

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Penalaran

1. Pengertian Penalaran

Penalaran berasal dari kata nalar yang berarti pertimbangan tentang baik buruk, kekuatan pikir atau kegiatan yang memungkinkan seseorang berpikir logis. Sehingga penalaran dapat diartikan sebagai cara atau proses berpikir seseorang sesuai logika.¹⁸

Tidak semua berpikir merupakan penalaran. Proses berpikir dimulai dari pengamatan indera atau observasi empirik. Proses itu di dalam pikiran menghasilkan sejumlah pengertian dan proposisi sekaligus. Berdasarkan pengamatan-pengamatan indera yang sejenis, pikiran menyusun proposisi yang sejenis pula. Proses inilah yang disebut dengan penalaran yaitu berdasarkan sejumlah proposisi yang diketahui atau dianggap benar kemudian digunakan untuk menyimpulkan sebuah proposisi yang baru yang sebelumnya tidak diketahui.¹⁹

Terdapat beragam pengertian penalaran menurut para ahli, namun pada prinsipnya pengertian tersebut relatif sama. Menurut Shadiq, penalaran adalah suatu kegiatan berpikir khusus, dimana terjadi penarikan kesimpulan, pernyataan disimpulkan dari beberapa premis. Matematika dan proses penalaran merupakan dua hal yang tidak dapat dipisahkan.

¹⁸ Windy Novia, *Kamus Lengkap Bahasa Indonesia*, (Surabaya: Kashiko Press), hal. 382

¹⁹ Delima Mei Linola, dkk "Analisis Kemampuan Penalaran Matematis Peserta Didik dalam Menyelesaikan Soal Cerita di SMAN 6 Malang," dalam *Pi: Mathematics Education Journal*, Vol. 1, No. 1 (2017), hal. 29

Matematika dapat dipahami melalui proses penalaran, dan penalaran dapat dilatih melalui belajar matematika. Sedangkan menurut Rahayu, penalaran adalah proses berpikir yang sistematis untuk memperoleh kesimpulan atau pengetahuan yang bersifat ilmiah dan tidak ilmiah.²⁰

Dari definisi penalaran yang dikemukakan di atas, peneliti menyimpulkan bahwa penalaran adalah proses berpikir secara logis sesuai dengan aturan atau pola untuk menarik kesimpulan yang sah. Oleh karena itu, tidak semua kegiatan berpikir disebut bernalar. Namun, kegiatan penalaran terfokus pada upaya menarik kesimpulan secara logis berdasarkan pernyataan yang dianggap benar.

2. Ciri-Ciri Penalaran

Sebagai suatu kegiatan berpikir maka penalaran mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:²¹

- a. Adanya suatu pola pikir yang disebut logika.

Kegiatan penalaran merupakan suatu proses berpikir logis, dimana berpikir logis diartikan sebagai kegiatan berpikir menurut suatu aturan atau pola tertentu.

- b. Penalaran bersifat analitik dari proses berpikirnya

Penalaran merupakan suatu kegiatan berpikir yang

²⁰ Rizky Rahman, *Analisis Kemampuan Penalaran Matematis Ditinjau dari Creative Mathematically Founded Reasoning (CMR) dan Imitative Reasoning (IR) Pada Materi Fungsi Siswa Kelas VIII SMP Negeri 14 Semarang*, dalam (Skripsi: FMIP Universitas Negeri Semarang, 2017), hal. 24

²¹ Martin Bernard, "Pengaruh Pembelajaran dengan Menggunakan Multimedia Macromedia Falsh Terhadap Kemampuan Penalaran Matematik," dalam *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika Program Pasca Sarjana STKIP Siliwangi Bandung*, Vol. 1 (2014), hal. 426

menyandarkan diri pada suatu analisis. Kerangka berpikir yang digunakan untuk analisis tersebut adalah logika penalaran yang bersangkutan. Analisis adalah kegiatan pemerincian berupa proses mengamati sesuatu dengan memilah, mengurai, membedakan dan mengelompokkan menurut kriteria tertentu untuk mengetahui informasi yang sebenarnya.

3. Jenis Penalaran

Proses pembelajaran tertumpu pada dua macam penalaran, yaitu penalaran induktif dan penalaran deduktif.

- a. Penalaran induktif, yaitu suatu aktivitas berpikir untuk menarik suatu kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru yang bersifat umum berdasarkan pada pernyataan khusus yang diketahui benar. Pembelajaran diawali dengan memberikan contoh-contoh atau kasus khusus menuju konsep atau generalisasi.

Nilai kebenaran pada penalaran induktif dapat bersifat benar atau salah. Beberapa kegiatan yang tergolong pada penalaran induktif di antaranya adalah:²²

1. Transduktif : menarik kesimpulan dari satu kasus atau sifat khusus yang satu diterapkan pada kasus khusus lainnya. Suatu penalaran transduktif dapat bernilai benar atau salah.

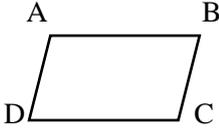
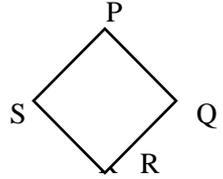
²² Sumarno, "Mengembangkan Instrumen untuk Mengukur *High Order Mathematical Thinking Skills*," hal. 12

Tabel 2.1
Contoh Transduktif

Contoh Transduktif Bernilai Benar	Contoh Transduktif Bernilai Salah
$5 + 7 = 12$ $9 + 7 = 16$ $13 + 15 = 28$ $15 + 19 = 34$ Contoh tersebut adalah contoh transduktif yang benar. Karena dua bilangan ganjil jika dijumlahkan akan menghasilkan bilangan genap dapat diterapkan pada keseluruhan kasus lain seperti pada contoh tersebut	15 adalah bilangan ganjil yang habis dibagi 3. 7 adalah bilangan ganjil. Jadi, 7 habis dibagi 3. Contoh tersebut adalah contoh transduktif yang salah. Karena kesimpulan setiap bilangan ganjil habis dibagi 3 tidak dapat diterapkan pada keseluruhan bilangan ganjil.

2. Analogi : penarikan kesimpulan berdasarkan keserupaan data atau proses.

Tabel 2.2 Contoh Analogi

Contoh Analogi (Masalah 1)	Analogi	Contoh Analogi (Masalah 2)
Perhatikan gambar jajar genjang ABCD berikut:  Diketahui ukuran $\angle BAD = 120^\circ$. Dapat hubungan sudut BAD dengan sudut 60° .	analogi yang digunakan adalah sudut dalam sepihak/ jumlah sudut yang berdekatan pada jajar genjang/ belah ketupat.	Perhatikan gambar belah ketupat berikut:  Diketahui ukuran sudut $\angle PSR = 105^\circ$. Dapat hubungan sudut PSR dengan sudut ...
Penyelesaian: $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$ $120^\circ + \angle ADC = 180^\circ$ $\angle ADC = 180^\circ - 120^\circ$ $\angle ADC = 60^\circ$ Terdapat hubungan sudut BAD dengan sudut 60° .		Penyelesaian: $\angle PSR + \angle QRS = 180^\circ$ $105^\circ + \angle PQR = 180^\circ$ $\angle PQR = 180^\circ - 105^\circ$ $\angle PQR = 75^\circ$ Terdapat hubungan sudut PSR dengan sudut 75°

Pada tabel 2.2 di atas, dapat diketahui bahwa antara masalah 1 (masalah sumber) dengan masalah 2 (masalah target) mempunyai kesamaan yang dapat digunakan sebagai dasar untuk menyelesaikan masalah 2 (masalah target) yaitu sudut dalam sepihak/ jumlah sudut yang berdekatan pada jajargenjang/ belah ketupat.

3. Generalisasi : penarikan kesimpulan umum berdasarkan sejumlah data yang teramati.

Tabel 2.3
Contoh Generalisasi

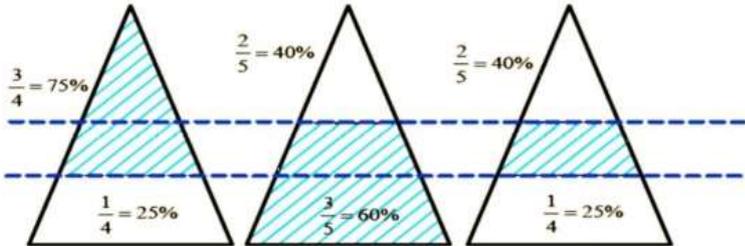
Permasalahan	Penyelesaian													
<p>Perhatikan pola bilangan di bawah ini!</p> <p>Pola 1</p> <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 15px; margin: 5px 0;"></div> <p>Pola 2</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: 5px 0;"> <tr><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td></tr> </table> <p>Pola 3</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: 5px 0;"> <tr><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td><td style="width: 20px; height: 15px;"></td></tr> </table> <p>Diketahui persegi panjang pada pola ke-1 panjangnya sama dengan 6 cm dan lebarnya sama dengan 4 cm. Berapakah keliling bangun pada pola ke-5?</p>														<ul style="list-style-type: none"> • Keliling persegi panjang pola ke-1 $K = 2 \times (p + l)$ $= 2 \times (6 + 4)$ $= 20$ • Keliling persegi panjang pola ke-2 $K = 2 \times (2p + 2l)$ $= 2 \times 2(p + l)$ $= 2 \times 20$ $= 40$ • Keliling persegi panjang pola ke-3 $K = 2 \times (3p + 3l)$ $= 2 \times 3(p + l)$ $= 3 \times 2(p + l)$ $= 3 \times 20$ $= 60$ <p>Rumus keliling persegi panjang pada pola ke-n = n x keliling persegi panjang pola ke-1. Maka keliling persegi panjang pola ke-5 = $5 \times 20 = 100$</p>

Pada contoh di atas, dapat ditarik kesimpulan umum berdasarkan sejumlah data berupa pola bahwa rumus keliling persegi panjang pada pola ke- $n = n \times$ luas persegi panjang pola ke-1.

4. Memperkirakan jawaban, solusi atau kecenderungan: interpolasi dan ekstrapolasi.

Tabel 2.4

Contoh Penalaran Induktif (Memperkirakan Jawaban)

Permasalahan
<p>Perhatikan segitiga-segitiga di bawah ini!</p>  <p>Jika luas daerah yang diarsir pada gambar pertama adalah $\frac{3}{4}$ bagian, pada gambar kedua $\frac{3}{5}$ bagian. Maka pada gambar ketiga adalah ...</p>
Penyelesaian
<p>Jika luas daerah yang diarsir yang pertama adalah $\frac{3}{4}$ bagian, pada gambar kedua $\frac{3}{5}$ bagian. Maka pada gambar ketiga diperoleh dengan :</p> <p>Andaikan $a = \frac{2}{5}$, $c = \frac{1}{4}$ $b = \dots?$ Jika $a + b + c = 1$ Maka $\frac{2}{5} + b + \frac{1}{4} = 1$ $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} + b = 1$ $\frac{8}{20} + \frac{5}{20} + b = 1$ $\frac{13}{20} + b = 1$ $b = 1 - \frac{13}{20}$</p>

$$b = \frac{20}{20} - \frac{13}{20}$$

$$b = \frac{7}{20}$$

Maka pada gambar ketiga luas daerah yang diarsir adalah $\frac{7}{20}$

$$\frac{8}{20} + \frac{5}{20} + \frac{7}{20} = 1$$

$$\frac{20}{20} = 1$$

1 = 1 (terbukti)

Pada tabel 2.4 di atas, metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut adalah dengan mencari nilai bagian yang diarsir pada rentang yang diketahui dengan memperkirakan nilai jika segitiga diarsir penuh.

- Memberi penjelasan dengan menggunakan model, fakta, sifat, hubungan atau pola yang ada.

Tabel 2.5

Contoh Penalaran Induktif

(Memberi Penjelasan dengan Model)

Permasalahan	
<p>Panjang jalan tol Bogor – Jakarta 60 km. pada pukul 12.00 mobil A berangkat dari pintu tol Bogor menuju Jakarta dengan kecepatan rata-rata 70 km/jam. Kedua mobil tersebut akan berpapasan pada pukul ...</p>	
Penyelesaian	
<p>Model permasalahan di atas dapat digambarkan sebagai berikut:</p>	
<p style="text-align: center;"> Bogor 60 km Jakarta </p> <p style="text-align: center;"> $V_o = 80 \text{ km/jam}$ P $V_o = 70 \text{ km/jam}$ </p> <p style="text-align: center;"> ← $x \text{ km}$ → ← $(60 - x) \text{ km}$ → </p>	
<p>Misalkan di titik P mobil A dan mobil B berpapasan, maka :</p> $t_A = t_B \rightarrow \frac{S_A}{v_A} = \frac{S_B}{v_B}$ $\frac{x}{80} = \frac{60-x}{70}$	

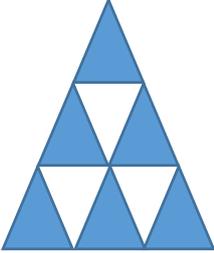
$x = 32 \text{ km}$ <p>Sehingga $t_A = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}$ jam $= 24$ menit</p> <p>Dengan demikian, mobil A dan mobil B berpapasan pada pukul 12.24</p>

Pada tabel 2.5 di atas, penyelesaian masalahnya dengan menggunakan model untuk mendapatkan suatu kesimpulan atau hasil.

6. Menggunakan pola hubungan untuk menganalisis situasi dan menyusun konjektur

Tabel 2.6
Contoh Penalaran Induktif
(Menggunakan Pola Hubungan)

Permasalahan	Penyelesaian
<p>Dimas bermain menyusun batang-batang korek api seperti tampak pada gambar di bawah ini. Apabila susunan batang korek api yang dibuat Dimas dilanjutkan, tentukan banyak batang korek api yang diperlukan untuk membuat susunan ke-6.</p> <p>Pola 1</p>  <p>Pola 2</p> 	<p>Perhatikan pola barisan pada permasalahan tersebut: 3, 9, 18, ...</p> <p>Jika setiap susunan batang korek api dilanjutkan maka diketahui bahwa pola barisan tersebut adalah barisan aritmatika bertingkat 3.</p> <p>Rumus mencari suku ke-n: $U_n = an^2 + bn + c$</p> <p>Misalkan: Jumlah korek api (x) = 3 beda pola ke 1 dan 2 (y) = 6 tingkatan pola (z) = 3</p> $a + b + c = x$ $3a + b = y$ $2a = z$ <p>Maka: $a + b + c = 3$ $3a + b = 6$ $2a = 3$</p> <p>Mencari nilai a, b, c terlebih dahulu.</p> <ul style="list-style-type: none"> • $2a = 3$ $a = \frac{3}{2}$ • $3a + b = 6$

<p>Pola 3</p> 	$3\left(\frac{3}{2}\right) + b = 6$ $\frac{9}{2} + b = 6$ $b = 6 - \frac{9}{2}$ $b = \frac{3}{2}$ <ul style="list-style-type: none"> • $a + b + c = 3$ $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + c = 3$ $\frac{6}{2} + c = 3$ $3 + c = 3$ $c = 3 - 3$ $c = 0$ <p>Sehingga jumlah batang korek api pada pola ke-7 diperoleh:</p> $U_n = an^2 + bn + c$ $U_6 = \frac{3}{2} \cdot 6^2 + \frac{3}{2} \cdot 6 + 0$ $U_6 = \frac{3}{2} \cdot 36 + \frac{3}{2} \cdot 6 + 0$ $U_6 = 54 + 9 + 0$ $U_6 = 63$ <p>Jadi, banyak batang korek api yang diperlukan untuk membuat susunan ke-6 sebanyak 63 batang.</p>
---	---

Pada tabel 2.6 di atas, penyelesaian masalah tersebut dengan menggunakan pola barisan aritmatika bertingkat 3 untuk menganalisis masalah jumlah batang korek pada susunan pola ke-6.

- b. Penalaran deduktif merupakan penarikan kesimpulan dari hal yang umum menuju hal yang khusus berdasarkan aturan yang telah disepakati. Nilai kebenaran dalam penalaran deduktif bersifat mutlak benar atau salah dan tidak kedua-duanya secara bersama-

sama.²³ Beberapa kegiatan yang tergolong pada penalaran deduktif di antaranya adalah:²⁴

1. Melaksanakan perhitungan berdasarkan aturan atau rumus tertentu.
2. Menyusun pembuktian langsung, pembuktian tak langsung dan pembuktian dengan induksi matematika.
3. Menarik kesimpulan logis (penalaran logis) berdasarkan aturan inferensi (proporsional), memeriksa validitas argumen, dan menyusun argumen yang valid, menarik kesimpulan berdasarkan proporsi, berdasarkan kombinasi, dan berdasarkan peluang, menyusun analisis dan sintesis beberapa kasus.

Tabel 2.7

Contoh Kegiatan Penalaran Deduktif

Kegiatan	Permasalahan	Penyelesaian
Melaksanakan perhitungan berdasarkan aturan atau rumus tertentu	Tunjukkan bahwa persamaan garis $9x + 3y - 15 = 0$ dan $3y - x - 7 = 0$ adalah tegak lurus	Syarat garis tegak lurus adalah $m_1 \cdot m_2 = -1$ <ul style="list-style-type: none"> • Persamaan 1 $9x + 3y - 15 = 0$ $m_1 = \frac{-\text{koefisien } x}{\text{koefisien } y}$ $m_1 = \frac{-9}{3}$ $m_1 = -3$ <ul style="list-style-type: none"> • Persamaan 2 $3y - x - 7 = 0$
Menyusun pembuktian langsung		

²³ Wahyu Cahyadi, dkk "Penggunaan Permainan Nara (Nata Alam Raya) dalam Meningkatkan Kemampuan Penalaran Siswa pada Materi Operasi Bilangan," dalam *Jurnal Equation: Teori dan Penelitian Pendidikan Matematika*, Vol. 1, No. 2 (2018) hal. 176

²⁴ Sumarno, "Mengembangkan Instrumen..." hal. 13

		$m_2 = \frac{-\text{koefisien } x}{\text{koefisien } y}$ $m_2 = \frac{-(-1)}{3}$ $m_2 = \frac{1}{3}$ $m_1 \cdot m_2 = -1$ $-3 \cdot \frac{1}{3} = -1$ $-1 = -1$ <p>Jadi, garis tersebut tegak lurus karena $m_1 \cdot m_2 = -1$</p>
Menarik kesimpulan logis		<p>Berdasarkan penyelesaian menggunakan aturan atau rumus $m_1 \cdot m_2 = -1$ maka dapat disimpulkan persamaan garis $9x + 3y - 15 = 0$ dan $3y - x - 7 = 0$ adalah saling tegak lurus karena hasil kali kedua gradiennya adalah -1</p>

Berdasarkan contoh kegiatan penalaran deduktif pada tabel 2.7, dapat diketahui bahwa dalam penyelesaian masalah tersebut dengan menggunakan suatu rumus untuk mengetahui gradien dari persamaan $ax + by + c = 0$ yaitu menggunakan rumus $m = \frac{-\text{koefisien } x}{\text{koefisien } y}$. Sedangkan untuk menunjukkan bahwa kedua persamaan garis saling tegak lurus dengan menggunakan aturan $m_1 \cdot m_2 = -1$. Sehingga dari tabel 2.7 dapat disimpulkan bahwa kedua persamaan tersebut saling tegak lurus karena hasil kali kedua gradiennya adalah -1.

B. Penalaran Analogi

Penalaran analogi merupakan proses penarikan kesimpulan yang membicarakan objek-objek, kejadian atau konsep berdasarkan pada kemiripan atau kesamaan hubungan antar hal yang dibandingkan.²⁵ Penalaran analogi merupakan suatu proses berpikir yang bertujuan untuk mendapatkan sebuah kesimpulan atau pengetahuan baru dengan cara melakukan perbandingan antar objek analogi atau dengan pengetahuan-pengetahuan yang telah ada sebelumnya.²⁶

Penalaran analogi sebagai salah satu kemampuan penalaran dengan menggunakan hubungan dari sebuah pola, mencakup kemampuan untuk mengetahui pola, mengidentifikasi pengulangan pola dengan variasi-variasi dari setiap elemennya, menyimpulkan berdasarkan pola dan mengkomunikasikan kesimpulan tersebut sebagai pencapaian akhirnya. Pada dasarnya, penalaran analogi termasuk dalam kemampuan kognitif yang sangat erat kaitannya dengan kemampuan representasi seseorang.²⁷

Analogi dalam matematika erat kaitannya dengan masalah sumber dan masalah target, dimana dalam memecahkan masalah target dibutuhkan konsep yang sebelumnya sudah direncanakan untuk memecahkan masalah sumber.

²⁵ Sugeng Widiyatmoko, "Deskripsi Penalaran...", hal. 10

²⁶ Ningrum dan Rosyidi, "Profil Penalaran Permasalahan Analogi Siswa Sekolah Menengah Pertama Ditinjau dari Perbedaan Gender," hal. 1

²⁷ Lyn D. English, "*Mathematical and Analogical Reasoning in Early Childhood*," dalam *Queensland University of Technology* (2004), hal. 3

Lyn D English menyebutkan bahwa masalah sumber dan masalah target memiliki ciri-ciri, sebagai berikut:²⁸

Tabel 2.8
Ciri-Ciri Masalah Sumber dan Masalah Target

Masalah Sumber	Masalah Target
Diberikan sebelum masalah target	Berupa masalah sumber yang dimodifikasi atau diperluas
Berupa masalah yang mudah dan sedang	Struktur masalah target berhubungan dengan struktur masalah sumber
Dapat membantu menyelesaikan masalah target atau sebagai pengetahuan awal dalam masalah target.	Berupa masalah yang kompleks.

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa masalah sumber adalah masalah yang sudah pernah diperoleh siswa, yang dapat digunakan sebagai dasar untuk menyelesaikan masalah lain yang serupa. Sedangkan masalah target adalah masalah baru yang diberikan kepada siswa, yang mempunyai struktur yang sama dengan masalah sumber tersebut. Penggunaan analogi dalam pembelajaran matematika dapat dilakukan dengan memberi masalah sumber dan masalah target pada siswa. Siswa diminta untuk menyelesaikan masalah sumber, kemudian siswa diberi masalah target untuk diselesaikan dengan menggunakan konsep yang sebelumnya telah digunakan untuk menyelesaikan masalah sumber.

Proses bernalar menggunakan analogi menurut Markus Ruppert meliputi kegiatan *Structuring*, *Mapping*, *Applying* dan *Verifying*. Berikut

²⁸ Lyn D. English, “*Mathematical and Analogical...*”, hal. 5

penjelasan dari empat tahapan penalaran analogi menurut Markus Ruppert yang harus dilalui siswa:²⁹

1. *Structuring*, yaitu proses mengidentifikasi setiap objek matematika yang ada pada masalah sumber dengan pengkodean atribut atau karakteristiknya dan membuat kesimpulan dari hubungan-hubungan yang identic di masalah sumber.
2. *Mapping*, yaitu mencari hubungan yang identik dari kode karakteristik antara masalah sumber dan masalah target kemudian menarik kesimpulan dari hubungan kesamaan/ keidentikan kode karakteristik antara masalah sumber dan masalah target, selanjutnya hubungan yang didapat tersebut dipetakan ke masalah target.
3. *Applying*, yaitu penerapan hubungan yang didapat dari masalah sumber ke masalah target untuk menyelesaikan masalah target.
4. *Verifying*, yaitu memeriksa kembali kebenaran terhadap penyelesaian masalah target dengan mengecek kesesuaian masalah target dengan masalah sumber.

Keempat tahap di atas akan digunakan sebagai indikator pencapaian siswa dalam melakukan penalaran analogi. Dengan adanya tahapan penalaran analogi tersebut, diharapkan penelitian ini dapat mengetahui bagaimana penalaran analogi siswa dalam menyelesaikan masalah matematika.

²⁹ Siti Mu'achiroh, *Profil Penalaran Analogi Siswa dalam Memecahkan Masalah Matematika Ditinjau dari Gaya Belajar Learning Style Inventory David A Kolb*, (Surabaya, 2018), hal. 12

C. Menyelesaikan Masalah Matematika

Masalah adalah ketidaksesuaian antara harapan dan kenyataan. Masalah adalah situasi atau keadaan yang dihadapi individu atau kelompok yang memerlukan suatu pemecahan tetapi tidak memiliki cara yang langsung untuk mendapatkan solusinya. Tidak semua pertanyaan adalah masalah, hanya pertanyaan yang menimbulkan konflik dalam pikiran siswa. Konflik ini tidak berasal dari karakteristik masalah tetapi tergantung kepada pengetahuan awal, pengalaman dan pelatihan siswa.³⁰

Menurut *Polya* penyelesaian masalah matematika dapat diimplementasikan dalam empat tahap yaitu: memahami masalah, merencanakan strategi pemecahan masalah, melaksanakan pemecahan masalah dan mereview kembali hasil yang diperolehnya.³¹ Penggunaan model *Polya* memberikan arahan kepada peserta didik untuk membuat tahapan dan langkah-langkah dalam menyelesaikan permasalahan, dan juga untuk menyempurnakan hasil penyelesaian yang dilakukan dengan melihat kembali hasil yang diperoleh.³² Secara *detail* keempat tahapan yang dikemukakan *Polya* dapat diuraikan sebagai berikut:³³

1. Memahami masalah

Memahami adalah aktivitas yang hendaknya dilakukan sebelum melakukan aktivitas pemecahan masalah. Sebagaimana

³⁰ Defi Puspita Sari, "Kemampuan Penalaran dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Siswa Kelas XI MAN 2 Tulungagung Pada Materi Program Linier Tahun Ajaran 2017/2018," (Tulungagung: Skripsi Tidak Diterbitkan, 2018), hal. 49

³¹ Akhsanul In'am, *Menguak Penyelesaian Masalah Matematika Analisis Pendekatan Metakognitif dan Model Polya*, (Malang: Universitas Muhammadiyah Malang, 2015), hal. 41

³² *Ibid*

³³ *Ibid.*, hal. 41-43

dikemukakan *John Dewey*, bahwa tahapan untuk menyelesaikan masalah yang pertama kali dilakukan adalah mencari informasi berkenaan dengan masalah tersebut. Hal ini bermakna bahwa dengan mencari informasi berkenaan dengan berbagai aspek yang berkaitan dengan masalah merupakan langkah untuk memahami masalah yang akan diselesaikan. Usaha yang dilakukan untuk memahami permasalahan dapat dilakukan dengan beberapa hal sebagai berikut: a) identifikasi variabel-variabel yang berkaitan dengan masalah; b) hubungan antara variabel-variabel yang telah ditentukan dan c) variabel yang diperlukan melalui kajian atau jawaban.

2. Merencanakan penyelesaian masalah

Setelah melakukan identifikasi permasalahan, langkah selanjutnya membuat petunjuk untuk merencanakan strategi yang sesuai untuk menyelesaikan masalah. Pemahaman terhadap masalah menghasilkan berbagai aspek yang diperlukan untuk menentukan perencanaan dalam menyelesaikan permasalahan. Setiap melakukan aktivitas, agar pelaksanaannya berhasil sesuai dengan yang diharapkan, sudah seharusnya dirancang perencanaan yang melibatkan strategi, pendekatan dan metode yang sesuai untuk menyelesaikannya. Beberapa aspek perencanaan yang perlu disiapkan dalam membuat perencanaan penyelesaian masalah adalah sebagai berikut: a) pilihlah tahapan yang sesuai dengan informasi yang diperoleh mengenai permasalahan yang akan diselesaikan; b) buatlah diagram yang tepat,

dan hal ini sangat membantu untuk menentukan langkah yang tepat dalam menyelesaikan masalah; c) lakukan analogi, hal ini diperlukan sebagai usaha untuk menentukan strategi, pendekatan dan metode yang tepat dengan membuat analog terhadap permasalahan yang relatif sama dengan permasalahan yang akan dicari pemecahannya dan 4) selanjutnya adalah memilih pendekatan yang tepat, sebab masalah yang berbeda pendekatan yang dilakukan adalah berlainan dan tidak setiap strategi, pendekatan dan metode dapat digunakan untuk menyelesaikan segala permasalahan.

3. Melaksanakan penyelesaian masalah

Pemahaman sebuah masalah yang dilanjutkan dengan penyusunan perencanaan yang baik dalam menyelesaikan masalah, tidaklah akan bermakna jika belum diimplementasikan. Upaya yang dilakukan untuk menunjukkan bahwa perencanaan tersebut benar-benar sesuai untuk menyelesaikan permasalahan adalah dengan melaksanakan penyelesaian masalah sesuai dengan pendekatan,, strategi dan model yang dipilih untuk memecahkan masalah.

4. Mereview kembali penyelesaian masalah

Manusia mempunyai sifat khilaf dan lupa, segala yang dilakukannya kadang sesuai dengan perencanaan dan juga kadang kurang sempurna dalam mengimplementasikan suatu perencanaan. Usaha yang hendaknya dilakukan dalam menyelesaikan masalah adalah mereview kembali jawaban yang telah diperolehnya.

Pelaksanaan review dapat dilakukan dengan menggunakan jawaban yang telah diperoleh melalui metode invers sehingga akan terlihat apakah jawaban yang telah diperoleh benar-benar sesuai dengan jawaban yang dikehendaki dari permasalahan, misalnya untuk soal yang berkaitan dengan perkalian dapat dilakukan dengan mereview melalui langkah-langkah pembagian.

D. Penalaran Analogi dalam Menyelesaikan Masalah Relasi dan Fungsi

1. Penalaran Analogi dalam Menyelesaikan Masalah

Siswa dalam menyelesaikan masalah matematika, dituntut untuk berpikir secara logis bagaimana cara menyelesaikan masalah matematika tersebut. Kegiatan berpikir secara logis ini berkaitan erat dengan penalaran.

Penalaran adalah proses berpikir siswa secara logis sesuai dengan aturan atau pola untuk menarik kesimpulan yang sah. Oleh karena itu, tidak semua kegiatan berpikir disebut bernalar. Namun, kegiatan penalaran terfokus pada upaya menarik kesimpulan secara logis berdasarkan pernyataan yang dianggap benar.

Secara umum, ada dua macam penalaran, yaitu penalaran induktif dan penalaran deduktif. Penalaran induktif adalah suatu aktivitas berpikir untuk menarik suatu kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru yang bersifat umum berdasarkan pada pernyataan khusus yang diketahui benar. Pada penalaran induktif dalam pembelajaran guru terlebih dahulu memberikan contoh-contoh atau

kasus khusus yang nantinya ditarik kesimpulan menuju pernyataan baru yang bersifat umum. Sedangkan, penalaran deduktif adalah penarikan kesimpulan dari hal yang umum menuju hal yang khusus berdasarkan aturan yang telah disepakati. Nilai kebenaran dalam penalaran deduktif bersifat mutlak benar atau salah dan tidak keduanya secara bersama-sama.

Penalaran analogi tergolong penalaran induktif karena pada penalaran analogi seseorang menarik kesimpulan pada suatu pernyataan berdasarkan pada keserupaan proses atau data yang diberikan. Penalaran analogi merupakan proses pengambilan kesimpulan yang membicarakan objek-objek, kejadian atau konsep berdasarkan pada kemiripan atau kesamaan hubungan antar hal yang dibandingkan.³⁴

Menurut *Polya* penyelesaian masalah matematika dapat diimplementasikan dalam empat tahap yaitu: memahami masalah, merencanakan strategi pemecahan masalah, melaksanakan pemecahan masalah dan mereview kembali hasil yang diperolehnya.³⁵

Seseorang dikatakan bernalar dengan menggunakan analogi dalam menyelesaikan masalah jika:³⁶

³⁴ Sugeng Widiyatmoko, "Deskripsi Penalaran...", hal. 10

³⁵ Akhsanul In'am, "Menguak Penyelesaian...", hal. 41

³⁶ Memen Permata Azmi, "Mengembangkan Kemampuan Analogi Matematis," dalam *Jurnal Pendidikan Matematika*, Vol. 1, No. 1 (2017), hal. 104

- a. Dapat mengidentifikasi keterkaitan/keserupaan proses antara masalah yang dihadapi (masalah target) dengan pengetahuan yang dimiliki (masalah sumber),
- b. Dapat mengidentifikasi suatu struktur masalah yang sesuai dengan masalah target,
- c. Dapat mengetahui cara menggunakan masalah sumber dalam menyelesaikan masalah target. Artinya siswa dapat memperkirakan aturan yang membentuk masalah target.

Tabel 2. 9
Penalaran Analogi Markus Ruppert dalam Tahap Penyelesaian Masalah Menurut Polya

Penyelesaian Masalah Polya	Tahap Penalaran Analogi	Indikator
Memahami masalah	<i>Structuring</i> (Penstrukturan)	Mengidentifikasi setiap objek matematika yang ada pada masalah sumber dengan karakteristiknya. Serta mengidentifikasi informasi yang bersesuaian antara masalah sumber dan masalah target.
Merencanakan penyelesaian masalah	<i>Mapping</i> (Pemetaan)	Mencari hubungan yang identik antara masalah sumber dan masalah target kemudian menarik kesimpulan dari hubungan kesamaan/keidentikan ciri-ciri antara masalah sumber dan masalah target, selanjutnya hubungan yang diperoleh tersebut dipetakan ke masalah target.
Menyelesaikan masalah sesuai rencana	<i>Applying</i> (Penerapan)	Proses penerapan hubungan yang didapat dari masalah sumber ke masalah target untuk menyelesaikan masalah target.
Mereview kembali penyelesaian masalah	<i>Verifying</i> (Verifikasi)	Memeriksa kembali kebenaran terhadap penyelesaian masalah target dengan mengecek kesesuaian masalah target dengan masalah sumber.

Berikut contoh pengaplikasian penalaran analogi dalam menyelesaikan masalah matematika berdasarkan tahapan menurut Markus Ruppert:

Tabel 2.10

Contoh Masalah Sumber dan Masalah Target

Masalah Sumber	Masalah Target
Pada pemetaan $f: x \rightarrow 3x + 2$, jika daerah asalnya $x \in \{2, 3, 4, 5\}$, rangenya adalah	Pada pemetaan $f: x \rightarrow 4x + 5$, jika daerah asalnya $\{x \mid x \leq 5, x \text{ bilangan asli}\}$, maka range nya adalah ...

Tabel 2.11

Penyelesaian Masalah

Berdasarkan Tahapan Menurut Markus Ruppert

Penyelesaian Masalah Sumber	Penyelesaian Masalah Target
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <ul style="list-style-type: none"> • Diketahui $f: x \rightarrow 3x + 2$ $x \in \{2, 3, 4, 5\}$ • Ditanya : range? </div> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;"><i>Structuring</i></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Jawab</p> $f(2) = 3(2) + 2 = 8$ $f(3) = 3(3) + 2 = 11$ $f(4) = 3(4) + 2 = 14$ $f(5) = 3(5) + 2 = 17$ <p>Jadi, range = $\{8, 11, 14, 17\}$</p> </div> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;"><i>Mapping</i></p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <ul style="list-style-type: none"> • Diketahui $f: x \rightarrow 4x + 5$ $\{x \mid x \leq 5, x \text{ bilangan asli}\}$ Berarti $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ • Ditanya: range? </div> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;"><i>Structuring</i></p> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;"><i>Applying</i></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Jawab</p> $f(1) = 4(1) + 5 = 9$ $f(2) = 4(2) + 5 = 13$ $f(3) = 4(3) + 5 = 17$ $f(4) = 4(4) + 5 = 21$ $f(5) = 4(5) + 5 = 25$ <p>Jadi, range $\{9, 13, 17, 21, 25\}$</p> </div>

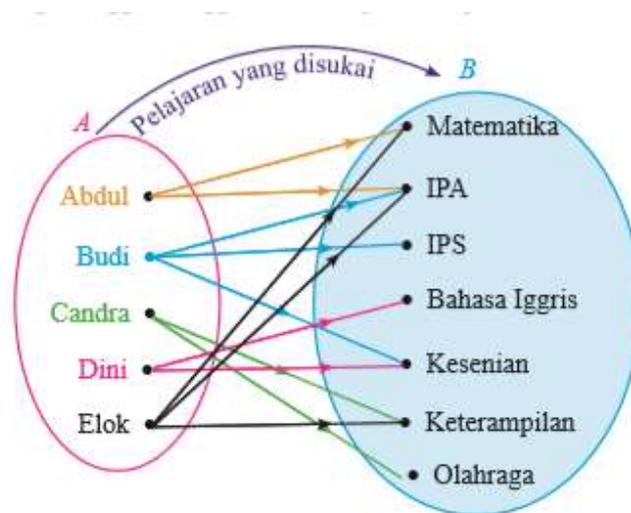
Untuk tahap *verifying* (pemeriksaan) dapat dilihat ketika siswa dapat menjelaskan secara jelas proses penyelesaian masalah sumber dan masalah target pada saat memeriksa kembali jawaban mereka.

2. Relasi dan Fungsi

a. Relasi

Relasi antara dua himpunan, misal himpunan A dan himpunan B, adalah suatu aturan yang memasangkan anggota-anggota himpunan B. Relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan dengan 3 cara yaitu:³⁷

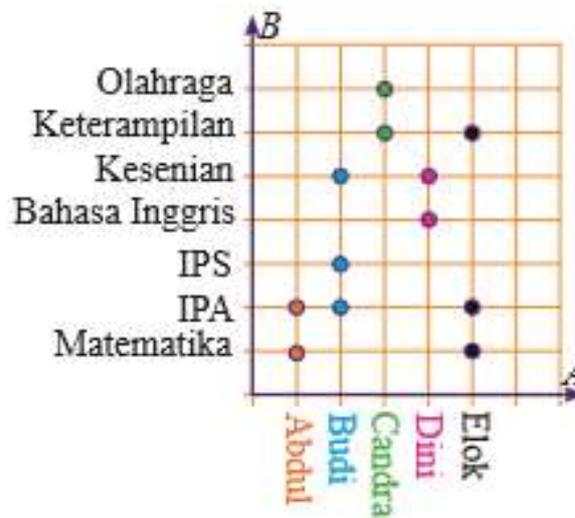
1) Menggunakan diagram panah



Gambar 2.1 Diagram Panah

2) Menggunakan diagram kartesius

³⁷ Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, *Matematika*. (Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2017), hal. 81-82



Gambar 2.2 Diagram Kartesius

3) Menggunakan himpunan pasangan berurutan.

$\{(Abdul, Matematika), (Abdul, IPA), (Budi, IPA), (Budi, IPS), (Budi, Kesenian), (Candra, Keterampilan), (Candra, Olahraga), (Dini, Bahasa Inggris), (Dini, Kesenian), (Elok, Matematika), (Elok, IPA), (Elok, Keterampilan)\}$.

b. Fungsi

Fungsi adalah relasi khusus yang memasangkan setiap anggota himpunan A tepat satu di anggota himpunan B. Pada fungsi terdapat domain (daerah asal), kodomain (daerah kawan) dan range (daerah hasil). Fungsi f yang menghubungkan anggota himpunan A dan himpunan B dinotasikan $f : A \rightarrow B$. Fungsi umumnya disajikan dengan 5 cara, yaitu:³⁸

1) Himpunan Pasangan Berurutan

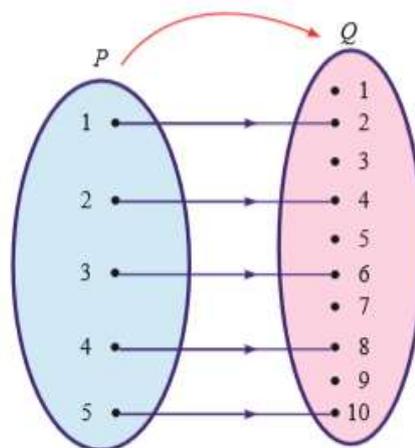
³⁸ Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, *Matematika* (Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2017), hal. 105-106

Diketahui fungsi f dari $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ke $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Relasi yang didefinisikan adalah “setengah dari”. Relasi ini dapat dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan, sebagai berikut:

$$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}.$$

2) Diagram Panah

Diketahui fungsi f dari $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ke $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Relasi yang didefinisikan adalah “setengah dari”. Relasi ini dapat dinyatakan dengan diagram panah, sebagai berikut:



Gambar 2.3 Diagram Panah

3) Persamaan Fungsi

Diketahui fungsi f dari $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ke $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Relasi yang didefinisikan adalah “setengah dari”. Relasi ini dapat dinyatakan dengan rumus fungsi,

sebagai berikut:

Untuk menyatakan dengan rumus fungsi, coba perhatikan pola berikut ini. Dari himpunan pasangan berurutan $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$ didapat:

$$(1, 2) \rightarrow (1, 2 \times 1)$$

$$(2, 4) \rightarrow (2, 2 \times 2)$$

$$(3, 6) \rightarrow (3, 2 \times 3)$$

$$(4, 8) \rightarrow (4, 2 \times 4)$$

$$(5, 10) \rightarrow (5, 2 \times 5)$$

Kalau anggota P disebut x dan anggota Q disebut y , maka $x = \frac{1}{2}y$. Dari $x = \frac{1}{2}y$, didapatkan $y = 2x$. Bentuk ini biasa ditulis dengan $f(x) = 2x$, untuk setiap $x \in P$.

4) Tabel

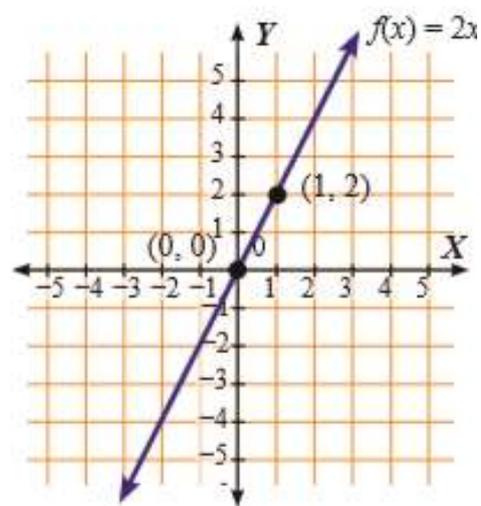
Diketahui fungsi f dari $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ke $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Relasi yang didefinisikan adalah “setengah dari”. Relasi ini dapat dinyatakan dengan tabel, sebagai berikut:

Tabel 2.4 Relasi

X	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	4	6	8	10

5) Grafik

Diketahui fungsi f dari $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ke $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Relasi yang didefinisikan adalah “setengah dari”. Relasi ini dapat dinyatakan dengan grafik, sebagai berikut:



Gambar 2.4 Grafik

E. Penelitian yang Relevan

Penelitian relevan adalah penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, objek dan variabel penelitian hampir sama dengan penelitian saat ini, sehingga dapat dijadikan sebagai bahan referensi dan pembandingan terhadap penelitian ini. Berikut referensi dan pembandingan terhadap penelitian ini:

1. Siti Mu'achiroh (2018).³⁹ Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa penalaran analogi siswa dalam memecahkan masalah matematika ditinjau dari gaya belajar *Accomodator* (Ac), *Assimilator* (As), *Converger* (Co), dan *Diverger* (Di) sebagian besar gaya belajar yang dimiliki siswa adalah *Diverger* (Di) yaitu dengan menuliskan informasi dari soal 1 (soal sumber), mencari hubungan antara soal 1 (soal sumber) dan soal 2 (soal target), menerapkan hubungan tersebut dengan menyamakan proses pemecahan kedua soal, dimulai dari memisalkan variabel gamis dan jilbab yang terdapat pada soal 2 (soal target) menjadi x dan y , kemudian memeriksa kembali kedua proses pemecahan untuk dijelaskan. Menanggapi hal tersebut, peneliti juga memberikan saran, yakni diharapkan guru mata pelajaran matematika dapat melatih dan mengasah kemampuan matematika siswa terkait dengan penalaran analogi siswa dalam memecahkan masalah matematika dengan lebih memperhatikan kebutuhan siswa seperti gaya belajar, tidak hanya gaya belajar VAK (Visual, Audio dan Kinestetik).

Persamaan penelitian ini adalah dari segi variabel yaitu penalaran analogi siswa, selain itu sama-sama menggunakan pendekatan kualitatif. Sedangkan perbedaannya adalah dari segi materi, waktu dan lokasi.

³⁹ Siti Mu'achiroh, *Profil Penalaran...*, hal. 112

2. Rina Safrina (2016).⁴⁰ Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa proses berpikir analogi siswa laki-laki dengan kemampuan berpikir analogi tinggi melewati semua tahapan berpikir analogi yaitu *encoding*, *inferring*, *mapping*, dan *applying*. Subjek laki-laki dengan kemampuan berpikir analogi sedang di tahap *inferring* mengidentifikasi dengan baik masalah sumber namun pada tahap *mapping* masih kurang baik dalam mengidentifikasi masalah target. Pada tahap *encoding* dan *applying* bisa dikerjakan namun tidak sempurna penyelesaian jawabannya. Lalu, pada subjek laki-laki dengan kemampuan berpikir analogi rendah keliru melewati semua tahap berpikir analogi. Sedangkan proses berpikir analogi siswa perempuan pada subjek perempuan dengan kemampuan berpikir analogi tinggi melewati semua tahap berpikir analogi. Subjek perempuan dengan kemampuan berpikir analogi sedang pada tahap *inferring* dan *encoding* sudah baik dalam mengidentifikasi masalah sumber. Namun, pada tahap *mapping* dan *applying* tidak sempurna penyelesaiannya. Lalu, subjek perempuan dengan kemampuan berpikir analogi rendah tidak bisa melewati semua tahap berpikir analogi. Menanggapi hal tersebut, peneliti juga memberikan saran, yakni diharapkan siswa lebih meningkatkan kemampuan berpikir analogi dalam cara belajarnya. Bagi guru hendaknya menerapkan proses berpikir analogi dalam belajar sehari-hari. Bagi peneliti

⁴⁰ Rina Safrina Sari, *Analisis Proses...*, " hal. 133

lanjutan agar dapat melakukan penelitian yang sejenis dengan pembahasan yang lebih menarik dengan materi yang lainnya.

Persamaan penelitian ini adalah dari segi variabel yaitu Analogi. Selain itu, persamaannya terletak pada subjek penelitiannya yaitu siswa laki-laki dan perempuan. Sedangkan perbedaannya terletak pada segi materi, tahapan berpikir analogi, waktu dan lokasi.

Tabel 2.12
Perbandingan Penelitian

Nama Peneliti	Hasil Penelitian	Persamaan	Perbedaan
Siti Mu'achiroh (2018)	Penalaran analogi siswa dalam memecahkan masalah matematika ditinjau dari gaya belajar <i>Accomodator</i> (Ac), <i>Assimilator</i> (As), <i>Converger</i> (Co), dan <i>Diverger</i> (Di) sebagian besar gaya belajar yang dimiliki siswa adalah <i>Diverger</i> (Di).	- Variabel penelitian yang dipilih yakni penalaran analogi siswa	- Subjek dan lokasi penelitian - Tujuan yang hendak dicapai - Materi yang dipilih untuk penelitian
Rina Safrina Sari (2016)	- Proses berpikir analogi siswa laki-laki dengan kemampuan berpikir analogi tinggi melewati semua tahapan berpikir analogi. - Subjek laki-laki dengan kemampuan berpikir analogi sedang hanya pada tahap <i>inferring</i> mengidentifikasi dengan baik masalah sumber. - Pada subjek laki-laki dengan kemampuan berpikir analogi rendah keliru melewati semua tahap berpikir analogi.	- Subjek dalam penelitian ini ditinjau dari gender.	- Lokasi penelitian - Tujuan yang hendak dicapai - Materi yang dipilih dalam penelitian

	<ul style="list-style-type: none"> - Pada proses berpikir analogi subjek perempuan dengan kemampuan berpikir analogi tinggi melewati semua tahap berpikir analogi. - Subjek perempuan dengan kemampuan berpikir analogi sedang hanya tahap <i>inferring</i> dan <i>encoding</i> yang sudah baik dalam mengidentifikasi masalah sumber. - subjek perempuan dengan kemampuan berpikir analogi rendah tidak bisa melewati semua tahap berpikir analogi. 		
--	---	--	--

F. Paradigma Penelitian

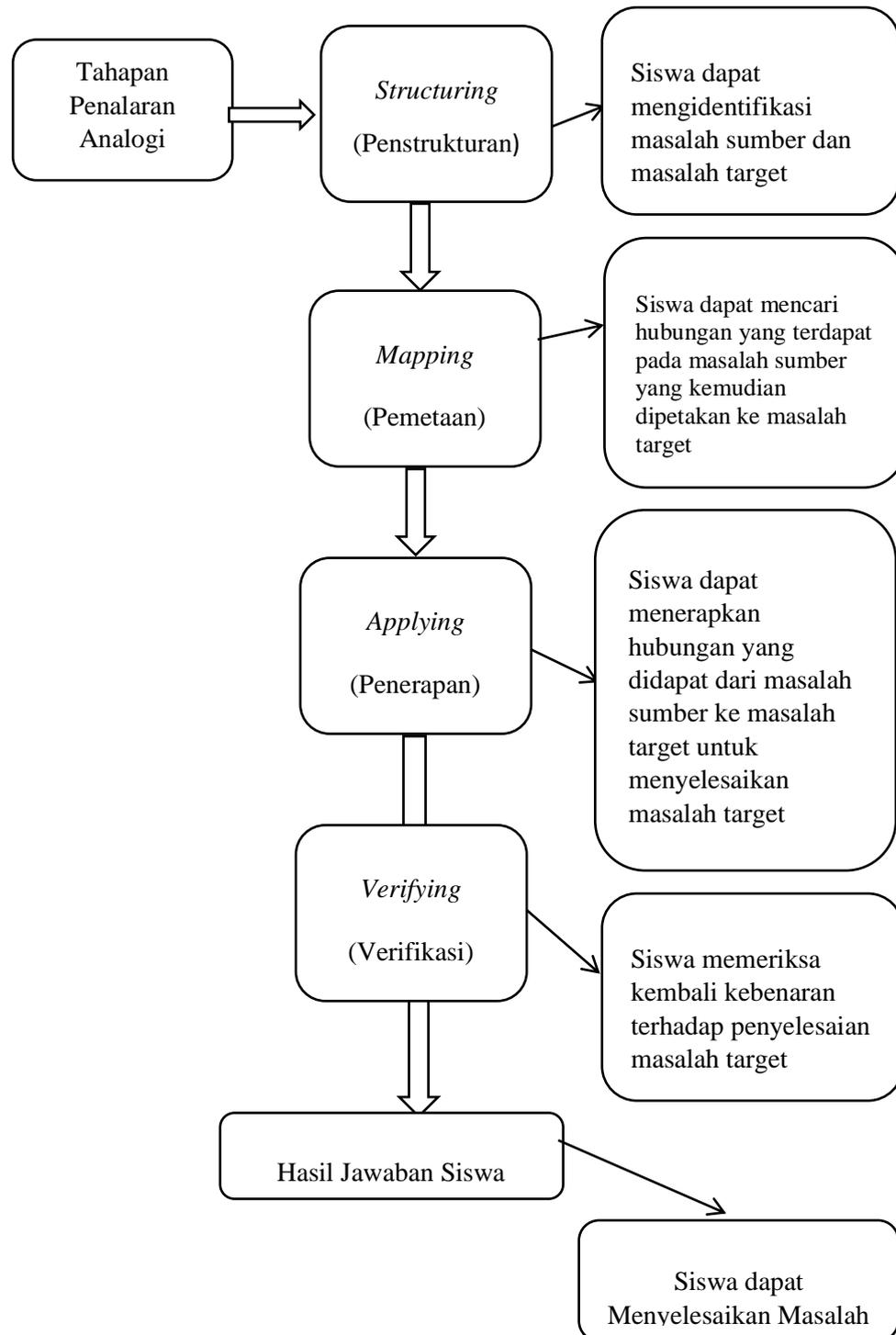
Pada saat pembelajaran di kelas, tentunya siswa mengikuti alur pembelajaran yang guru terapkan saat proses pembelajaran. Saat itu, tidak jarang dari siswa yang mengalami masalah dalam memahami pelajaran atau menyelesaikan masalah yang guru berikan. Masalah tersebut dapat diatasi, salah satunya dengan meningkatkan penalaran analogi siswa. Masih banyak siswa yang penalaran analoginya kurang berkembang. Hal ini disebabkan karena siswa cenderung terpaku pada contoh yang guru berikan. Sehingga ketika guru menyajikan masalah dengan bentuk yang sedikit berbeda, siswa akan mengalami kesulitan dalam menyelesaikannya.

Berdasarkan uraian di atas, maka penelitian ini dilakukan untuk mengetahui penalaran analogi siswa laki-laki dan siswa perempuan dalam menyelesaikan masalah matematika berupa soal-soal pada materi relasi

dan fungsi. Dalam penelitian ini, peneliti menggunakan tahap-tahap penalaran analogi menurut Markus Ruppert.

Berikut kerangka berpikir dari penalaran analogi menurut Markus

Ruppert:



Bagan 2.1 Kerangka Berpikir