Kamu dapat darimana? Apakah ada teorinya?</i>
HRB	: <i>Mungkin seharusnya nggak bisa kak. Tapi ini ngawur kak.</i>

[HRB1B.W5]

Berdasarkan hasil wawancara ini terlihat bahwa HRB sudah memiliki pemahaman terhadap konsep turunan dan mampu memilih aturan nama yang ia akan gunakan [HRB1B.W2]. Akan tetapi, HRB belum dapat melakukan aktifitas prosedural secara tepat. Ia masih mengalami kesalahan dalam langkah-langkah operasi aljabar dan kesalahan menggunakan aturan kanselasi [HRB1B.T7]. Dengan demikian berarti FI7 telah mampu menggunakan teorema turunan fungsi, tetapi ia masih melakukan kesalahan dalam langkah-langkah prosedural, sehingga HRB pemahamannya berada pada tahap objek.

Jawaban tertulis HRB soal nomer 2

$$2. f(x) = \sqrt[3]{(1+3x^2)^4}$$

$$= (1+3x^2)^{4/3}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3} (6x) (1+3x^2)^{4/3-1}$$

$$= \frac{4}{3} (6x) (1+3x^2)^{1/3}$$

$$= 4 (2x) (1+3x^2)^{1/3}$$

$$= 8x (1+3x^2)^{1/3}$$

$$f'(1) = 8(1) (1+3(1)^2)^{1/3}$$

$$= 8 (1+3)^{1/3}$$

$$= 8 (4)^{1/3}$$

$$= 8 \sqrt[3]{4}$$

$$u^n = n(u')(u)^{n-1}$$

Gambar 4.6 Jawaban tertulis HRB pada masalah nomor 2

Pada soal nomor 2 HRB mendapatkan jawaban yang benar [HRB2.T1]. Ia menggunakan aturan turunan yang benar. Sesuai aturan yang ia gunakan, ia membuat pernyataan fungsi $f(x)$ menjadi bentuk pangkat [HRB2.T2]. Setelah HRB mendapatkan nilai turunan $f(x)$, HRB melakukan substitusi nilai $x = 1$ ke persamaan $f'(x)$ [HRB2.T3]. Berikut petikan wawancara dengan HRB.

Peneliti	: <i>Bagaiman kamu mendapat jawaban ini?</i>	
HRB	: <i>Kan lihat soalnya kan ada akarnya, trus biar mudah akar itu dipangkatkan setengah. Jadi kalo gini pangkatnya empat per tiga gitu, kayanya.</i>	
	<i>Terus ya sudah dicari turunannya.</i>	[HRB2.W1]
Peneliti	: <i>Terus bagaimana kamu menurunkan bentuk ini?</i>	
HRB	: <i>Ya pake cara yang biasa, pangkatnya di ... oh pake u pangkat n</i>	
Peneliti	: <i>Pernah diberitahu nggak ini namanya aturan atau teorema apa gitu?</i>	
HRB	: <i>Emm... aturan turunan hehehe</i>	
Peneliti	: <i>Nggak pernah di beritahu ya, ini namanya aturan rantai. Pernah dengar?</i>	
Rhn	: <i>Heheh .. enggak kak.</i>	[HRB2.W2]
Peneliti	: <i>Terus hasil akhirnya?</i>	
HRB	: <i>Jadi nilai x-nya dimasukkan ke sini. Hasil akhirnya aku dapat delapan akar empat</i>	
Peneliti	: <i>Bisa lebih sederhana lagi nggak?</i>	

HRB	: <i>Emm...</i>
Peneliti	: <i>Ini bisa nggak di selesaikan lagi?</i>
HRB	: <i>Ee berarti ... eem sudah kak</i>

Dari hasil wawancara tersebut terlihat bahwa HRB mampu melakukan analisa yang cukup baik berkenaan dengan penggunaan aturan tersebut. HRB sudah menunjukkan pemahamannya dari segi prosedural, meskipun HRB agak ragu mengubah bentuk akar $\sqrt[3]{(1 + 3x^2)^4}$ menjadi bentuk $(1 + 3x^2)^{\frac{4}{3}}$. Sehingga dia kurang percaya diri ketika diwawancara [HRB2.W1]. Akan tetapi HRB telah memahami apa yang ditanyakan pada soal, aturan mana yang ia harus gunakan, meskipun ia belum tahu nama dari aturan turunan tersebut [HRB2.W2].

Dari pernyataan-pernyataan yang telah dikemukakan, menyiratkan bahwa HRB telah memiliki pemahaman secara prosedural dan konseptual. Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat pemahaman HRB berada pada tahap skema.

Jawaban Tertulis HRB Soal Nomer 3

$f(x) = x(x-3) + 2$ di titik $(1,0)$
 $x_1 = 1 \quad y_1 = 0$
 $f(x) = x(x-3) + 2$
 $= x^2 - 3x + 2$ **HRB3.T1**
 $f'(x) = y' = 2x - 3$ **HRB3.T2**
 $m_{f'(1)} = 2(1) - 3$
 $= 2 - 3$
 $= -1$
 pgs $(1,0)$
 $y - y_1 = m(x - x_1)$
 $y - 0 = -1(x - 1)$
 $y - 0 = -x + 1$
 $y + x - 1 = 0$
 $x + y - 1 = 0$

Gambar 4.7 Jawaban tertulis HRB pada masalah nomor 3

Terlihat bahwa HRB dapat menentukan persamaan garis singgung dengan menggunakan metode turunan fungsi dengan benar dan tepat. Pertama-tama HRB menyederhanakan fungsi $f(x)$ [HRB3.T1], selanjutnya ia mendapatkan turunan $f(x)$ [HRB3.T2]. Nilai $x = 1$ ia masukkan ke persamaan $f'(x)$. HRB juga dapat menjelaskan setiap langkah yang ia lakukan. Sebagaimana petikan wawancara sebagai berikut:

Peneliti	: Pada soal nomor 3 apa yang ditanyakan dalam soal?
HRB	: Mencari anu pgs apaitu persamaan garis singgung
Peneliti	: Kamu bisa nggak menjelaskan hubungan persamaan garis turunan dan titik singgung?
HRB	: Eee... kalo secara teori belum, ee... nggak terlalu paham kak. Nggak terlalu dijelaskan kaya teorinya...
Peneliti	: Terus apa yang diketahui dalam soal?
HRB	: yang di ketahui itu $f(x)$
Peneliti	: Bagaiman kamu memperoleh jawaban ini?
HRB	: Eee... yang awalnya biasa, kayak mencari turunan dulu. Dari turunan itu buat cari gradien. Gradiennya nanti ee dimasukkan x nya. [HRB3.W1]

Kan dititik (1,0) berartikan x-nya satu y-nya nol.

Wawancara tersebut menunjukkan bahwa HRB dapat melakukan aktifitas prosedural dengan benar. Bahkan ia dapat menjelaskan bagaimana langkah-langkah yang ia gunakan berdasarkan teorema [HRB3.W1].

Meskipun pekerjaan HRB benar, namun HRB belum bisa menjelaskan alasan penggunaan konsep turunan untuk menentukan persamaan garis singgung. HRB belum bisa menjelaskan hubungan konsep turunan dengan persamaan garis singgung [HRB3.W2]. Ia juga tidak mengerti arti dari gradien garis. Hal tersebut ia katakan sebagaimana dalam wawancara berikut.

Peneliti : *Apa hubungan gradien dengan turunan dek?*
 HRB : *Nggak tahu kak*
 Peneliti : *Kamu tahu arti apa itu gradien garis?*
 HRB : *... ndak tahu kak .. untuk apa ...ndak terlalu tahu konsep itu lo kak masalahnya.* [HRB3.W2]
 Peneliti : *Kamu bisa nggak menggambarkan kurva ini?*
 HRB : *Aku ndak terlalu faham kak.*

Dari petikan wawancara tersebut, HRB belum memahami konsep persamaan garis singgung dan kaitannya dengan konsep turunan. Akan tetapi ia dapat mengerjakan soal serta menggunakan teorema turunan dengan benar. Dalam hal ini HRB berada pada tahap objek, yaitu memahami secara prosedural dan konseptual akan tetapi belum dapat mengaitkannya dengan konsep matematika yang lain.

b. Siswa berinisial SHF

Berdasarkan hasil observasi SHF merupakan siswa yang memiliki kemampuan tinggi, dibuktikan ia memiliki nilai yang tergolong tinggi di ulangan matematika. Berdasarkan hasil tes dan wawancara dengan subjek SHF, peneliti membuat analisis pemahaman SHF terhadap materi turunan fungsi berdasarkan tahapan teori APOS.

Berikut jawaban tertulis SHF untuk soal nomor 1a

Handwritten solution for problem 1a:

$$\begin{aligned}
 1. a. f(x) &= 2x^2 \sqrt{x} && \text{SHF1A.T1} \\
 &= 2x^{2 \cdot \frac{1}{2}} \\
 &= 2x^{\frac{4}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \\
 &= 2x^{\frac{5}{2}} \\
 f'(x) &= 2x^{\frac{5}{2}} && \text{SHF1A.T2} \\
 f'(x) &= 2 \left(\frac{5}{2} \right) x^{\frac{5}{2} - \frac{2}{2}} \\
 &= 5x^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

Gambar 4.8 Jawaban tertulis SHF pada masalah nomor 1a

Dari jawaban tersebut terlihat bahwa SHF terlebih dahulu menyederhanakan fungsi sebelum dia menurunkannya [SHF1A.T1]. SHF mengubah bentuk pernyataan $f(x)$ menjadi bentuk pangkat [SHF1A.W1].

Berikut penjelasan pengerjaan SHF dalam cuplikan wawancara.

Peneliti	: Soal nomor satu, bagaimana kamu mendapatkan jawabanmu?
SHF	: Ya ini lo kak. Ini x akar ini jadi x pangkat satu per dua. Terus setelah itu, kan kalo dikali jadi tambah gitu lo kak. Terus diturunkan. Dua kali ini. Terus x terus lima perdua min, kan

satu sama dengan min dua per dua. [SHF1A.W1]

Dari jawaban tertulis, tampak SHF sudah menuliskan simbol $f'(x)$ pada hasil penyederhanaannya [SHF1A.T1]. Oleh karena itu perlu penjelasan dari SHF terkait hal ini. Berikut cuplikan wawancara SHF.

Peneliti : *Terus yang $f'(x) = 2x^{\frac{5}{2}}$ itu benar?*
 SHF : *Iya kak f aksen x* [SHF1A.W2]
 Peneliti : *Setelah itu?*
 SHF : *Sudah hasilnya itu.*

Wawancara tersebut menunjukkan bahwa SHF belum sepenuhnya memahami simbol $f'(x)$. SHF menganggap hasil manipulasi matematikanya terhadap $f(x)$ tersebut telah dapat dikatakan sebagai $f'(x)$ [SHF1A.W2]. Dalam hal ini, SHF hanya melakukan kegiatan prosedural dan dan memahaminya hanya sebatas pemahaman prosedural, tanpa ada pemikiran yang lebih lanjut di dalam struktur kognitifnya (perilaku yang tidak sadar). Sehingga meski jawaban akhir SHF benar, tetapi proses atau langkah-langkah jawaban SHF belum berdasarkan pada definisi dan teorema turunan fungsi. Dapat dikatakan pemahaman SHF berada pada tahap proses.

Jawaban tertulis SHF untuk soal nomor 1b

Handwritten work for finding the derivative of $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ using the quotient rule. The work shows several steps with errors circled in red. Labels SHF1B.T1 through SHF1B.T4 point to these errors.

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$u = (x-1)^2 \quad u' = (x-1)^{2-1} = 2(x-1) = 2x-2$$

$$v = x^2+1 \quad v' = 2x$$

$$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(2x-2)(x^2+1) - (x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x - 2x^2 - 2 - 2x^3 - 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 4x - 2}{(x^2+1)^2}$$

SHF1B.T2 points to the expansion of $(x-1)(x-1)$.
 SHF1B.T1 points to the subtraction step $(2x-2)(x^2+1) - (x^2+1)(2x)$.
 SHF1B.T3 points to the expansion of $(2x-2)(x^2+1)$.
 SHF1B.T4 points to the final simplified result $\frac{-2x^2 - 4x - 2}{(x^2+1)^2}$.

Gambar 4.9 Jawaban tertulis SHF pada masalah nomor 1b

Apabila dilihat secara sekilas, jawaban SHF di atas tergolong pada tahap aksi. Tetapi jika dicermati lebih lanjut, SHF memiliki pemahaman yang lebih daripada siswa yang berada pada tahap aksi. SHF dapat menentukan dan menjelaskan aturan yang ia gunakan untuk mencari nilai turunan fungsi [SHF1B.W1]. Hanya saja ia melakukan kesalahan pada proses penyederhanaan yang ia lakukan [SHF1B.T1]. Hal ini karena SHF kurang memahami langkah-langkah prosedural yang terdapat dalam turunan fungsi. Akibatnya jawaban yang ia peroleh salah. Berikut wawancara dengan SHF.

Peneliti : Nomor 1b kamu pake aturan atau rumus apa dhek?

SHF	: <i>Ini lo. u aksen v min u v aksen per v kuadrat. [SHF1B.W1]</i>
Peneliti	: <i>u nya yang mana dan v-nya yang mana ?</i>
SHF	: <i>u, u-nya yang ini. v-nya yang ini. Terus diturunkan, ini, ini, ini... ini, ini. Dimasukkan, u aksennya ini, v-nya ini. Dukurangi u ...</i>
Peneliti	: <i>u-nya yang mana?</i>
SHF	: <i>ini.</i>
Peneliti	: <i>$x^2 + 1$?</i>
SHF	: <i>Iya. Ini tak buat gini lo kak. Boleh to? Iya tak buat gini.</i>
Peneliti	: <i>Oo begitu...</i>

Dalam wawancara di atas SFH dapat menjelaskan bagaimana proses ia menurunkan fungsi. Terlihat pada jawabannya bahwa sebelum ia mensubstitusikan nilai v , SHF menyederhanakannya terlebih dahulu [SHF1B.T2]. Akan tetapi penyederhanaan yang ia lakukan menghasilkan jawaban yang salah [SHF1B.T3]. Sehingga ketika dimasukkan ke dalam persamaan turunan fungsi tidaklah menghasilkan jawaban yang tepat [SHF1B.T1]. Selain itu ia juga masih kurang terampil dalam perkalian aljabar [SHF1B.T4]. Hal tersebut dapat dilihat pada jawabannya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & (x-1)(x-1) \\ & = x^2 - x - x + 1 \\ & = x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = (2x-2)(x^2+1) \\ & = 2x^3 - 2x - 2x^2 - 2 \end{aligned}$$

Gambar 4.10 Teknik aljabar yang digunakan SHF pada soal 1b

Hal ini menunjukkan bahwa SHF telah sampai pada tahap objek, meskipun SHF belum mencapai pada tahap proses. SHF telah memahami dan dapat menentukan nilai turunan fungsi berdasarkan teorema dalam

turunan, tetapi dalam langkah-langkah prosedur SHF masih melakukan kesalahan yang menyebabkan hasil jawabannya salah.

Jawaban tertulis SHF untuk soal nomor 2

The image shows handwritten mathematical work on a grey background. It consists of several lines of equations:

- Line 1: $(2) f(x) = \sqrt[3]{(1+3x^2)^4} = (1+3x^2)^{4/3}$. A red box labeled "SHF2.T2" is placed to the right of this line.
- Line 2: $f'(x) = \frac{4}{3} (1+3x^2)^{4/3 - 3/3}$. A red box labeled "SHF2.T3" is placed to the right of this line.
- Line 3: $= \frac{4}{3} (3 \cdot 2x^{2-1}) \cdot (1+3x^2)$
- Line 4: $= \frac{4}{3} (6x) \cdot (1+3x^2)^{1/3}$
- Line 5: $= 4(2x) (1+3x^2)^{1/3}$
- Line 6: $= 8x (1+3x^2)^{1/3}$
- Line 7: $= 8x \sqrt[3]{(1+3x^2)}$
- Line 8: $f(1) = 8(1) \sqrt[3]{(1+3(1)^2)}$
- Line 9: $= 8 \sqrt[3]{9}$. A red box labeled "SHF2.T1" is placed to the right of this line.

Gambar 4.11 Jawaban tertulis SHF pada masalah nomor 2

Dari jawaban di atas, terlihat bahwa hasil pekerjaan SHF benar. Ia telah menuliskan nilai turunan dengan prosedur yang tepat [SHF2.T1]. SHF telah dapat menggunakan teorema turunan yang tepat dan dapat menjelaskannya [SHF2.T3]. Ia juga telah dapat menggunakan konsep eksponen untuk menentukan nilai turunan fungsi [SHF2.T2]. Sehingga dapat dikatakan ia telah menggunakan langkah-langkah prosedural dengan benar dan dapat memahami penggunaan konsep turunan fungsi, serta dapat

mengaitkannya dengan konsep matematika lain, yaitu konsep eksponen dan konsep fungsi. Lebih jelasnya berikut wawancara dengan SHF .

Peneliti	: <i>Nomor dua kamu pake teorema apa?</i>
SHF	: <i>Anu, kan ini akarnya dihilangkan jadinya pangkat ini.</i>
Peneliti	: <i>kamu menurunkannya pake apa?</i>
SHF	: <i>Ya di turunkan kaya ini. Seperti ini.</i>
Peneliti	: <i>Pakai aturan apa ?</i>
SHF	: <i>Itu u pangkat n</i> [SHF2.W1]

Dari hasil jawaban tertulis dan wawancara dengan SHF, dapat di ketahui bahwa SHF telah mampu menemukan nilai turunan fungsi dengan langkah-langkah prosedural yang benar serta dapat mengaitkannya dengan konsep eksponen dan fungsi [SHF2.W1]. Sehingga dalam hal ini, pemahaman SHF telah mencapai tahap skema.

Jawaban tertulis SHF untuk soal nomor 3

Handwritten solution for finding the tangent line to the parabola $f(x) = x(x-3) + 2$ at the point $(1, 0)$.

3. $f(x) = x(x-3) + 2$
 $= x^2 - 3x + 2$ [SHF3.T1]

di $(1, 0)$
 $x_1 = 1 \quad y_1 = 0$ [SHF3.T2]

$f'(x) = 2x - 3$ [SHF3.T3]

$m = f'(1) = 2(1) - 3$
 $= 2 - 3 = -1$ [SHF3.T4]

$y - y_1 = m(x - x_1)$
 $y - 0 = -1(x - 1)$
 $y - 0 = -x + 1$
 $y - 0 + x - 1 = 0$
 $x + y - 1 = 0$

Gambar 4.12 Jawaban tertulis SHF pada masalah nomor 3

Dari jawaban tersebut terlihat bahwa SHF terlebih dahulu menuliskan dan menyederhanakan fungsi menjadi bentuk yang lebih sederhana [SHF3.T1]. Setelah itu SHF memisalkan titik singgung dengan x_1 dan y_1 [SHF3.T1]. Terlihat juga, setelah itu SHF menurunkan fungsi yang telah ia sederhanakan terlebih dahulu [SHF3.T1]. Semula SHF bingung untuk mencari turunan fungsi [SHF3.W1]. Sebagaimana yang ia katakan dalam wawancara berikut.

Peneliti	: Apa yang di tanyakan dalam soal?
SHF	: ... mencari ... persamaan garis singgung

Peneliti	: <i>Apa langkah awalmu untuk mencari persamaan garis singgung?</i>
SHF	: <i>Ga tau. Ini bingung aku kemarin. Ee... ini pokok ini dikali ini. Ini salah e kak? Setelah itu 1 itu x 0 itu y. Setelah itu ini diturunkan. Untuk mencari m.</i> [SHF3.W1]

Meski awalnya ia kebingungan mencari nilai turunan fungsi, akhirnya ia dapat mencari turunan fungsinya dengan prosedur yang benar. Dalam wawancara, ia juga masih terdengar kurang percaya dengan hasil penurunan fungsi tersebut.

Selanjutnya setelah SHF menemukan turunan fungsi ia akan mencari nilai m [SHF3.T4]. Akan tetapi setelah SHF ditanya apa itu m , ia tidak tahu apa yang dimaksud dengan m [SHF3.W2]. SHF hanya mencari tanpa mengetahui arti dari apa yang ia cari. Ia sama sekali tidak tahu tentang makna m [SHF3.W3]. Sebagaimana wawancara berikut.

Peneliti	: <i>m itu apa dhek?</i>
SHF	: <i>Emmm... m... m... emm</i>
Peneliti	: <i>m itu gradien garis. Gradien itu apa dhek?</i>
SHF	: <i>Gradien, gradien itu apa,, apa kak? Gradien itu apa kak. Gak tau.</i> [SHF3.W2]
Peneliti	: <i>Gradien itu kemiringan garis. Lalu untuk apa kamu mencari gradien ?</i>
SHF	: <i>Kan, apa rumusnya kan ini, jadinya saya mencari ini dulu.</i>
Peneliti	: <i>Terus apa hubungan gradien dengan turunan? Kok kamu mencari gradien dengan mencari turunan?</i>
SHF	: <i>Hubungan gradien dengan turunan,, gak tau..gak tahu.</i> [SHF3.W3]

SHF benar-benar tidak tahu arti dari gradien garis dan juga simbolnya, yaitu m [SHF3.W2]. Ia hanya sekedar melakukan perhitungan-perhitungan secara eksplisit tanpa mengetahui makna dari simbol-simbol yang ia gunakan. selain itu SHF tidak mengetahui hubungan gradien garis

dengan konsep turunan [SHF3.W2]. Ia tidak bisa menjelaskan mengapa ia menggunakan konsep turunan dalam menentukan persamaan garis singgung. Sehingga pemahaman SHF berada pada tahap proses.

Berdasarkan paparan data di atas dapat diketahui indikator pemahaman siswa berdasarkan teori APOS pada subjek HRB dan SHF dalam penyelesaian soal tes disajikan dalam tabel 4.3 berikut.

Tabel 4.3 Pemahaman Siswa Berkemampuan Tinggi Berdasarkan Teori APOS

Tahap	Indikator Pemahaman Konsep Berdasarkan Teori APOS		
	Subjek HRB	Subjek SHF	Subjek Berkemampuan Tinggi
<i>Action</i> (Aksi)	a. Mampu melakukan perhitungan untuk mencari turunan fungsi tanpa mengetahui alasan menggunakan prosedur tersebut	a. Mampu melakukan perhitungan untuk mencari turunan fungsi tanpa mengetahui alasan menggunakan prosedur tersebut	a. Mampu melakukan perhitungan untuk mencari turunan fungsi tanpa mengetahui alasan menggunakan prosedur tersebut
<i>Process</i> (Proses)	a. Mampu menentukan turunan fungsi dengan menggunakan berbagai cara, seperti berimajinasi untuk membayangkan aturan/teorema penyelesaian yang tepat. b. Masih kesulitan jika diberikan permasalahan baru yang sedikit berbeda dengan	a. Mampu menentukan turunan fungsi dengan menggunakan berbagai cara, seperti berimajinasi untuk membayangkan aturan/teorema penyelesaian yang tepat. b. Masih kesulitan jika diberikan permasalahan baru yang sedikit berbeda dengan	a. Mampu menentukan turunan fungsi dengan menggunakan berbagai cara, seperti berimajinasi untuk membayangkan aturan/teorema penyelesaian yang tepat. b. Masih kesulitan jika diberikan permasalahan baru yang sedikit berbeda dengan contoh yang

	<p>contoh yang diberikan guru.</p> <p>c. Mampu melibatkan definisi, teorema dan rumus-rumus yang berlaku pada turunan fungsi dalam kegiatan perhitungannya.</p>	<p>contoh yang diberikan guru.</p> <p>c. Mampu melibatkan definisi, teorema dan rumus-rumus yang berlaku pada turunan fungsi dalam kegiatan perhitungannya.</p>	<p>diberikan guru.</p> <p>c. Mampu melibatkan definisi, teorema dan rumus-rumus yang berlaku pada turunan fungsi dalam kegiatan perhitungannya.</p>
<i>Object</i> (Objek)	<p>a. Mampu menunjukkan kemampuannya melakukan perhitungan berdasarkan pada definisi, teorema dan rumus-rumus pada turunan fungsi</p> <p>b. Belum mampu mampu mengaplikasikan konsep turunan fungsi dalam kasus yang berbeda.</p>	<p>a. Mampu menunjukkan kemampuannya melakukan perhitungan berdasarkan pada definisi, teorema dan rumus-rumus pada turunan fungsi</p> <p>b. Belum ampu mampu mengaplikasikan konsep turunan fungsi dalam kasus yang berbeda.</p>	<p>a. Mampu menunjukkan kemampuannya melakukan perhitungan berdasarkan pada definisi, teorema dan rumus-rumus pada turunan fungsi</p> <p>b. Belum ampu mampu mengaplikasikan konsep turunan fungsi dalam kasus yang berbeda.</p>
<i>Scheme</i> (Skema)	<p>a. Belum mampu menunjukkan kemampuannya dalam membuat hubungan konsep turunan fungsi dengan konsep matematika yang lain (aljabar, suku banyak, akar/pangkat, persamaan garis, dll).</p>	<p>a. Belum mampu menunjukkan kemampuannya dalam membuat hubungan konsep turunan fungsi dengan konsep matematika yang lain (aljabar, suku banyak, akar/pangkat, persamaan garis, dll).</p>	<p>a. Belum mampu menunjukkan kemampuannya dalam membuat hubungan konsep turunan fungsi dengan konsep matematika yang lain (aljabar, suku banyak, akar/pangkat, persamaan garis, dll).</p>

2. Paparan Data Hasil Tes dan Wawancara Pemahaman Siswa

Berdasarkan Teori APOS pada Subjek Berkemampuan Sedang

a. Siswa berinisial AFL

Berdasarkan hasil observasi AFL merupakan siswa yang memiliki kemampuan sedang berdasarkan pengakuan guru kelas. Berdasarkan hasil tes dan wawancara dengan subjek AFL, peneliti membuat analisis pemahaman AFL terhadap materi turunan fungsi berdasarkan tahapan teori APOS.

Jawaban tertulis AFL untuk soal nomor 1a

Handwritten mathematical work on a chalkboard showing the simplification of a function and its derivative. The first line shows $f(x) = 2x^2\sqrt{x} = 2x^{5/2}$ with a red box labeled AFL1A.T1. The second line shows $f'(x) = 2 \cdot (5/2) \cdot x^{5/2-1} = 5x^{3/2} = 5x\sqrt{x}$ with a red box labeled AFL1A.T2.

Gambar 4.13 Jawaban tertulis AFL pada masalah nomor 1a

Dari jawaban tertulis AFL terlihat bahwa ia menyederhanakan fungsi $f(x)$ terlebih dahulu sebelum dia menurunkannya [AFL1A.T1]. AFL memproses penyederhanaan fungsi secara implisit. AFL juga telah memahami konsep dari turunan, yang ditunjukkan dengan penulisan terkait simbol $f(x)$ dan $f'(x)$ dengan benar. AFL terlihat terampil dalam menurunkan fungsi sederhana seperti ini [AFL1A.T1]. Berikut wawancara dengan AFL.

Peneliti	: <i>Bagaimana kamu mendapatkan jawabanmu?</i>
AFL	: <i>Ini dirubah dulu jadi ini. Terus mencari f aksennya ini.</i>
Peneliti	: <i>Mencari f aksennya bagaimana?</i>
AFL	: <i>Ini dua kali pangkatnya x, dikali x pangkat ini dikurangi satu. Jadinya lima x pangkat tiga per dua, sama dengan lima x akar x.</i> [AFL1A.W1]

Dari jawaban tertulis dan wawancara dengan AFL terlihat bahwa AFL telah memahami konsep turunan dengan benar [AFL1A.W1].

Langkah-langkah prosedural yang ia lakukanpun juga telah tepat. Oleh karena itu pemahaman AFL telah mencapai tahap objek.

Jawaban tertulis AFL untuk soal nomor 1b

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$u = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \quad v = x^2 + 1$$

$$u' = 2x - 2 \quad v' = 2x$$

$$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(2x-2)(x^2+1) - (x^2-2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(2x^2+2x-2x^2+2) - (2x^2-4x+2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(2x+2) - (2x^2-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2x^2+2} = (2x^2+2)^{-1}$$

Gambar 4.14 Jawaban tertulis AFL pada masalah nomor 1b

Terlihat dari jawaban AFL bahwa terlebih dahulu ia memisalkan bentuk fungsi $g(x)$ dengan menggunakan simbol u dan v [AFL1B.T1]. Setelah itu AFL menurunkan masing-masing pernyataan [AFL1B.T2]. Selanjutnya AFL menuliskan rumus turunan yang ia gunakan untuk mencari nilai dari turunan $g(x)$. AFL mensubstitusikan u dan v ke dalam rumus [AFL1B.T3]. Berikut penjelasan AFL tentang langkah-langkahnya mengerjakan dalam wawancara.

Peneliti	: Bagaimana kamu mencari turunan dari $g(x)$?
AFL	: Saya pakai rumus u per v . Yang ini dimisalkan u dan ini dimisalkan v . Setelah itu masing-masing dicari turunannya. [AFL1B.W1]
Peneliti	: Lalu?
AFL	: g aksen x sama dengan ini, terus dimasukkan ininya. Yang ini dikali ini, ini. Yang ini kali ini, ini. Ini juga

	<i>begitu. Hasilnya ini kak.</i>
Peneliti	: <i>Jadi jawababmu seperti itu? Sudah selesai?</i>
AFL	: <i>Oo... ini bisa seperti ini kak.</i>
Peneliti	: <i>$2x^2 + 2^{-1}$? itu ada tanda kurungnya nggak?</i>
AFL	: <i>Hooh kak, iya ... maafkan saya. Hehehe...</i>

Meskipun AFL dapat menjelaskan langkah-langkahnya dalam mencari nilai turunan berdasarkan teorema benar [AFL1B.W1], namun AFL belum dapat melakukan langkah-langkah prosedural dengan benar. Terlihat pada jawaban tertulisnya [AFL1B.T4].

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2x-2(x^2+1) - (x^2-2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{(2x^2+2x-2x^2+1) - (2x^2-4x+2x)}{(x^2+1)^2}
 \end{aligned}$$

Gambar 4.15 Kesalahan AFL dalam menggunakan prosedur aljabar pada soal nomor 1b

AFL masih salah dalam melakukan perkalian aljabar [AFL1B.T4]. AFL juga masih salah dalam menuliskan perkalian aljabar tersebut. Sehingga hal tersebut menyebabkan jawaban akhirnya salah [AFL1B.T2]. Dari uraian diatas tergambar bahwa tingkat pemahaman AFL masih berada pada tahap aksi.

Jawaban tertulis AFL untuk soal nomor 2

$$\textcircled{2} f(x) = \sqrt[3]{(1+3x^2)^4} = (1+3x^2)^{4/3} \quad \text{AFL2.T1}$$

$$a = 1$$

$$n = 4/3$$

$$u = 1+3x^2$$

$$u' = 6x \quad \text{AFL2.T2}$$

$$f'(x) = 1 \cdot 4/3 \cdot 6x (1+3x^2)^{4/3-1} \quad \text{AFL2.T3}$$

$$= 4/3 \cdot 6x (1+3x^2)^{1/3}$$

$$= 4/3 \cdot (6x+18x^2)^{1/3}$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt[3]{6x+18x^2}$$

Gambar 4.16 Jawaban tertulis AFL pada masalah nomor 2

Pada soal nomor dua, AFL terlebih dahulu mengubah fungsi $f(x)$ menjadi bentuk pangkat [AFL2.T1]. Selanjutnya AFL menuliskan apa saja yang diketahui dalam soal ia menguraikannya satu-satu dengan menggunakan simbol a , n , u , dan u' [AFL2.T2]. Langkah yang ia lakukan ini telah benar. Berikut penjelasan AFL dalam wawancara.

Peneliti	: Apa langkah awal yang kamu lakukan untuk menjawab soal ini?
AFL	: Di... anu. Bentuknya dirubah.
Peneliti	: Caranya merubah bagaimana?
AFL	: Yang dalam kurung di kurung, terus pangkat yang dalam akar ini ditaruh sebagai pangkat pembilang. Sedangkan yang ini sebagai penyebut pangkat. [AFL2.W1]
Peneliti	: Terus cara menurunkannya, bagaimana?
AFL	: Pake rumus $a n u$ aksen n pangkat min satu. [AFL2.W2]
Peneliti	: Benar seperti itu?
AFL	: Eee.. bukan. Gini kak, $a n u$ aksen u pangkat $n-1$.

Dalam cuplikan wawancara tersebut, AFL terlihat telah terampil dalam mengubah bentuk akar ke dalam bentuk pangkat [AFL2.W1]. AFL dapat menjelaskan aturan yang terdapat dalam konsep pangkat. Aturan turunan yang AFL gunakan juga telah tepat [AFL2.W2]. Akan tetapi

dalam proses pengerjaan turunan AFL melakukan kesalahan lagi. Seperti yang tergambar pada jawaban tertulisnya berikut [AFL2.T3].

The image shows a handwritten derivation of the derivative of $6x(1+3x^2)^{1/3}$. The steps are as follows:

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot 6x(1+3x^2)^{\frac{4}{3}-1} \\
 &= \frac{4}{3} \cdot 6x(1+3x^2)^{\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{4}{3} \cdot (6x+18x^2)^{\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{4}{3} \sqrt[3]{(6x+18x^2)}
 \end{aligned}$$

A red rectangular box is drawn around the text "AFL2.T4" to the right of the second line of the derivation.

Gambar 4.17 Kesalahan AFL pada masalah nomor 2

AFL melakukan kesalahan pada pengoperasian aljabar $\frac{4}{3} \cdot 6x \cdot (1+3x^2)^{\frac{1}{3}}$. AFL mengalikakan $6x \cdot (1+3x^2)^{\frac{1}{3}}$ dengan menggunakan sifat distributif, yang sebenarnya tidak boleh ia lakukan. Tampaknya terjadi kerancuan dalam benak AFL. AFL mengatakan pengerjaan tersebut benar seperti yang telah ia lakukan pada soal-soal yang serupa. Kemungkinan besar AFL belum menyadari bahwa bentuk pernyataan tersebut berbeda.

Jawaban yang dihasilkan ALF sebenarnya belum sesuai dengan yang di tanyakan dalam soal. Seharusnya ALF belum selesai menjawab, ia masih harus mencari nilai turunan ketika nilai $x = 1$. AFL tidak memperhatikan apa yang diminta didalam soal sehingga jawaban yang dihasilkan belum selesai [AFL2.W3]. Berikut cuplikan wawancara AFL terkait hal tersebut.

<p>Peneliti : <i>Apakah pekerjaanmu sudah selesai?</i> AFL : <i>Sudah kak.</i> Peneliti : <i>Coba lihat disoal, apa yang sebenarnya yang ditanyakan di soal?</i></p>
--

AFL	: Mencari nilai turunan $f(x)$.
Peneliti	: ... ketika $x = 1$.
AFL	: Loh.. o iya. Kamarin aku nggak baca lo kak. Kan cepet-cepet ngerjakan ini. [AFL2.W3]

AFL tidak cermat dalam membaca soal. Ia hanya langsung mengerjakan soal tanpa tahu apa yang diminta di soal. Dengan kata lain, AFL sebatas melakukan aktifitas prosedural dan belum memahami langkah-langkah prosedural yang ia lakukan. Berarti, pemahaman yang dimiliki AFL masih pada tahap aksi.

Jawaban tertulis AFL untuk soal nomor 3

$$\textcircled{3} f(x) = x(x-3) + 2 ; (1,0)$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$m = f'(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 3 = -1(x - 2)$$

$$y + 3 = -x + 2$$

$$y + x - 2 + 3 = 0$$

$$y + x + 1 = 0$$

$$x + y + 1 = 0$$

Gambar 4.18 Jawaban tertulis AFL pada masalah nomor 3

Dari jawaban tertulis tersebut terlihat bahwa, AFL terlebih dahulu menyederhanakan $f(x)$ menggunakan sifat distributif serta menuliskan titik $(1,0)$ [AFL3.T1]. Selanjutnya AFL menurunkan fungsi $f(x)$ menggunakan konsep turunan [AFL3.T2]. Setelah itu AFL mencari nilai m dengan mensubstitusikan nilai $x = 1$ ke dalam $f'(x)$ [AFL3.T3]. Hal ini AFL jelaskan pada cuplikan wawancara berikut.

Peneliti	: Bagaimana dengan nomor tiga? Apa yang ditanyakan dalam soal?
----------	--

AFL	: <i>Persamaan garis singgung</i>
Peneliti	: <i>Bagaimana langkah awal kamu mengerjakan ini?</i>
AFL	: <i>Mencari x_1 dulu, y_1. Terus turunannya $f(x)$ itu.</i>
Peneliti	: <i>Setelah itu turunannya untuk apa?</i>
AFL	: <i>Turunannya dikasihkan anu ... apa ya kan, untuk cari m. [AFL3.W1]</i>

Meskipun AFL menjelaskannya dengan jelas bagaimana langkah-langkahnya mengerjakan, AFL belum memahami apa yang ia lakukan [AFL3.W1]. Ketika ditanya terkait pengertian dari m , AFL tidak mengetahui artinya. AFL juga tidak tahu makna dari gradien [AFL3.W2]. Berikut cuplikan wawancaranya.

Peneliti	: <i>m-nya itu apa?</i>
AFL	: <i>m-nya itu garis singgung...? ...apa garis tengah ? apa mbk?</i>
Peneliti	: <i>Gradien?</i>
AFL	: <i>Gradienn, ya.</i>
Peneliti	: <i>Apa itu gradien ?</i>
AFL	: <i>Gradien itu garis yang membelah... apa itu lo mbk ... [AFL3.W2]</i>
Peneliti	: <i>Garis yang mana? Apa garis vertikal horizontal itu?</i>
AFL	: <i>Ya kayae...</i>
Peneliti	: <i>Yang sumbu x apa yang y ?</i>
AFL	: <i>x. Eh yang y, yang y. [AFL3.W3]</i>
Peneliti	: <i>Lalu gradiennya ketemu berapa?</i>
AFL	: <i>Ketemu -1</i>

AFL dengan ragu-ragu memberikan penjelasan bahwa yang dimaksud dengan gradien adalah salah satu sumbu koordinat yang membagi bidang kartesius. AFL menunjukkan gradien merupakan sumbu- y [AFL3.W3]. Dari wawancara AFL tersebut dapat dilihat bahwa ia salah memaknai apa itu gradien. Pemahaman AFL terhadap konsep persamaan

garis belum sempurna. Hal tersebut menyebabkan AFL belum bisa mengaitkan konsep turunan dengan konsep persamaan garis singgung dengan tepat. Berikut cuplikan wawancara dengan AFL.

Peneliti	: <i>Apa hubungan antara gradien dengan turunan kurva? Mengapa kamu mencari gradien dengan turunan kurva?</i>
AFL	: <i>Yaitu menggunakan konsep turunan.</i>
Peneliti	: <i>Maksudnya apakah gradien itu diperoleh dari turunan kurva?</i>
AFL	: <i>heeh. yaa</i>
Peneliti	: <i>Setelah itu mencari apa?</i>
AFL	: <i>Mencari persamaannya garis singgung itu.</i>
Peneliti	: <i>Caranya bagaimana?</i>
AFL	: <i>Ya pakai $y - y_1 = m(x - x_1)$ itu.</i>
Peneliti	: <i>y_1 dari?</i>
AFL	: <i>dari ini tadi. y_1-nya dari ini, x_1-nya dari sini.</i>
Peneliti	: <i>O begitu. Oke.</i>

Dalam wawancara tersebut AFL hanya mengerjakan soal sebatas melakukan aktifitas prosedural. AFL tidak memahami prosedur yang ia lakukan. Sehingga ia menentukan nilai x_1 dan y_1 tanpa berdasarkan prosedur yang tepat [AFL3.T4]. AFL telah menuliskan titik singgung (1,0). Akan tetapi AFL mengambil nilai x_1 dan y_1 bukan dari titik singgung kurva [AFL3.T4]. Akan tetapi AFL mengambil x_1 dan y_1 dari unsur kurva $f(x)$. AFL mengatakan $x_1 = 2$ dari konstanta pada $f(x)$ yang telah ia sederhanakan, yaitu $f(x) = x^2 - 3x + 2$ [AFL3.T1]. Sedangkan $y_1 = -3$, ia peroleh dari koefisien x dari $f(x)$. AFL menentukan nilai x_1 dan y_1 tanpa didasari dengan teorema. Sehingga pemahamn AFL masih berada pada tahap aksi.

b. Siswa berinisial RAK

Berdasarkan hasil observasi RAK merupakan siswa yang memiliki kemampuan sedang berdasarkan pengakuan guru kelas. Berdasarkan hasil tes dan wawancara dengan subjek RAK, peneliti membuat analisis pemahaman AFL terhadap materi turunan fungsi berdasarkan tahapan teori APOS.

Jawaban tertulis RAK untuk soal nomor 1a

Handwritten work for finding the derivative of $f(x) = 2x^2 \sqrt{x}$. The work shows several steps with corrections and errors. Labels RAK1A.T1 through RAK1A.T4 point to specific parts of the work.

1a. $f(x) = 2x^2 \sqrt{x} = 2x^2 x^{1/2} = 4x^{5/2}$ (labeled RAK1A.T2)

$= 4x^{5/2}$ (labeled RAK1A.T3)

$= 4(5/2)x^{5/2-1}$

$= \frac{5}{2}x^{3/2}$ (labeled RAK1A.T4)

$f'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2}$ (labeled RAK1A.T1)

Other steps shown include $f'(x) = 2x^{2+1/2}$, $= 2x^{5/2}$, $= 2 \cdot \frac{5}{2} x^{5/2-1}$, and $= 5x^{3/2}$.

Gambar 4.19 Jawaban tertulis RAK pada masalah nomor 1a

Dari jawaban tertulis RAK, terlihat bahwa RAK menuangkan langsung apa yang terdapat dalam pikirannya tanpa merencanakan terlebih dahulu [RAK1A.T1]. Terlihat dari coretannya, RAK melakukan aktifitas prosedural dengan benar. Tetapi RAK melakukan kesalahan pada penyederhanaan aljabar. RAK belum bisa mengopersikan bentuk pangkat dalam aljabar [RAK1A.T2]. Berikut wawancara dengan RAK.

Peneliti	: <i>Tolong jelaskan bagaimana kamu menyederhanakan $f(x)$?</i>
RAK	: <i>Ini $2x^2\sqrt{x}$ to mbk. Sama dengan $2x^2$ kali $x^{\frac{1}{2}}$. Jadi $4x$ pangkat $\frac{1}{2}$. [RAK1A.W1]</i>
Peneliti	: <i>Terus turunannya?</i>
RAK	: <i>$4, \frac{1}{2}$ kali x pangkat $\frac{1}{2} - 1$. Sama dengan $\frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}$</i>

Dari wawancara tersebut, terlihat bahwa RAK mengerjakan soal tersebut tanpa berdasarkan teorema [RAK1A.W1]. Terlihat ketika ia menyederhanakan bentuk $2x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ [RAK1A.T2], RAK menyederhanakannya menjadi $4x^{\frac{1}{2}}$ [RAK1A.T3]. RAK menyamakan $2x^2$ dengan $(2x)^2$ dan mengalikannya dengan $x^{\frac{1}{2}}$ sehingga menghasilkan jawaban $4x^{\frac{1}{2}}$. RAK mencoba-coba cara yang sebenarnya tidak ada dalam teorema [RAK1A.T1]. Dari jawaban tertulisnya RAK juga tidak menuliskan simbol $f'(x)$ pada hasil turunannya [RAK1A.T4]. RAK tidak menuliskannya karena ia telah menuliskannya disamping jawaban yang ia coret-core. RAK menganggap simbol $f'(x)$ kurang begitu berarti [RAK1A.W2]. Sebagaimana wawancara dengan RAK berikut.

Peneliti	: <i>Ini tanda $f(x)$-nya mana?</i>
RAK	: <i>Seharusnya disini mbak. Aku tadi sudah tulis ndek sini. Tapi salah jawaban yang ini. Yang penting ini jawaban yang benar. [RAK1A.W2]</i>

Terlihat bahwa RAK sekedar melakukan aktifitas prosedural tanpa memahami makna dari apa yang ia lakukan tersebut. Sehingga RAK memiliki pemahaman yang berada pada tahap aksi.

Jawaban tertulis RAK untuk soal nomor 1b

1. b. $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

$u = (x-1)^2$ $v = x^2+1$

$u' = 2(x-1)$ $v' = 2x$

$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$= \frac{2(x-1)(x^2+1) - (x-1)^2(2x)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{2(x-1)(x^2+1) - 2x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{2(x-1)(x^2+1 - x^2)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{2(x-1)(1)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{2(x-1)}{(x^2+1)^2}$

RAK1B.T1

Gambar 4.20 Jawaban tertulis RAK pada masalah nomor 1b

Terlihat dari jawaban RAK, ia tergesa-gesa dalam menjawab pertanyaan. RAK tidak mempertimbangkan terlebih dahulu teorema mana yang ia gunakan [RAK1B.T1]. Sehingga RAK hanya asal dalam menjawab pertanyaan [RAK1A.W1]. Berikut wawancara dengan RAK.

Peneliti	: <i>Bagaimana kamu mengerjakan soal nomor 1b ini?</i>
RAK	: <i>Kemarin itu aku pakai cara u per v mbk. Tapi aku lupa. Ini salah ini.</i> [RAK1A.W1]
Peneliti	: <i>Coba kerjakan ulang ya?</i>

Setelah RAK mengerjakan ulang, RAK menggunakan teorema turunan yang benar. Tetapi RAK melakukan beberapa kesalahan. Berikut jawaban tertulis dari RAK.

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \quad u = (x-1)^2 \quad v = x^2+1$$

$$u' = 2x \quad v' = 2x$$

$$g(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{2x(x^2+1) - (x-1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$$

Gambar 4.21 Hasil pekerjaan RAK pada soal nomor 1b

Terlihat bahwa RAK masih melakukan kesalahan-kesalahn yang menyebabkan jawabnya salah. Pertama cara RAK menurunkan $u = (x-1)^2$ [RAK1B.T3]. RAK menuliskan turunan dari $u = (x-1)^2$ adalah $2x$. Yang mana turunan dari $u = (x-1)^2$ seharusnya adalah $2(x-1)$. Lagi-lagi RAK mengerjakan sesuatu tanpa didasari dengan teorema. Kesalahan yang kedua, yaitu pengoperasian $-(x-1)^2 \cdot 2x$ dengan sifat distribusi [RAK1B.T4]. RAK melewatkan tanda negatif tersebut, RAK menganggap itu bukan merupakan satu kesatuan. Dari kesalahan-kesalahan yang dilakukan oleh RAK, maka pemahaman RAK berada pada tahap aksi.

Jawaban tertulis RAK untuk soal nomer 2

Handwritten mathematical work showing the simplification and differentiation of a function. The work is divided into four steps labeled RAK2.T1 to RAK2.T4.

$$2. a. f(x) = \sqrt[3]{(1+3x^2)^4}$$

$$= (1+3x^2)^{4/3} \quad \text{RAK2.T1}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3} (1+6x) (1+3x^2)^{1/3}$$

$$= \frac{4}{3} (1+6x) (1+3x^2)^{2/3}$$

$$= \frac{4}{3} (1+6x) (1+3x^2)^1$$

$$f(1) = \frac{4}{3} (1+6(1)) (1+3(1)) \quad \text{RAK2.T3}$$

$$= \frac{4}{3} (1+6) (1+3)$$

$$= \frac{4}{3} (7) (4) \quad \text{RAK2.T4}$$

Gambar 4.22 Jawaban tertulis RAK pada masalah nomor 2

Dari jawaban RAK terlihat ia terlebih dahulu menyederhanakan $f(x)$ yang berbentuk akar menjadi bentuk pangkat [RAK2.T1], supaya RAK lebih mudah untuk mencari metode yang tepat untuk menurunkan $f(x)$. Selanjutnya RAK menurunkan fungsi $f(x)$ [RAK2.T2]. Berikut cuplikan wawancara dengan RAK.

Peneliti	: Bagaimana kamu mendapatkan jawabanmu?
RAK	: Ini jadikan pangkat dulu. Ini pangkatnya 4 ini per 3. Lalu diturunkan. [RAK2.W1]
Peneliti	: Terus bagaimana caramu menurunkannya?
RAK	: Ini pangkatnya kali turunannya yang di dalam kurung, kali ini pangkatnya dikurang 1.
Peneliti	: Turunan dari $(1 + 3x^2)$ ini apa?
RAK	: ini $1 + 6x$
Peneliti	: Benar seperti itu?
RAK	: Ya mbak. [RAK2.W2]
Peneliti	: Terus pangkatnya ini, $\frac{4}{3} - 1$, berapa?

RAK	: $\frac{4}{3} - 1$ ini, $\frac{3}{3}$ sama dengan 1
Peneliti	: <i>Oo begitu.</i> <i>Lalu setelah itu, apa yang kamu lakukan?</i>
RAK	: <i>Mensubstitusikan $x = 1$</i>
Peneliti	: <i>Itu jawabanmu, kenapa sampai situ?</i>
RAK	: <i>Wis mbak, ruwet. Angel iki.</i>

Dari wawancara tersebut, RAK menjelaskan pekerjaannya. Prosedur yang ia gunakan sudah benar [RAK2.W1], pertama ia menyederhanakan fungsi $f(x)$, selanjutnya menurunkan fungsi, lalu mensubstitusikan nilai $x = 1$. Dari jawaban tertulis RAK menuliskan turunan $1 + 3x^2$ adalah $1 + 6x$ [RAK2.T2]. Dari wawancara RAK mengklarifikasi bahwa ia benar menjawab seperti itu [RAK2.W2]. Hal ini menunjukkan bahwa pemahaman RAK terhadap konsep turunan masih belum utuh. RAK memahaminya hanya sebatas simbol-simbol yang harus ia hafal saja. Dalam mensubstitusikan nilai $x = 1$ pun ia juga melakukan kesalahan pada simbol [RAK2.T3]. Ketika RAK telah melakukan substitusi ke fungsi yang telah ia turunkan, seharusnya RAK menuliskan simbol $f'(1)$. Akan tetapi ia menuliskannya dengan simbol $f(x)$. Sepertinya RAK menganggap bahwa $f(x)$ itu sama saja dengan $f'(x)$. Selanjutnya RAK tidak menyelesaikan pekerjaannya, ia menyerah sampai pada jawaban terakhirnya [RAK2.T4]. Dalam hal ini terlihat bahwa RAK masih memiliki pemahaman pada tahap aksi.

Jawaban tertulis RAK untuk soal nomer 3

$$f(x) = x(x-2) + 2 \quad (1,0)$$

$$= x^2 - 2x + 2$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$m = 2(1) - 2 = 0$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 0(x - 1)$$

$$y - 0 = x - 1$$

$$y - x = 0 - 1$$

$$y - x = -1$$

Annotations in red boxes: RAK3.T1, RAK3.T2, RAK3.T3, RAK3.T4, RAK3.T5.

Gambar 4.23 Jawaban tertulis RAK pada masalah nomor 3

Terlihat dari jawaban RAK, terlebih dahulu ia menyederhanakan $f(x)$ agar ia dapat menurunkan fungsi dengan lebih mudah [RAK3.T1]. Setelah itu RAK baru menurunkannya dengan menggunakan konsep turunan. Sekali lagi RAK melakukan kesalahan. Kesalahannya lagi-lagi terletak pada penurunan konstanta [RAK3.T2]. RAK menurunkan

$x^2 - 3x + 2$ menjadi $2x - 3x + 2$. RAK juga tidak konsisten dalam melakukan proses penurunan. Ia menurunkan x^2 menjadi $2x$, sedangkan $-3x$ menjadi $-3x$. Konstanta 2 dalam $f(x)$ ia turunkan menjadi 2. Seolah-olah RAK asal dalam mengerjakan soal. Hal ini dikarenakan RAK belum memiliki pemahaman konsep turunan yang utuh.

Setelah melakukan penurunan $f(x)$, RAK menuliskan m dan kemudian mensamadengankan dengan 0 [RAK3.T3]. Dia masih rancu dengan konsep mencari garis singgung dengan konsep menentukan nilai maksimum minimum suatu fungsi [RAK3.W1]. Berikut wawancara RAK terkait hal tersebut.

Peneliti	: <i>Setelah itu kamu mencari m? m itu dari mana?</i>
RAK	: <i>Ini mbak, dari nilai $f'(x)$. x-nya itu diganti 1 ini.</i>
Peneliti	: <i>Lalu m-nya kok bisa sama dengan nol?</i>
RAK	: <i>Ya kan 4 dikurangi 6 tambah dua, kan 0.</i>
Peneliti	: <i>Setelah itu apa ini. Yang kamu coret-coret ini?</i>
RAK	: <i>Setelah ketemu $m = 0$, aku ingat nilai yang kurang dari lebih dari itu lo mbk. Trus ya tak cari nilainya. Gitu aja. Sek to mana ya... [RAK3.W1]</i>
Peneliti	: <i>Yang menentukan nilai maksimum dan minimum itu?</i>
RAK	: <i>Yaa, mungkin itu. Tapi setelah tak cari ndk catetan itu ini ga dipake e. Ya sudah tak coret-coret. La ga ada stipo.</i>
Peneliti	: <i>Lalu setelah itu apa yang kamu lakukan?</i>
RAK	: <i>Nah ini. Persamaan garis singgung, $y - y_1 = m(x - x_1)$. Saya masukkan, terus ketemu ... ini hasilnya. $y - x = 0$</i>

Dari hasil wawancara dengan RAK tersebut, selain RAK belum memiliki pemahaman dan makna tentang konsep turunan, ternyata RAK belum paham penggunaan dari konsep turunan dan belum melekat pada pemahamannya langkah-langkah untuk menentukan persamaan garis

singgung kurva dengan menggunakan konsep turunan. RAK masih rancu dengan penggunaan konsep nilai maksimum minimum. RAK sekedar menulis apa saja yang telah selama ini pelajari, tanpa paham konsep mana yang seharusnya ia gunakan untuk menyelesaikan soalnya. Setelah ia melihat catatannya, bahwa ia tidak membutuhkan nilai maksimum dan minimum maka ia mencoret-coret pekerjaannya itu. RAK lalu menuliskan persamaan umum untuk garis singgung [RAK3.T5]. RAK lalu mensubstitusikan nilai x_1 , m dan y_1 . Terlihat dalam jawabannya, RAK juga belum paham dengan perkalian bilangan 0. RAK menuliskan $0(x - 1) = x - 0$. Sehingga jawaban dari RAK salah dikarenakan ia salah dalam menentukan nilai m dan juga salah dalam perkalian bilangan 0. Dalam hal ini, tingkat pemahaman RAK berada pada tahap aksi.

Berdasarkan paparan data di atas dapat diketahui indikator pemahaman siswa berdasarkan teori APOS pada subjek AFL dan RAK dalam penyelesaian soal tes disajikan dalam tabel 4.3 berikut.

Tabel 4.4 Pemahaman Siswa Berkemampuan Sedang Berdasarkan Teori APOS

Tahap	Indikator Pemahaman Konsep Berdasarkan Teori APOS		
	Subjek AFL	Subjek RAK	Subjek Berkemampuan Sedang
Action (Aksi)	a. Mampu melakukan perhitungan untuk mencari turunan fungsi tanpa mengetahui alasan	a. Mampu melakukan perhitungan untuk mencari turunan fungsi tanpa mengetahui alasan	a. Mampu melakukan perhitungan untuk mencari turunan fungsi tanpa mengetahui alasan menggunakan prosedur tersebut

	menggunakan prosedur tersebut	menggunakan prosedur tersebut	
<i>Process</i> (Proses)	<p>a. Mampu menentukan turunan fungsi dengan menggunakan berbagai cara, seperti berimajinasi untuk membayangkan aturan/teorema penyelesaian yang tepat.</p> <p>b. Masih kesulitan jika diberikan permasalahan baru yang sedikit berbeda dengan contoh yang diberikan guru.</p> <p>c. Mampu melibatkan definisi, teorema dan rumus-rumus yang berlaku pada turunan fungsi dalam kegiatan perhitungannya.</p>	<p>a. Belum mampu menentukan turunan fungsi dengan menggunakan berbagai cara, seperti berimajinasi untuk membayangkan aturan/teorema penyelesaian yang tepat.</p> <p>b. Masih kesulitan jika diberikan permasalahan baru yang sedikit berbeda dengan contoh yang diberikan guru.</p> <p>c. Belum mampu melibatkan definisi, teorema dan rumus-rumus yang berlaku pada turunan fungsi dalam kegiatan perhitungannya.</p>	<p>a. Belum mampu menentukan turunan fungsi dengan menggunakan berbagai cara, seperti berimajinasi untuk membayangkan aturan/teorema penyelesaian yang tepat.</p> <p>b. Masih kesulitan jika diberikan permasalahan baru yang sedikit berbeda dengan contoh yang diberikan guru.</p> <p>c. Belum mampu melibatkan definisi, teorema dan rumus-rumus yang berlaku pada turunan fungsi dalam kegiatan perhitungannya.</p>
<i>Object</i> (Objek)	<p>a. Belum mampu menunjukkan kemampuannya melakukan perhitungan berdasarkan pada definisi, teorema dan rumus-rumus pada turunan fungsi</p> <p>b. Belum mampu mengaplikasikan konsep turunan fungsi dalam kasus yang berbeda.</p>	<p>a. Belum mampu menunjukkan kemampuannya melakukan perhitungan berdasarkan pada definisi, teorema dan rumus-rumus pada turunan fungsi</p> <p>b. Belum mampu mengaplikasikan konsep turunan fungsi dalam kasus yang berbeda.</p>	<p>a. Belum mampu menunjukkan kemampuannya melakukan perhitungan berdasarkan pada definisi, teorema dan rumus-rumus pada turunan fungsi</p> <p>b. Belum mampu mengaplikasikan konsep turunan fungsi dalam kasus yang berbeda.</p>
<i>Scheme</i> (Skema)	a. Belum mampu menunjukkan	a. Belum mampu menunjukkan	a. Belum mampu menunjukkan

	kemampuannya dalam membuat hubungan konsep turunan fungsi dengan konsep matematika yang lain (aljabar, suku banyak, akar/pangkat, persamaan garis, dll).	kemampuannya dalam membuat hubungan konsep turunan fungsi dengan konsep matematika yang lain (aljabar, suku banyak, akar/pangkat, persamaan garis, dll).	kemampuannya dalam membuat hubungan konsep turunan fungsi dengan konsep matematika yang lain (aljabar, suku banyak, akar/pangkat, persamaan garis, dll).
--	--	--	--

3. Paparan Data Hasil Tes dan Wawancara Pemahaman Siswa Berdasarkan Teori APOS pada Subjek Berkemampuan Rendah

a. Siswa berinisial AWA

Berdasarkan hasil observasi AWA merupakan siswa yang memiliki kemampuan rendah berdasarkan pengakuan guru kelas. Berdasarkan hasil tes dan wawancara dengan subjek AWA, peneliti membuat analisis pemahaman AWA terhadap materi turunan fungsi berdasarkan tahapan teori APOS.

Jawaban tertulis AWA untuk soal nomor 1a

Handwritten work for problem 1a:

$$\begin{aligned}
 a. f(u) &= 2u^2 \sqrt{u} \\
 &= 2u^2 \cdot u^{1/2} \\
 &= 2u^{5/2} \\
 &= 2u^{5/2} \quad \text{AWA1A.T1} \\
 f'(u) &= 2u^{5/2} \\
 &= 2u \left(\frac{5}{2}\right) u^{5/2 - \frac{2}{2}} \\
 &= 5u^2 \sqrt{u}
 \end{aligned}$$

AWA1A.T2

Gambar 4.24 Jawaban tertulis AWA pada masalah nomor 1a

Dari jawaban tertulis diatas, terlihat bahwa AWA mengubah bentuk fungsi $f(x)$ menjadi bentuk pangkat [AWA1A.T1]. Berikut penjelasan AWA melalui cuplikan wawancara.

Peneliti	: <i>Bagaimana caramu mengerjakan soal ini?</i>
AWA	: <i>Ini kak. Ini mencari turunannya dulu. Ini kan. Inikan pangkatnya dua, dan ini pangkat x to kak. Jadi pangkatnya setengah. Terus x^2 dikali $x^{\frac{1}{2}}$. [AWA1A.W1]</i>
Peneliti	: <i>Bagaimana caranya mengalikan?</i>
AWA	: <i>2 kali $\frac{1}{2}$ kak.</i>
Peneliti	: <i>Memangnya 2 kali $\frac{1}{2}$ berapa?</i>
AWA	: <i>2 kali $\frac{1}{2}$ satu kak. Eh, ini salah kak. Yang betul ini satu. Yang salah myang mana?</i>
AWA	: <i>Yang perkalian x ini kak. Hasilnya pangkatnya satu. [AWA1A.W2]</i>

Dari wawancara tersebut, AWA mengungkapkan bagaimana ia memperoleh jawabannya. AWA dapat menjelaskan bagaimana ia mengubah bentuk \sqrt{x} menjadi $x^{\frac{1}{2}}$ [AWA1A.W1]. Sedangkan untuk mengalikan $x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ ia masih mengalami kesalahan. Dalam jawaban tertulisnya ia dapat menjawab dengan benar, akan tetapi ketika AWA diwawancara ia mengatakan bahwa cara mengalikan $x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ dengan mengalikan pangkatnya. Jadi $x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^1$ [AWA1A.W2]. Dalam hal ini AWA tidak mengerti teorema atau aturan apa yang harus ia gunakan sehingga antara tulisan dan apa yang dia ucapkan dalam wawancara tidak konsisten.

AWA juga menuliskan turunan dengan masih menggunakan simbol $f(x)$ [AWA1A.T2]. AWA menganggap simbol antara $f(x)$ dan $f'(x)$

sama saja sehingga ia tidak memperhatikan penggunaan simbol $f'(x)$. Begitu juga cara yang AWA gunakan masih salah. AWA belum terlalu memahami cara penurunan fungsi [AWA1A.W3]. Sebagaimana yang ia katakan pada cuplikan wawancara berikut.

Peneliti	: <i>Terus, yang ini bagaimana?</i>
AWA	: <i>Itu menggunakan cara yang itu lo kak. Ini kan $2x$ pangkatnya, x pangkat dikurangi 1.</i>
Peneliti	: <i>Lalu itu bisa dapat $5x^2\sqrt{x}$?</i>
AWA	: <i>Ini to kak. $5x^{\frac{3}{2}}$ itu 5, karena \sqrt{x} pangkat $\frac{1}{2}$, jadi $3 - 1 = 2$, x^2 dan \sqrt{x}. Jadinya $5x^2\sqrt{x}$. [AWA1A.W3]</i>

Pemahaman AWA terlihat rancu antara penggunaan turunan biasa dengan aturan rantai. AWA menurunkan $2x^{\frac{5}{2}}$ menjadi $2x \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}-\frac{2}{2}}$. Cara yang AWA gunakan ini hampir mirip dengan aturan rantai, padahal soal ini tidak menggunakan aturan rantai [AWA1A.W3]. AWA hanya dapat melakukan aktivitas prosedural secara eksplisit, akan tetapi AWA tidak memahami aturan-aturan dalam aktivitas prosedural tersebut. AWA juga belum memahami konsep turunan secara menyeluruh, ia masih rancu dengan penggunaan aturan turunan. Sehingga dalam hal ini AWA masih berada pada tahap aksi.

Jawaban tertulis AWA untuk soal nomer 1b

$$b) g(x) = \frac{(2x-1)^2}{x^2+1}$$

$$u = (2x-1)^2$$

$$u' = 2(2x-1) \cdot 2 = 2 \cdot 2x - 2 = 4x - 2$$

$$v = x^2 + 1$$

$$v' = 2x$$

$$(2x-1)(2x-1)$$

$$= 2x^2 - 2x - 2x + 1 = 2x^2 - 4x + 1$$

$$= 2x^2 - 4x + 1 = (2x - 2)^2$$

$$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(4x-2)(x^2+1) - (2x-1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 4x - 2x^2 - 2 - 2x(2x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 4x - 2x^2 - 2 - 2x(4x^2 - 4x + 1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 4x - 2x^2 - 2 - 8x^3 + 8x^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-4x^3 + 6x^2 + 2x - 2}{(x^2+1)^2}$$

Gambar 4.25 Jawaban tertulis AWA pada masalah nomor 1b

Dari jawaban tertulis, AWA terlihat bahwa ia memisalkan pernyataan $g(x)$ dengan simbol u dan v [AWA1B.T1]. Selanjutnya AWA melakukan beberapa langkah-langkah matematika sebagaimana yang ia jelaskan dalam cuplikan wawancara berikut.

AWA1B.T5

Peneliti	: Soal selanjutnya, teorema atau aturan apa yang kamu pakai untuk menyelesaikan soal ini?
AWA	: Pake teorema u kali v kak. Yang $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ kak.
Peneliti	: Bisa dijelaskan ini bagaimana?
AWA	: Ini kak. Itukan saya misalkan u itu yang atas, dan v itu yang bawah. Lalu diturunkan. [AWA1B.W1]

AWA telah dapat menggunakan aturan turunan yang tepat untuk menyelesaikan soal ini. Ia juga telah dapat menunjukkan mana yang di misalkan dengan u dan mana yang dimisalkan dengan v [AWA1B.W1]. Akan tetapi dalam menuliskannya AWA masih melakukan kesalahan. AWA seharusnya menuliskan u dan v terlebih dahulu baru selanjutnya u' dan v' . AWA malah langsung saja menuliskan u' dan v' [AWA1B.T2]. Berikut cuplikan wawancara dengan AWA.

Peneliti	: <i>Ini $u' = (x - 1)^2$, berarti sudah bisa disebut turunan atau u' dong?</i>
AWA	: <i>Oh ini ye kak? Bukan ini. Seharusnya iya u saja. Yang v' ini juga ini, seharusnya v dan yang ini v'. Iyakan kak?</i>
Peneliti	: <i>Oke. Terus selanjutnya ini apa ini? $(x - 1)(x - 1)$ untuk apa?</i>
AWA	: <i>Ini itu difaktorkan gitu lo kak. Inikan $(x - 1)^2$.</i>
Peneliti	: <i>Natinya untuk apa?</i>
AWA	: <i>Emmm... ini... Nah ini lo kak.</i> [AWA1B.W2]
Peneliti	: <i>Inikan v bukan u.</i>
AWA	: <i>Eh iya to kak...</i>

AWA masih sembarangan dalam menggunakan simbol matematika. Disamping itu AWA menuliskan penyederhanaan aljabar yang sebenarnya tidak ia perlukan dalam menentukan turunan fungsi [AWA1B.T3]. AWA tidak memiliki alasan mengapa ia melakukan penyederhanaan tersebut [AWA1B.W2]. Ia hanya melakukan pengerjaan tanpa memikirkan apa yang akan ia lakukan dengan hal tersebut.

Selanjutnya saat AWA melakukan substitusi ke dalam $g'(x)$ AWA tidak menuliskan pernyataan v^2 dalam persamaan [AWA1B.T4], baru di pernyataan akhir ia menuliskannya [AWA1B.T5]. AWA memahami bahwa v^2 hilang [AWA1B.W3]. AWA mengatakan tidak tahu hal tersebut

Dari jawaban tertulis tersebut, terlihat bahwa pertama AWA mengubah bentuk $f(x)$ sehingga menjadi bentuk pangkat pecahan [AWA2.T1]. Baru setelah itu ia melakukan penurunan terhadap fungsi $f(x)$ yang telah berbentuk pangkat [AWA2.T2]. Berikut langkah-langkah yang dilakukan AWA melalui cuplikan wawancara.

Peneliti	: Soal nomor 2. Disini kamu merubah bentuk $f(x)$ menjadi bentuk pangkat. Bisa dijelaskan bagaimana caramu mengubah pernyataan ini?
AWA	: Iya, $f(x) = \sqrt[3]{(1 + 3x^2)^4}$ diubah seperti soal kemarin. Ini pangkatnya menjadi $\frac{3}{4}$. 3 ini dari akarnya ini kak dan 4 dari pangkatnya ini. [AWA2.W1]
Peneliti	: Lalu bagaimana caramu menurunkan $f(x)$? Teorema apa yang kamu gunakan?
AWA	: Itu kak pake cara $y = a \cdot U^n$. $y' = a \cdot n \cdot U' \cdot U^{n-1}$. Jadi ini gini to kak. n -nya $\frac{4}{3}$ kali u' , $(3 \cdot 2x^{2-1})$ dan pangkatnya $\frac{4}{3} - \frac{3}{3}$. 1 itukan $\frac{3}{3}$ kan kak. Lalu ini pangkatnya jadi $\frac{1}{3}$. Terus ini, 6 sama 3 dicoret kali ini. Hasilnya $4(2x)(1 + 3x^2)^{\frac{1}{3}}$. Terus jadi gini. Pangkatnya diubah jadi akar kak. [AWA2.W2]

AWA dapat menjelaskan bagaimana ia mengubah bentuk akar menjadi bentuk pangkat [AWA2.W1]. Aturan turunan yang AWA gunakan sebenarnya ingin menggunakan aturan perkalian, akan tetapi ia salah dalam menuliskan aturannya [AWA2.W2]. AWA menjelaskan bahwa aturan perkalian itu $y = a \cdot U^n$. $y' = a \cdot n \cdot U' \cdot U^{n-1}$. Sebenarnya tidak seperti itu. Pada jawaban akhirnya AWA mendapatkan jawaban yang benar [AWA2.T3]. Ia hanya salah diawal langkah menurunkan fungsi [AWA2.T2]. Lagi-lagi AWA kurang memahami aturan tentang konsep akar dan pangkat. Meskipun jawabannya benar, di dalam wawancara

AWA ragu dengan jawabannya dan akhirnya ia menyalahkan jawaban benarnya [AWA2.W3]. Berikut cuplikan wawancaranya.

Peneliti	: <i>Begitu ya?</i>
AWA	: <i>Eh ini 3-nya seharusnya kan pangkat sini ya kan. Seharusnya $\sqrt{(1+3x^2)^3}$ bukan $\sqrt[3]{1+3x^2}$. Eh iya, salah ini kak ini yang betul.</i> [AWA2.W3]

AWA dapat memahami maksud dari soal. Ia menyelesaikan soal sesuai dengan apa yang diminta soal. Berikut pernyataan AWA dalam cuplikan wawancara.

Peneliti	: <i>Oke. Terus yang terakhir ini apa?</i>
AWA	: <i>Ini kan yang di soal itu to kak. $x = 1$ dimasukkan ke $f(x)$.</i>
Peneliti	: <i>Dan hasilnya ?</i>
AWA	: <i>Ini kak, $8(1)^3\sqrt{1+3(1)^2} = 8^3\sqrt{4}$</i>
Peneliti	: <i>Sudah? Sampai di situ bisa desederhanakan nggak?</i>
AWA	: <i>Sudah kak, gak bisa.</i>

Sejauh ini AWA hanya melakukan aktifitas prosedural seperti apa yang telah dicontohkan dan diajarkan oleh guru. Ketika soal yang diberikan sedikit berbeda, AWA memiliki masalah dengan hal tersebut. Salah satunya dalam penggunaan aturan turunan, konsep aljabar yang menjadi hal dasar dalam langkah-langkah prosedural belum AWA kuasai dengan baik. Oleh karena itu menjadikah pemahaman AWA berada pada tahap aksi.

Jawaban tertulis AWA untuk soal nomer 3

$$f(x) = x(x-3) + 2$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

$$d. (1, 0)$$

$$x_1 = 1 \rightarrow y' = 0$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$m = f'(1) = 2(1) - 3$$

$$= 2 - 3 = -3$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -1(x - 1)$$

$$y - 0 = -x + 1$$

$$y - 0 + x - 1 = 0$$

$$x + y - 1 = 0$$

AWA3.T1

AWA3.T2

AWA3.T3

AWA3.T4

Gambar 4.27 Jawaban tertulis AWA pada masalah nomor 3

Dari jawaban tertulis tersebut, terlihat AWA melakukan manipulasi matematika sebelum ia menurunkan fungsi [AWA3.T1]. Selanjutnya AWA memisalkan titik singgung dengan x_1 dan y_1 [AWA3.T1]. Pengerjaan ini dijelaskan AWA melalui cuplikan wawancara berikut.

Peneliti	: Pada soal yang nomor tiga, apa yang ditanyakan?
AWA	: Nomor tiga ini to kak? Em... Carilah gradien persamaan garis singgung dengan menggunakan konsep turunan.
Peneliti	: Apa yang ditanyakan pada soal?
AWA	: Mencari persamaan garis singgung kak. Ini kan tentukan persamaan garis singgung...
Peneliti	: Oke. Pertama apa yang kamu lakukan?
AWA	: Pertama, disini $f(x)$ -nya itu di kalikan ini kak. x kali x dikurangi x kali 3, ditambah 2. [AWA3.W1].
Peneliti	: Lalu?

AWA	: <i>Ini d_1 (1,0). $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ kak.</i>
Peneliti	: <i>d_1 ini apa?</i>
AWA	: <i>Em.. ini ... emm ini kak, yang titik ini. Ya kan kak?</i>

Dari wawancara diatas, AWA dapat menjelaskan bagaimana ia mengerjakan soal [AWA3.W1]. AWA dapat menggunakan metode yang tepat dalam menurunkan fungsi $f(x)$ [AWA3.T1]. Selanjutnya, berikut cuplikan wawancara AWA terkait pekerjaannya.

Peneliti	: <i>Oke. Selanjutnya bagaimana?</i>
AWA	: <i>ini diturunkan. $2x - 3$. Terus ... $m = f(1) = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -3$</i>
Peneliti	: <i>m ini apa?</i>
AWA	: <i>m? m ini ... eee apa to kak, garis iya kak? Emm iya m itu garis kak</i>
Peneliti	: <i>Oke. Lalu apa hubungan m dan $f(1)$ ini?</i>
AWA	: <i>Emm ... $m = f(1)$</i>
Peneliti	: <i>Maksudnya?</i>
AWA	: <i>Ya, nilainya m itu sama dengan nilainya $f(1)$</i> [AWA3.W2]

AWA dapat menentukan nilai m , tapi hasil yang ia peroleh masih salah yaitu -3 [AWA3.T3]. Seharusnya $2 - 3 = -1$. Meskipun begitu, disaat ia mensubstitusikan nilai m ini ke persamaan garis singgung fungsi AWA mensubstitusikan nilai -1 [AWA3.T4.. AWA tidak konsisten dengan pengerjaannya. Di samping hal tersebut, AWA memahami bahwa m nilainya sama dengan nilai $f(1)$ [AWA3.W2]. Selanjutnya cuplikan wawancara berikut menunjukkan bagaimana AWA mendapatkan jawaban akhirnya [AWA3.W3].

Peneliti	: <i>Nah selanjutnya ini rumus apa?</i>
AWA	: <i>$y - y_1 = m(x - x_1)$ itu rumus.. rumus yang .. eh rumus pgs kak. Persamaan garis singgung</i>
Peneliti	: <i>Oh... lalu setelah itu?</i>

AWA	: ini di masuk-masukkan kak . $y_1 = 0$, $m = -1$, dan $x_1 = 1$
Peneliti	: $m = -1$? Tadi m -nya -3 , bagaimana ?
AWA	: Emm.. ini ... sebentar kak. Ini tadikan dari m . Emm. Oh ini kak, $2 - 3$ ini seharusnya -1 . Ini m -nya seharusnya -1 kak. [AWA3.W3]
Peneliti	: Begitu, oke.

AWA terlihat tidak teliti dengan jawabannya. Meskipun ia mendapatkan jawaban yang benar, AWA belum memahami secara menyeluruh penggunaan turunan fungsi untuk menentukan persamaan garis singgung kurva. Ia hanya melakukan pengerjaan sesuai dengan apa yang telah dicontohkan. Oleh karena itu pemahaman AWA berada pada tahap proses.

b. Siswa berinisial IQA

Berdasarkan hasil observasi IQA merupakan siswa yang memiliki kemampuan rendah berdasarkan pengakuan guru kelas. Berdasarkan hasil tes dan wawancara dengan subjek IQA, peneliti membuat analisis pemahaman IQA terhadap materi turunan fungsi berdasarkan tahapan teori APOS.

Jawaban tertulis IQA untuk soal nomer 1a

$$\begin{aligned}
 1. \ a. \ f(x) &= 2x^2\sqrt{x} = 2x^2 \cdot x^{1/2} && \text{IQA1A.T1} \\
 &= 2x^{2+1/2} \\
 &= 2x^{5/2} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot 2x^{3/2} = 5x^{3/2} = 5x\sqrt{x} && \text{IQA1A.T2}
 \end{aligned}$$

Gambar 4.28 Jawaban tertulis IQA pada masalah nomor 1a

Dari jawaban tertulis diatas, terlihat bahwa IQA mengubah bentuk fungsi $f(x)$ menjadi bentuk pangkat [IQA1A.T1]. Berikut penjelasan IQA melalui cuplikan wawancara.

Peneliti	: <i>Dhek, pada soal nomor satu ini bagaimana kamu mengerjakannya?</i>
IQA	: <i>ini, iki di.. didadekne gini sek...</i>
Peneliti	: <i>Lalu, dapatnya lima per dua dari mana?</i>
IQA	: <i>Aduh lali mbak aku mbak...</i> [IQA1A.W1]
Peneliti	: <i>Masa lupa ? coba akar x itu sama dengan pangkat berapa?</i>
IQA	: <i>Lak gak salah ki ... dari sini itu lo mbak. Bentar mbak. Lupa mbak.</i> [IQA1A.W2]
Peneliti	: <i>Kemarin ngerjakan sendiri?</i>
IQA	: <i>Sama temenku mbak.</i>

Dari wawancara tersebut, IQA lupa bagaimana ia mengerjakan soal [IQA1A.W1]. IQA juga tidak yakin dengan apa yang ia kerjakan [IQA1A.W2], hal ini karena ia mengerjakannya bersama dengan temannya. Sehingga IQA tidak ingat banyak tentang bagaimana ia mengerjakannya. Meskipun begitu masih ada hal-hal yang bisa IQA jelaskan seperti yang terdapat pada cuplikan wawancara berikut.

Peneliti	: <i>Oke. Selanjutnya, turunannya $f(x)$ tu mana? $f'(x)$-nya mana?</i>
IQA	: <i>Sing terakhir iki lo mbak. Wengi koyone ngunu... sing lima per dua kali ini.</i> [IQA1A.W3]
Peneliti	: <i>Itu caranya menurunkan gimana?</i>
IQA	: <i>Carane nurunne mbk. Em.. kaya e ini pangkatnya kali $2x$, pangkatnya dikurang 1</i>
Peneliti	: <i>Terus bentuk $x^{\frac{3}{2}}$ jadi $x\sqrt{x}$ ini bagaimana?</i>
IQA	: <i>Waduh gak ngerti aku mbak.</i> [IQA1A.W4]

Pada lembar jawaban, IQA tidak menuliskan simbol $f'(x)$ pada hasil penurunannya [IQA1A.T1]. Ketika IQA diminta untuk menentukan

pernyataan mana yang merupakan hasil turunan, IQA dapat menjawabnya dengan benar [IQA1A.W3]. Hal ini berarti IQA mengetahui mana yang dimaksud dari turunannya fungsi.

Ketika IQA ditanya mengenai perubahan bentuk $x^{\frac{3}{2}}$ menjadi bentuk $x\sqrt{x}$ ia sama sekali tidak tahu aturan yang dipakai [IQA1A.T1], bahkan ia tidak tahu bagaimana ia merubahnya menjadi bentuk tersebut [IQA1A.W4]. Oleh karena IQA hanya dapat mengerjakan soal sebatas meniru langkah-langkah pengerjaan seperti contoh soal, maka pemahamannya masih berada pada tahap aksi.

Jawaban tertulis IQA untuk soal nomor 1b

Handwritten work for problem 1b:

b. $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

$v = (x-1)^2$
 $v' = 2x-2$

$u = x^2+1$
 $u' = 2x$

$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$= \frac{(2x-2)(x^2+1) - (2x)(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{2x^3 - 2x - 2x^2 - 2}{(x^2+1)^2} - \frac{2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{2x^3 - 2x - 2x^2 - 2 - 2x^3 - 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{-2x^2 - 4x - 2}{(x^2+1)^2}$

Red boxes highlight: IQA1B.T1 (u and v identification), IQA1B.T2 (quotient rule formula), and IQA1B.T3 (final derivative).

Gambar 4.29 Jawaban tertulis IQA pada masalah nomor 1b

Dari jawaban tertulis, IQA terlihat bahwa ia memisalkan pernyataan $g(x)$ dengan simbol u dan v [IQA1B.T1]. Selanjutnya IQA melakukan

beberapa langkah-langkah matematika sebagaimana yang ia jelaskan dalam cuplikan wawancara berikut.

Peneliti	: <i>Soal 1b. Bagaimana kamu mengerjakan soal ini?</i>
IQA	: <i>Nggoleki iku. u' dan v'.</i>
Peneliti	: <i>Lalu u itu apa ? v itu apa?</i>
IQA	: <i>Apa mbak? Ndk buku aku dhek wingi ki... [IQA1A.W1]</i>
Peneliti	: <i>Ya sudah dilihat dibuku.</i>
IQA	: <i>u iku sing atas, v iku sing bawah mbak. Terus dimasukne rumus ini.</i>

IQA telah memilih benar dalam aturan yang ia gunakan untuk menurunkan fungsi. Akan tetapi ternyata ia tidak hafal dengan teorema yang ia gunakan [IQA1A.W1]. IQA membutuhkan buku catatannya untuk mengerjakan soal. Hal ini membuktikan bahwa IQA belum memiliki pemahaman konsep turunan secara utuh. IQA memahaminya sebagai langkah-langkah prosedural yang rumit dan sulit untuk dihafal. Selanjutnya, cuplikan wawancara terkait bagaimana IQA melakukan penurunan fungsi dengan menggunakan aturan pembagian.

Peneliti	: <i>Bagaimana menurunkan u dan v?</i>
IQA	: <i>2 kali x itu $2x$, min 2 kali 1, 2. Terus yang ini 2 kali x, $2x$, dikurangi 1 habis...</i>
Peneliti	: <i>Begitu?</i>
IQA	: <i>x thok mbak...</i>
Peneliti	: <i>Terus kan dimasukkan, bagaimana itu?</i>
IQA	: <i>u' ini, v ini, u ini, v' ini.</i>

Dilihat dari jawaban tertulis IQA belum menuliskan yang ia misalkan u dan turunannya [IQA1A.T1]. Baru ketika substitusi $u' = 2x$. Disana terlihat juga penulisannya juga tidak terstruktur. IQA tidak

mensubstitusikan nilai v^2 [IQA1A.T2]. Berikut penjelasan IQA melalui cuplikan wawancara.

Peneliti	: <i>Terus v^2-nya mana?</i>	
IQA	: <i>Iki mbak di bawah.</i>	
Peneliti	: <i>Kenapa kok ditaruh di sini?</i>	
IQA	: <i>Ga oleh ye mbak?</i>	
	<i>Soalne ben mudah mbak...</i>	[IQA1A.W2]
Peneliti	: <i>Terus ini $x - 1$ yang ini apa ya?</i>	
IQA	: <i>Iki..? opo wingi... lali mbak</i>	[IQA1A.W3]

IQA tidak mensubstitusikan v^2 supaya dia mudah untuk mengerjakan langkah selanjutnya [IQA1A.W2]. IQA merasa bingung dengan bentuk-bentuk aljabar yang rumit. Sehingga ia menuliskannya di bagian paling akhir/jawaban akhirnya [IQA1A.T3]. IQA juga menuliskan $x - 1$ yang entah bagaimana maksudnya [IQA1A.T4]. Ketika ditanya IQA mengaku lupa dengan pengerjaannya tersebut [IQA1A.W3]. Dalam hal ini IQA lagi-lagi mengerjakan dengan langkah-langkah yang ia tidak berdasarkan teorema, oleh karena itu pemahaman IQA berada pada tahap aksi.

Jawaban tertulis IQA untuk soal nomor 2

2. $f(x) = \sqrt{(1+3x^2)^4}$ [IQA2.T1]
 $= (1+3x^2)^{4/3}$
 $f'(x) = \frac{4}{3} (1+3x^2)^{4/3 - 3/5}$ [IQA2.T2]
 $= \frac{4}{3} (3 \cdot 2x - 1) (1+3x^2)^{1/2}$
 $= \frac{4}{3} (6x^2) (1+3x^2)^{1/3}$
 $= 4 (2x) (1+3x^2)^{1/3}$
 $= 8x (1+3x^2)^{1/3}$
 $= 8x \sqrt{1+3x^2}$ [IQA2.T3]
 $f'(1) = 8(1)^2 \sqrt{1+3 \cdot 1}$
 $= 8^2 \sqrt{4}$

Gambar 4.30 Jawaban tertulis IQA pada masalah nomor 2

Dari jawaban tertulis tersebut, terlihat bahwa pertama IQA mengubah bentuk $f(x)$ sehingga menjadi bentuk pangkat pecahan [IQA2.T1]. Baru setelah itu ia melakukan penurunan terhadap fungsi $f(x)$ yang telah berbentuk pangkat [IQA2.T2]. Berikut langkah-langkah yang dilakukan IQA melalui cuplikan wawancara.

Peneliti	: Bagaimana kamu mengerjakan soal ini?	
IQA	: Emmm.. niki $f(x)$ di.. diubah dadi gini mbak.	[IQA2.W1]
Peneliti	: Caranya gmana?	
IQA	: Itu pangkat e dadi $\frac{4}{3}$	
Peneliti	: Aturannya pakai apa?	
IQA	: Ha? Iku wingi aku diwarahi temenku mbk. Saiki wis lali wis...	[IQA2.W2]
Peneliti	: Ini $f(x)$ apa $f'(x)$?	
IQA	: $f(x)$ mbak.	
Peneliti	: $f'(x)$ -nya mana? Apa to yang ditanyakan disoal?	
IQA	: Turunanne mbak. Ini $f'(x)$ -nya mbak. Lali mbak.	

IQA mengetahui langkah pertama yang harus ia lakukan [IQA2.W1]. Pada langkah menurunkan fungsi, IQA dapat mengerjakannya [IQA2.T2], tapi ketika ditanya teorema yang ia gunakan IQA mengaku lupa [IQA2.W2]. Ia dapat mengerjakan karena IQA diajari oleh temannya. Karena IQA tidak memahami langkah-langkah yang diajari oleh temannya, maka IQA lupa akan pekerjaannya itu. IQA juga lupa membubuhkan simbol $f'(x)$ pada hasil turunannya [IQA2.T3].

Peneliti	: <i>Ini pengerjaannya bisa dijelaskan ?</i>	
IQA	: <i>Aduh lali mbak. Bener lali mbak.</i>	[IQA2.W3]
Peneliti	: <i>Oke. Terus setelah ini? Disubstitusi gitu?</i>	
IQA	: <i>Iyo mbak. $x = 1$</i>	
Peneliti	: <i>Ini delapan pangkat tiga darimana?</i>	
IQA	: <i>Emm... eh iku pangkat 2 mbak, salah.</i>	

IQA benar-benar lupa akan sebagian pekerjaannya [IQA2.W3]. Ia hanya melakukan aktivitas perhitungan secara eksplisit seperti yang telah dicontohkan sebelumnya tanpa memiliki pemahaman pada konsepnya. Oleh karena itu pemahaman IQA berada pada tahap aksi.

Jawaban tertulis IQA untuk soal nomer 3

Handwritten work for problem 3:

$$3. f(x) = x(x-3) + 2$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

di $(1, 0)$

$$x_1 = 1, y_1 = 0$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$m = f'(1) = 2(1) - 3$$

$$= 2 - 3 = -1$$

$$y = y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -1(x - 1)$$

$$y - 0 = -x + 1$$

$$y - 0 + x - 1 = 0$$

$$x + y - 1 = 0$$

Red boxes highlight the following parts:

- IQA3.T1: $f(x) = x(x-3) + 2$
- IQA3.T2: $y = y_1 = m(x - x_1)$
- IQA3.T2: $y - 0 = -1(x - 1)$
- IQA3.T2: $y - 0 = -x + 1$
- IQA3.T2: $y - 0 + x - 1 = 0$
- IQA3.T2: $x + y - 1 = 0$
- IQA3.T2: $m = f'(1) = 2(1) - 3$
- IQA3.T2: $= 2 - 3 = -1$
- IQA3.T3: $di (1, 0)$

Gambar 4.31 Jawaban tertulis IQA pada masalah nomor 3

Dari jawaban tertulis tersebut, terlihat IQA melakukan manipulasi matematika sebelum ia menurunkan fungsi [IQA3.T1]. Selanjutnya IQA memisalkan titik singgung dengan x_1 dan y_1 [IQA3.T2]. Pengerjaan ini dijelaskan IQA melalui cuplikan wawancara berikut.

Peneliti	: Pada soal yang nomor tiga, apa yang ditanyakan?
IQA	: Em... tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x)$. Carilah gradien persamaan garis singgung dengan menggunakan konsep turunan.
Peneliti	: Apa yang ditanyakan pada soal?
IQA	: persamaan garis singgung mbak.
Peneliti	: Oke. Pertama apa yang kamu lakukan?
IQA	: iki mbak, disek diginikan. Terus turunan, m. Terus dimasukkan rumus $y = \dots$
Peneliti	: d_1 ini apa?
IQA	: Em.. ini ... opo mbak.. gak eruh aku mbak...
Peneliti	: Oke. Ini $x_1 = 1$, $41=0$ ini apa?
IQA	: opo toh mbak. Ga eruh aku yoan. Aku wingi sukur nyonto ndk buku mbak.

Seperti sebelumnya, IQA mengerjakan soal membutuhkan paduan dari buku catatannya. IQA belum paham langkah apa yang harus ia lakukan. IQA mencari contoh soal yang sama dengan soal tersebut lalu mulai mengerjakan seperti langkah-langkah yang ada di contoh. Ketika ia ditanya tentang d_1 [IQA3.T3.] IQA tidak mengerti.

Peneliti	: Terus $f'(x)$ dapatnya dari mana?
IQA	: Lak ini rakyu turunannya ini to mbak? $2x - 3$
Peneliti	: m ini apa?
IQA	: m ? m ini ... eee opo neh to mbak? Wis gak ngerti aku mbak. Tenan to... [IQA3.W1]
Peneliti	: Oke. Lalu apa hubungan m dan $f(1)$ ini?
IQA	: gak ngerti mbaak... [IQA3.W2]
Peneliti	: Nah selanjutnya ini rumus apa?
IQA	: $y - y_1 = m(x - x_1)$ itu rumus pgs mbak. Persamaan garis singgung
Peneliti	: Oh... lalu setelah itu?

IQA	: ini di masuk-masukkan kak . $y_1 = 0$, $m = -1$, dan $x_1 = 1$
Peneliti	: Begitu, oke.

Karena IQA sekedar mengerjakan seperti di contoh tanpa memahami konsep yang ada ia tidak tahu makna dari m [IQA3.W1], penggunaannya, dan juga kaitannya dengan turunan [IQA3.W2]. Dalam hal ini pemahaman IQA berada pada tahap aksi.

Berdasarkan paparan data di atas dapat diketahui indikator pemahaman siswa berdasarkan teori APOS pada subjek AWA dan IQA dalam penyelesaian soal tes disajikan dalam tabel 4.3 berikut.

Tabel 4.5 Pemahaman Siswa Berkemampuan Rendah Berdasarkan Teori APOS

Tahap	Indikator Pemahaman Konsep Berdasarkan Teori APOS		
	Subjek AWA	Subjek IQA	Subjek Berkemampuan Rendah
<i>Action</i> (Aksi)	a. Mampu melakukan perhitungan untuk mencari turunan fungsi tanpa mengetahui alasan menggunakan prosedur tersebut	a. Mampu melakukan perhitungan untuk mencari turunan fungsi tanpa mengetahui alasan menggunakan prosedur tersebut	a. Mampu melakukan perhitungan untuk mencari turunan fungsi tanpa mengetahui alasan menggunakan prosedur tersebut
<i>Process</i> (Proses)	a. Belum mampu menentukan turunan fungsi dengan menggunakan berbagai cara, seperti berimajinasi untuk membayangkan aturan/teorema	a. Belum mampu menentukan turunan fungsi dengan menggunakan berbagai cara, seperti berimajinasi untuk membayangkan aturan/teorema	a. Belum mampu menentukan turunan fungsi dengan menggunakan berbagai cara, seperti berimajinasi untuk membayangkan aturan/teorema penyelesaian yang

	<p>penyelesaian yang tepat.</p> <p>b. Masih kesulitan jika diberikan permasalahan baru yang sedikit berbeda dengan contoh yang diberikan guru.</p> <p>c. Belum ampu melibatkan definisi, teorema dan rumus-rumus yang berlaku pada turunan fungsi dalam kegiatan perhitungannya.</p>	<p>penyelesaian yang tepat.</p> <p>b. Masih kesulitan jika diberikan permasalahan baru yang sedikit berbeda dengan contoh yang diberikan guru.</p> <p>c. Belum mampu melibatkan definisi, teorema dan rumus-rumus yang berlaku pada turunan fungsi dalam kegiatan perhitungannya.</p>	<p>tepat.</p> <p>b. Masih kesulitan jika diberikan permasalahan baru yang sedikit berbeda dengan contoh yang diberikan guru.</p> <p>c. Belum mampu melibatkan definisi, teorema dan rumus-rumus yang berlaku pada turunan fungsi dalam kegiatan perhitungannya.</p>
<i>Object</i> (Objek)	<p>a. Belum mampu menunjukkan kemampuannya melakukan perhitungan berdasarkan pada definisi, teorema dan rumus-rumus pada turunan fungsi</p> <p>b. Belum mampu mampu mengaplikasikan konsep turunan fungsi dalam kasus yang berbeda.</p>	<p>a. Belum mampu menunjukkan kemampuannya melakukan perhitungan berdasarkan pada definisi, teorema dan rumus-rumus pada turunan fungsi</p> <p>b. Belum ampu mampu mengaplikasikan konsep turunan fungsi dalam kasus yang berbeda.</p>	<p>a. Belum mampu menunjukkan kemampuannya melakukan perhitungan berdasarkan pada definisi, teorema dan rumus-rumus pada turunan fungsi</p> <p>b. Belum ampu mampu mengaplikasikan konsep turunan fungsi dalam kasus yang berbeda.</p>
<i>Scheme</i> (Skema)	<p>a. Belum mampu menunjukkan kemampuannya dalam membuat hubungan konsep turunan fungsi dengan konsep matematika yang lain (aljabar, suku banyak, akar/pangkat, persamaan garis, dll).</p>	<p>a. Belum mampu menunjukkan kemampuannya dalam membuat hubungan konsep turunan fungsi dengan konsep matematika yang lain (aljabar, suku banyak, akar/pangkat, persamaan garis, dll).</p>	<p>a. Belum mampu menunjukkan kemampuannya dalam membuat hubungan konsep turunan fungsi dengan konsep matematika yang lain (aljabar, suku banyak, akar/pangkat, persamaan garis, dll).</p>

C. Temuan Penelitian

Berdasarkan serangkaian kegiatan yang dilakukan dalam penelitian dengan judul “*Analisis Pemahaman Siswa Tentang Turunan Fungsi Berdasarkan Teori APOS (Action, Process, Object, Scheme) pada Siswa Kelas XI IIS U MAN 1 Tulungagung Tahun Ajaran 2017/2018*”, peneliti mendapatkan temuan mengenai tingkat pemahaman siswa terhadap materi turunan fungsi berdasarkan teori APOS. Siswa yang menjadi subjek penelitian merupakan perwakilan dari siswa dengan tingkat kemampuan tinggi, sedang, dan kurang. dengan keterangan siswa berkemampuan tinggi sebanyak 2 siswa, siswa berkemampuan sedang sebanyak 2 siswa, dan siswa berkemampuan kurang sebanyak 2 siswa.

Berdasarkan tahapan teori APOS yaitu *Action*, *Process*, *Object*, dan *Schema* masing-masing tahapan pasti memiliki karakteristik tertentu. Dengan adanya tahapan-tahapan tersebut dimaksudkan oleh peneliti untuk melihat sebagaimana siswa mendalami materi tersebut. Beberapa temuan yang didapat peneliti.

1. Siswa HRB mampu mengerjakan materi turunan fungsi berdasarkan runtutan teori APOS. Pemahaman HRB rata-rata berada pada tahap objek. HRB telah dapat melakukan aktifitas prosedur dengan benar dan dapat memahaminya dengan baik. Akan tetapi HRB masih memiliki pemahaman yang kurang terhadap operasi aljabar. Hal inilah yang menyebabkan jawaban akhir HRB menjadi salah, walaupun prosedur yang ia gunakan telah benar.

2. Siswa SHF mampu mengerjakan materi turunan fungsi berdasarkan teori APOS. Pemahaman SHF berada pada tahap proses. SHF melakukan beberapa aktifitas matematika yang sebenarnya tidak ia gunakan untuk menemukan jawaban. SHF melakukan aktifitas tersebut tanpa memahami prosedur matematika yang terdapat pada konsep turunan. Sehingga SHF hanya sekedar melakukan aktifitas prosedural dengan benar. SHF belum mencapai tahap objek.
3. Siswa AFL mampu mengerjakan dan menjawab semua pertanyaan yang dilontarkan oleh peneliti berdasarkan teori APOS. Namun pemahaman AFL masih berada pada tahap aksi. AFL mengerjakan soal dengan meniru contoh yang sama persis dengan soal. AFL juga belum memiliki pemahaman konsep operasi aljabar yang matang. Sehingga ketika AFL menemui soal yang sedikit berbeda dengan contoh soal ia juga menemui kesulitan.
4. Siswa RAK mampu mengerjakan dan menjawab semua soal. Namun ternyata pemahaman RAK rata-rata berada pada tahap aksi. RAK mengerjakan soal tanpa mempertimbangkan langkah yang akan ia gunakan terlebih dahulu. Apa yang terdapat dalam benaknya, langsung ia tulis. Hal ini menunjukkan RAK belum memiliki pemahaman akan langkah langkah yang ia gunakan. RAK hanya melakukan uji coba untuk menemukan jawaban. Selain itu kemampuan operasi aljabar RAK juga masih kurang.
5. Siswa AWA mampu mengerjakan semua soal, namun rata-rata pemahaman AWA masih berada pada tahap aksi. AWA banyak

mengabaikan simbol-simbol penting dalam turunan fungsi. AWA masih menyamakan simbol $f'(x)$ dengan $f(x)$. AWA belum dapat mengaitkan langkah-langkah matematika yang ia lakukan dengan teorema yang ada dalam konsep turunan.

6. Siswa IQA memiliki pemahaman konsep turunan pada tahap aksi. Namun pekerjaannya banyak yang dibantu oleh temanya. Sehingga ia tidak bisa menjelaskan bagaimana pekerjaan yang ia lakukan. IQA mengetahui ketika itu saja tanpa memiliki pemahaman tentang teorema atau aturan yang ia gunakan.
7. Rata-rata pemahaman siswa mengenai konsep turunan fungsi berdasarkan Teori APOS belum sampai pada tahap skema. Hal ini ditunjukkan dengan wawancara terhadap siswa yang berkemampuan tinggi, sedang dan rendah. Mereka belum dapat menjelaskan kaitan antara penggunaan turunan terhadap persamaan garis singgung. Selain itu pemahaman siswa terhadap konsep operasi aljabar sangat kurang.

Selain data yang diperoleh melalui hasil tes dan wawancara tersebut, peneliti menemukan temuan lain dari hasil pengamatan ketika melakukan pengecekan lembar jawaban, wawancara serta pengamatan secara langsung saat penelitian sedang berlangsung. Temuan lain tersebut tidak menjadi bahasan untuk peneliti karena berada di luar rumusan masalah peneliti. Namun temuan-temuan tersebut setidaknya bisa menjadi pengetahuan agar mampu ditindak lanjuti oleh pihak sekolah di luar kegiatan penelitian ini. Adapun temuan lain dalam penelitian ini yaitu:

- a. Siswa kurang memiliki motivasi untuk belajar matematika. Hal ini ditunjukkan dengan adanya sebagian besar siswa yang kurang aktif ketika pembelajaran berlangsung dan mereka lebih senang meniru pekerjaan temannya.
- b. Hampir seluruh siswa memiliki pemahaman konsep operasi aljabar yang belum matang. Sehingga mereka kesulitan untuk memahami konsep matematika yang baru dan rumit.
- c. Hampir seluruh siswa memperoleh pengetahuan matematika hanya dari guru dan modulnya. Mereka mengetahui sebatas apa yang dijelaskan oleh guru dan yang ada dalam modul. Mereka tidak tergerak untuk mempelajari matematika lebih dalam.