

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Dalam bab ini erat kaitanya dengan hakikat dan juga harus sesuai dengan penelitian yang ada dalam kajian pustaka. Untuk itu beberapa isi tinjauan pustaka yang ada sebagai berikut.

A. HAKIKAT MATEMATIKA

1. Pengertian Matematika

Istilah matematika berasal dari kata Yunani “mathein” atau “mathenein”, yang artinya “mempelajari”. Mungkin juga, kata tersebut erat hubungannya dengan kata sansekerta “medha” atau “widya” yang artinya “kepandaian”, “ketahuan”, “inteleksi”. Dalam buku *Landasan Matematika*, Andi Hakim Nasution tidak menggunakan istilah “ilmu pasti” dalam menyebut istilah ini.¹ Kata “ilmu pasti” merupakan terjemahan dari bahasa Belanda “wiskunde”. Kemungkinan besar bahwa kata “wis” ini ditafsirkan sebagai “pasti”, karena di dalam bahasa Belanda ada ungkapan “wis an zeker”: “zeker” berarti “pasti”, tetapi “wis” di sini lebih dekat artinya ke “wis” dari kata “wisdom” dan “wissenscaft”, yang erat hubungannya dengan “widya” . karena itu, “wiskunde” sebenarnya harus diterjemahkan sebagai “ilmu tentang belajar” yang sesuai dengan arti “mathein” pada matematika.

¹ Masykur Ag, Moch, dan Abdul Halim, *Mathematical intelligence: Cara Cerdas Melatih Otak dan Menanggulangi Kesulitan Belajar*, (Jogjakarta: Ar-Ruzz Media, 2008), hlm. 43.

Dengan demikian istilah “matematika” lebih tepat digunakan daripada “ilmu pasti” karena, dengan menguasai matematika orang akan dapat belajar untuk mengatur jalan pemikirannya dan sekaligus belajar menambah kepandaiannya.² Dengan kata lain, belajar matematika sama halnya dengan belajar logika, karena kedudukan matematika dalam ilmu pengetahuan adalah sebagai ilmu dasar atau ilmu alat. Sehingga, untuk dapat berkecimpung di dunia sains, teknologi, atau disiplin ilmu lainnya, langkah awal yang harus ditempuh adalah menguasai alat atau ilmu dasarnya, yakni menguasai matematika secara benar.

Beberapa definisi atau ungkapan pengertian matematika hanya dikemukakan terutama berfokus pada tinjauan pembuat definisi itu. Hal sedemikian dikemukakan dengan maksud agar dapat dipahami dengan mudah keseluruhan pandangan para ahli matematika. Ada tokoh yang sangat tertarik dengan perilaku bilangan, ia melihat matematika ia melihat dari sudut pandang bilangan itu. Tokoh lain lebih mencurahkan perhatian kepada struktur-struktur, ia melihat matematika dari sudut pandang struktur-struktur itu. Tokoh lain lagi lebih tertarik pada pola pikir ataupun sistematika, ia melihat dari sudut pandang sistematika itu. Demikian sehingga banyak muncul definisi atau pengertian tentang matematika yang beraneka ragam. Atau dengan kata lain tidak terdapat satu definisi yang tunggal dan disepakati oleh semua tokoh atau pakar matematika.

Kalau kita telaah, matematika itu tidak hanya berhubungan dengan bilangan-bilangan serta operasi-operasinya, melainkan juga unsur ruang sebagai

² *Ibid.*, hal. 43

sarananya. Kalau pengertian bilangan dan ruang ini dicakup menjadi satu istilah yang disebut dengan kuantitas, maka nampaknya matematika dapat didefinisikan sebagai ilmu yang mengenai kuantitas.³ Menurut Johnson dan Myklebust, matematika adalah bahasa simbolis yang fungsi praktisnya untuk mengekspresikan hubungan-hubungan kuantitatif dan keruangan sedangkan teoritisnya adalah untuk memudahkan berpikir. Lerner Mengemukakan bahwa matematika di samping sebagai bahasa simbolis juga merupakan bahasa universal yang memungkinkan manusia memikirkan, mencatat, dan mengkomunikasikan ide mengenai elemen dan kuantitas. Kline juga mengemukakan bahwa matematika merupakan bahasa simbolis dan ciri utamanya adalah penggunaan cara bernalar deduktif, tetapi juga tidak melupakan cara bernalar induktif.⁴ Hakikat matematika berkenaan dengan ide-ide, struktur-struktur, dan hubungan-hubungannya yang diatur menurut urutan yang logis, jadi matematika berkenaan dengan konsep-konsep abstrak.⁵

Dari uraian diatas dapat disimpulkan beberapa pendapat tentang matematika yaitu sebuah ilmu pasti yang menggunakan bahasa simbolis serta ilmu yang membahas tentang kuantitas berhubungan dengan ide, struktur dan hubungan yang diatur menurut urutan yang logis.

³ Herman Hudojo, *Strategi Mengajar Belajar Matematika*, (Malang: IKIP Malang, 1990), hal. 2.

⁴ Mulyono Abdurrahman, *Pendidikan Bagi Anak Berkesulitan Belajar*, (Jakarta: PT. Rineka Cipta, 2003)

⁵ Herman Hudojo, *Pengembangan Kurikulum Matematika dan Pelaksanaanya di Depan Kelas*, (Surabaya: Usaha Offset Printing), hal. 96.

2. Proses Belajar Matematika

Pola tingkah laku manusia yang tersusun menjadi suatu model sebagai prinsip-prinsip belajar diaplikasikan kedalam matematika. Prinsip belajar ini haruslah dipilih sehingga cocok untuk mempelajari matematika. Matematika yang berkenaan dengan ide-ide abstrak yang diberi simbol-simbol tersusun sesuai tingkatan dan penalarannya deduktif, sehingga belajar matematika merupakan kegiatan mental yang tinggi.

Mempelajari konsep B yang mendasarkan kepada konsep A, siswa perlu memahami terlebih dahulu konsep A. Tanpa memahami konsep A, tidak mungkin siswa akan memahami konsep B, yang artinya mempelajari matematika harus bertahap dan berurutan serta mendasarkan kepada pengalaman belajar yang lalu.⁶ Karena matematika merupakan ide-ide abstrak yang diberi simbol-simbol, maka konsep-konsep matematika harus dipahami lebih dahulu sebelum memanipulasi simbol-simbol itu.

Siswa akan lebih mudah mempelajari sesuatu bila belajar itu didasari kepada apa yang telah diketahui siswa tersebut. Karena itu untuk mempelajari suatu materi matematika yang baru, pengalaman belajar siswa sebelumnya akan mempengaruhi terjadinya proses belajar matematika tersebut. Maka demikian belajar matematika yang terputus-putus akan mengganggu terjadinya proses belajar. Ini berarti proses belajar matematika akan terjadi dengan lancar bila belajar itu sendiri dilakukan secara teratur. Di dalam proses belajar matematika, terjadi juga proses berpikir, sebab seseorang dikatakan berpikir bila orang itu

⁶ Herman Hudojo, *Strategi Mengajar Belajar . . .*, hal. 4.

melakukan kegiatan mental dan orang yang belajar matematika selalu melakukan kegiatan mental.⁷

3. Faktor-faktor yang Mempengaruhi Terjadinya Proses Pembelajaran dan Belajar Matematika

Belajar matematika dikatakan berhasil bila proses belajarnya baik yaitu melibatkan intelektual peserta didik secara optimal. Peristiwa yang kita kehendaki bisa tercapai bila faktor-faktor berikut ini dapat dikelola sebaik-baiknya:

a. Peserta Didik

Keberhasilan atau kegagalan belajar sangatlah tergantung kepada peserta didik. Misalnya saja, bagaimana kemampuan dan kesiapan peserta didik untuk mengikuti kegiatan belajar matematika, bagaimana sikap dan minat peserta didik terhadap matematika. Disamping itu juga bagaimana kondisi peserta didik, misalnya kondisi fisiologisnya. Orang yang dalam keadaan segar jasmaninya akan lebih baik belajarnya dari pada orang yang dalam keadaan lelah. Kondisi psikologisnya, seperti perhatian, pengamatan, ingatan dan sebagainya juga berpengaruh terhadap kegiatan belajar seseorang. Intelegensi peserta didik juga berpengaruh terhadap kelancaran belajarnya

b. Pengajar

Faktor berikutnya setelah peserta didik adalah pengajar. Pengajar melaksanakan kegiatan Pembelajaran sehingga proses belajar diharapkan dapat berlangsung efektif. Kemampuan pengajar dalam menyampaikan matematika dan sekaligus menguasai materi yang diajarkan sangat mempengaruhi terjadinya

⁷ *Ibid.*, hal 5

proses belajar. Kepribadian, pengalaman dan motivasi pengajar dalam Pembelajaran matematika juga berpengaruh terhadap efektivitasnya proses belajar.

c. Sarana dan Prasarana

Sarana yang lengkap seperti adanya buku teks dan alat bantu belajar akan merupakan alat fasilitas belajar yang penting. Demikian pula pra sarana yang mapan seperti ruangan yang sejuk dan bersih dengan tempat duduk yang nyaman biasanya lebih memperlancar terjadinya proses belajar. Penyediaan sumber belajar yang lain, seperti majalah tentang pengajaran matematika, laboratorium matematika dan lain-lain akan meningkatkan kualitas belajar peserta didik.

d. Penilaian

Penilaian dipergunakan di samping untuk melihat bagaimana hasil belajarnya, tetapi juga untuk melihat bagaimana berlangsungnya interaksi antara pengajar dengan peserta didik. Misalnya kita dapat menganalisa tentang (1) keberhasilan peserta didik dalam belajar matematika, (2) apakah di dalam proses belajar matematika itu didominasi pengajar ataukah komunikasi terjadi dua arah, (3) apakah pertanyaan yang diajukan pengajar kepada peserta didik merangsang belajar atau mematikan?, (4) apakah jenis pertanyaan yang diajukan pengajar menyangkut ranah kognitif rendah seperti ingatan dan pemahaman saja ataukah ranah kognitif tinggi seperti penyelesaian masalah.

B. PEMAHAMAN

Pemahaman merupakan aspek yang mendasar dalam belajar matematika. Pemahaman adalah proses, cara, perbuatan memahami atau memahamkan. Menurut Bloom, “pemahaman merupakan kemampuan untuk memahami apa yang sedang dikomunikasikan dan mampu mengimplementasikan ide tanpa harus mengaitkannya dengan ide lain dan juga tanpa harus melihat ide itu secara mendalam”.⁸ Pemahaman atau *comprehension* juga dapat diartikan menguasai suatu pikiran.⁹

Menurut Ernes Hilgrad ada enam ciri dari belajar yang mengandung pemahaman:¹⁰

- Pemahaman dipengaruhi oleh kemampuan dasar
- Pemahaman dipengaruhi pengalaman belajar yang lalu
- Pemahaman tergantung pada pengaturan situasi
- Pemahaman didahului oleh usaha-usaha dan coba-coba
- Belajar dengan pemahaman dapat diulangi
- Suatu pemahaman dapat diaplikasikan bagi pemahaman situasi lain

Untuk memahami suatu materi dalam matematika diperlukan penguasaan pemahaman konseptual dan prosedural. Kedua pemahaman tersebut saling terkait di dalam penggunaannya untuk menyelesaikan soal-soal matematika. Oleh karena itu pemahaman konseptual dan prosedural merupakan aspek yang penting yang

⁸ Dede Rosyda, *Paradigma Pendidikan Demokratis*, (Jakarta: Kencana, 2004), hal. 69

⁹ Sardiman, A. M, *Interaksi & Motivasi Belajar Mengajar*, (Jakarta: Rajawali Pers, 2003), hal. 42

¹⁰ R. Ibrahim dan Nana Syaodih S, *Perencanaan Pengajaran*, (Jakarta: Rineka Cipta, 2003), hal. 21

harus dimiliki siswa agar dapat diperoleh suatu pemahaman yang baik dalam belajar matematika.

1. Pemahaman Konseptual Matematika

Seseorang dikatakan memahami sesuatu jika dapat mengorganisasikan dengan mengutarakan kembali apa yang dipelajarinya dengan menggunakan kalimat sendiri. Siswa tidak lagi mengingat dan menghafalkan informasi yang diperolehnya, melainkan harus dapat memilih dan mengorganisasikan informasi tersebut. Seperti pendapat dari Sanjaya bahwa pemahaman bukan hanya sekedar mengingat fakta, akan tetapi berkenaan dengan kemampuan menjelaskan, menerangkan, menafsirkan, atau kemampuan menangkap makna atau arti suatu konsep.¹¹

Sedangkan konsep merupakan buah pemikiran seseorang atau sekelompok orang yang dinyatakan dalam definisi sehingga melahirkan produk pengetahuan meliputi prinsip, hukum, dan teori. Pendapat tersebut sesuai dengan yang didefinisikan Carrol bahwa konsep sebagai Abstraksi dari serangkaian pengalaman yang didefinisikan sebagai suatu kelompok objek atau kejadian.¹² Dan dalam kamus matematika konsep adalah gambaran ide tentang suatu benda yang dilihat dari segi ciri- cirinya seperti kuantitas, sifat dan kualitas.¹³

Pemahaman terhadap suatu konsep dapat berkembang baik jika terlebih dahulu disajikan konsep yang paling umum sebagai jembatan antar informasi

¹¹ Wina Sanjaya, *Kurikulum dan Pembelajaran*, (Jakarta: Kencana, 2008), hal. 102

¹² Trianto, *Model-model Pembelajaran Inovatif Berorientasi Konstruktivistik*, (Jakarta: Prestasi Pustaka, 2007), hal. 158

¹³ Baharin Shamsudin, *Kamus Matematika Bergambar*, (Jakarta: Grasindo, 2002), hal. 72

yang telah ada pada struktur kognitif siswa. Penyajian konsep yang paling umum perlu dilakukan sebelum penjelasan yang lebih rumit mengenai konsep yang baru agar terdapat keterkaitan pada struktur kognitif siswa.

Pemahaman konsep matematika dapat terwujud dengan baik jika siswa dapat memusatkan perhatiannya terhadap bahan pelajaran yang dipelajari serta selalu melakukan penguatan melalui latihan yang teratur. Sehingga apa yang telah dipelajarinya akan dapat dikuasai dengan baik dan dapat digunakan untuk mempelajari materi selanjutnya.

Dalam pembelajaran matematika, pemahaman ditujukan terhadap konsep-konsep matematika sehingga lebih dikenal istilah pemahaman konsep matematika, pemahaman dalam pengertian pemahaman konsep matematika mempunyai beberapa tingkat kedalaman arti yang berbeda-beda. Berikut beberapa jenis pemahaman menurut beberapa ahli:

a. Skemp (1976) membedakan dua jenis pemahaman konsep, yaitu pemahaman intruksional, (*instructional understanding*) dan pemahaman relasional (*relational Understanding*).¹⁴ Adapun masing-masing jenis pemahaman mengandung pengertian sebagai berikut:

1. Pemahaman Instruksional (*Instructional Understanding*), yaitu pemahaman atas konsep yang saling terpisah dan hanya hafal rumus dalam perhitungan sederhana.

¹⁴ Muli, *Tingkat Pemahaman Siswa Terhadap Materi Pembelajaran IPA*, <http://muli30.wordpress.com>, diakses 08 April 2015

2. Pemahaman relasional (*relational understanding*), yaitu pemahaman yang termuat dalam suatu skema atau struktur yang dapat digunakan pada penyelesaian masalah yang lebih luas.
- b. Blom membedakan pemahaman kedalam tiga kategori, yaitu:¹⁵
1. Pemahaman terjemahan (*translasi*), mulai dari terjemahan dalam arti yang sebenarnya.
 2. Pemahaman penafsiran (*interpretasi*), yakni menghubungkan bagian-bagian terdahulu dengan yang diketahui berikutnya.
 3. Pemahaman ekstrapolasi (*Extrapolation*), dengan ekstrapolasi diharapkan seseorang mampu melihat di balik yang tertulis, dapat membuat ramalan dengan konsekuensi atau dapat memperluas persepsi dalam arti waktu, dimensi, kasus, ataupun masalahnya.

Berdasarkan uraian diatas, pemahaman konsep matematika yang dimaksud dalam penelitian ini yaitu kemampuan siswa menerjemahkan kalimat dalam soal dan menyelesaikan soal sesuai dengan konsep yang telah diajarkan.

2. Pemahaman Prosedural Matematika

Guru profesional berarti guru yang menguasai pemahaman tentang ilmu pengetahuan yang diajarkannya atau materi pelajaran. Persyaratan menguasai ilmu mutlak untuk semua guru, baik yang berpengalaman maupun yang belum berpengalaman. Tidak ada pemakluman bagi guru yang baru sekali pun dalam penguasaan pemahaman pengetahuan sekurang-kurangnya harus menguasai

¹⁵ Nana Sudjana, *Penilaian Hasil Proses Belajar Mengajar*, (Bandung: PT. Remaja Rosdakarya, 2005), hal. 24

sampai level mampu menjelaskan. Krathwoll menyatakan penguasaan pengetahuan meliputi penguasaan fakta, konsep, prosedur, dan metakognitif.¹⁶

Hiebert dan Lefevre (dalam White dan Mitchelmore, 1996) menggambarkan pengetahuan prosedural sebagai pengetahuan tentang prosedur baku yang dapat diaplikasikan jika beberapa isyarat tertentu disajikan. Suatu kata kunci untuk prosedur-prosedur yang seperti itu adalah kata "sesudah" dalam pengertian "sesudah langkah ini diikuti dengan langkah berikutnya".¹⁷ Dan dalam pendapat pendapat lain Hiebert & Lefevre (dalam Van De Walle, 1990) mengemukakan bahwa pengetahuan prosedural adalah pengetahuan tentang simbol untuk merepresentasikan ide matematika serta aturan dan prosedur yang digunakan untuk menyelesaikan tugas matematika. Jadi, di samping prosedur dalam menyelesaikan tugas matematika, pengetahuan prosedural juga meliputi simbol-simbol yang digunakan untuk merepresentasikan ide matematika.¹⁸

Dari pernyataan di atas dapat dikatakan bahwa pengetahuan prosedural merupakan pengetahuan tentang urutan kaidah-kaidah, prosedur-prosedur yang digunakan untuk menyelesaikan soal-soal matematika. Prosedur ini dilakukan secara bertahap dari pernyataan yang ada pada soal menuju pada tahap penyelesaiannya. Salah satu ciri pengetahuan prosedural adalah adanya urutan

¹⁶ Rahmat, *Pengetahuan Faktual, Kosnseptual, Prosedural dan Metakognitif*, <http://gurupembaharu.com/home/15494/> diakses tgl. 08 April 2015

¹⁷ Zainal Abidin MS, *Pemahaman Konseptual dan Prosedural*, <http://matunisma.blogspot.com/2012/05/pemahaman-konseptual-dan-prosedural.html> diakses tanggal 08 April 2015

¹⁸ Dwi Priyo Utomo, *Pengetahuan Konseptual dan Prosedural Matematika*, Makalah disampaikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Malang tanggal 30 Januari 2010

langkah yang akan ditempuh "sesudah suatu langkah akan diikuti langkah berikutnya".

Seseorang yang memiliki pengetahuan prosedural mungkin didukung atau mungkin juga tidak didukung oleh pengetahuan konseptual. Seseorang yang memiliki pengetahuan prosedural yang tidak didukung oleh pengetahuan konseptual digambarkan oleh Skemp (dalam White dan Mitchelmore, 1996) sebagai mengetahui aturan-aturannya tanpa mengetahui mengapa aturan-aturan itu bisa bekerja.¹⁹

3. Keterkaitan Pemahaman Konseptual dan Prosedural

Di dalam menyelesaikan masalah matematika diperlukan pengetahuan konseptual dan pengetahuan prosedural. Pengetahuan konseptual yang tidak didukung oleh pengetahuan prosedural akan mengakibatkan siswa mempunyai intuisi yang baik tentang suatu konsep tetapi tidak mampu menyelesaikan suatu masalah. Di lain pihak, pengetahuan prosedural yang tidak didukung oleh pengetahuan konseptual akan mengakibatkan siswa mahir memanipulasi simbol-simbol tetapi tidak memahami dan mengetahui makna dari simbol tersebut. Kondisi ini memungkinkan siswa dapat memberikan jawaban dari suatu soal (masalah) tanpa memahami apa yang mereka lakukan.

Keterkaitan antara kedua pengetahuan tersebut didukung oleh pendapat Hiebert dan Lefevre, yang menyatakan bahwa jika pengetahuan konseptual dan pengetahuan prosedural tidak saling terkait maka salah satu dari dua kemungkinan akan terjadi, yaitu siswa mempunyai pemahaman intuitif yang baik terhadap

¹⁹ Zainal Abidin Ms, *Pemahaman Konseptual*

matematika tetapi tidak dapat menyelesaikan masalah, atau siswa dapat memberikan jawaban tetapi tidak memahami apa yang mereka lakukan.²⁰

Dalam belajar matematika, untuk mendapatkan pemahaman yang mendalam diperlukan pengetahuan konseptual dan prosedural. Bila salah satu dari kedua pengetahuan tersebut tidak ada, maka pemahaman terhadap matematika tidak dapat secara mendalam. Memiliki pengetahuan konseptual, tetapi tidak memiliki pengetahuan prosedural yang diperlukan, maka akan mengakibatkan siswa mempunyai intuisi yang baik tentang suatu konsep tetapi tidak mampu menyelesaikan suatu masalah. Di lain pihak, memiliki pengetahuan prosedural, tetapi tidak memiliki pengetahuan konseptual yang mencukupi, maka akan mengakibatkan siswa mahir memanipulasi simbol-simbol tetapi tidak memahami dan mengetahui makna dari simbol tersebut. Kondisi ini memungkinkan siswa dapat memberikan jawaban dari suatu masalah tanpa memahami apa yang mereka lakukan. Jadi Pemahaman konseptual dan prosedural keduanya sangat diperlukan dan saling terkait satu sama lainnya.

C. GAYA BELAJAR

1. Pengertian Gaya Belajar

Setiap orang memiliki gaya belajar masing-masing yang unik dan khas. Sebagaimana tanda tangan. Tidak ada gaya belajar yang lebih baik atau lebih buruk dari pada yang lain. Mengenal gaya belajar yang paling cocok untuk diri sendiri sangat penting karena dengan begitu akan lebih mudah saat menyerap

²⁰ *Ibid,*,

suatu informasi.²¹ Dengan mengenali gaya belajar yang lebih dominan maka akan lebih cerdas dalam menentukan cara belajar yang lebih efektif dan ampuh bagi diri pribadi. Dengan demikian, akan dapat memanfaatkan kemampuan belajar dengan maksimal sehingga hasil belajar yang diperoleh pun menjadi maksimal.

Gaya Belajar merupakan cara seseorang merasa mudah, nyaman, dan aman saat belajar, baik dari sisi waktu maupun secara indra. Gaya belajar Menurut Dr. Rita dan Dr. Kenneth Dunn adalah cara manusia mulai berkonsentrasi, menyerap, memproses, dan menampung informasi yang baru dan sulit.²² Misalnya, belajar di malam hari lebih mudah dibanding siang hari karena keadaan lebih sunyi.²³ Oleh karena itulah gaya belajar masing-masing orang berbeda. Sebagian orang mungkin lebih dominan menggunakan gaya belajar tertentu dalam segala situasi, namun sebagian yang lain menggunakan gaya belajar tertentu dalam segala situasi, namun sebagian yang lain menggunakan cara berbeda untuk situasi yang berlainan. Bagaimanapun gaya belajar yang diterapkan, siswa harus dapat menyerap apa yang dipelajari secara optimal. Tidak ada gaya belajar yang lebih baik dibandingkan yang lain. Misalnya, jika siswa nyaman dengan belajar saat malam hari, pergunakan waktu di malam hari secara maksimal. Begitu pun jika sebagian siswa merasa mudah menyerap informasi dengan melalui pengalaman, cari dan lakukan apa yang harus siswa lakukan.

Penting sekali untuk mengenali tipe belajar siswa karena itu dapat menentukan keberhasilan kelak.²⁴ Apakah siswa tersebut termasuk tipe *the driver*

²¹ Nini Subini, *Rahasia Gaya Belajar Orang Besar*, (Jakarta: PT. Buku Kita, 2011), hlm. 12

²² *Ibid.* Hal 12.

²³ *Ibid.*, hal. 12.

²⁴ *Ibid.* Hal. 15.

yang cepat dalam bertindak namun tidak memikirkan proses, hanya mementingkan hasilnya. Siswa yang kurang sabar dalam menjalankan proses, tidak ingin membuang-buang waktu, tetapi mampu memotivasi orang lain dalam aktivitas peran, memecahkan masalah, dan sebagainya. Meskipun di lain sisi orang dengan tipe ini kurang kreatif dalam mencari alternatif lain. Atau siswa yang termasuk dalam tipe *the dreamer* yang senang berimajinasi dan menghayal, senang coba-coba (*trial and error*), menunda aspek praktis seperti menulis, tidak bisa diburu-buru waktu, serta senang mengkhayal diri untuk perencanaan jangka panjang. Biasanya tipe ini banyak ide kreatif, bisa *summarize* atau menemukan inti permasalahan walaupun dalam waktu lama, serta seorang *good listeners*. Namun, yang perlu diperhatikan adalah seni mengatur waktu (agar tidak mengkhayal terlalu lama) dan merancang prioritas.

Tipe lainnya adalah *the logician*. Tipe yang biasanya perfeksionis, minat pada banyak hal, dapat mengambil gambaran besar (berpikir makro), memiliki sedikit info pada berbagai hal, tertarik pada sesuatu secara detail meskipun kemudian melupakannya. Kelebihannya, tipe ini mampu berpikir kritis dan analitis, memiliki keterampilan mengorganisasikan sesuatu, bisa melakukan banyak hal dalam satu waktu. Selanjutnya adalah *the searchlight* yaitu orang yang senang melakukan sesuatu yang masuk akal, senang mengetahui alasan di balik sesuatu, melakukan pendekatan belajar yang teratur, menikmati masalah yang kompleks (berpikir mikro). Tipe ini memiliki motivasi dan minat yang tinggi pada banyak hal, memiliki pengetahuan yang luas, kreatif dan orisinal, namun kekurangan dari tipe ini biasanya agak kesulitan dalam menetapkan tujuan. Selain

itu, analisisnya juga kurang akurat, akan tetapi, karena senang bereksplorasi maka siswa sering kali melupakan masalah inti yang sedang dihadapi. Oleh karena itu penting sekali untuk mengenali seperti apa tipe belajar siswa. Setelah itu, tinggal menentukan langkah apa yang harus siswa lakukan demi mewujudkan impian yang terbersit dalam benak siswa.

2. Manfaat Gaya Belajar

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya gaya belajar adalah gaya yang dipilih seseorang untuk mendapatkan informasi atau pengetahuan dalam suatu proses pembelajaran. Begitu juga halnya dengan seorang siswa, ia akan lebih mudah belajar dan menemukan cara belajarnya jika siswa tersebut mengetahui gaya belajar yang benar dalam cara belajarnya karena setiap individu mempunyai gaya belajar yang berbeda-beda. Misalnya seorang siswa dapat belajar paling baik dengan menggunakan cahaya terang, sedang sebagian yang lain ada siswa yang belajar yang paling baik dengan pencahayaan yang suram. Ada siswa yang paling baik secara kelompok, sedang yang lain lagi merasa bahwa bekerja sendirilah yang paling efektif bagi mereka. Sebagian orang memerlukan musik sebagai latar belakang, sedang yang lain tidak dapat berkonsentrasi kecuali dalam ruangan yang sepi. Ada orang-orang yang memerlukan lingkungan kerja yang teratur dan rapi, tetapi yang lain suka menggelar segala sesuatunya supaya semua dapat terlihat. Dalam kenyataannya, kita semua memiliki ketiga gaya belajar itu hanya saja biasanya satu gaya yang mendominasi.²⁵

²⁵ Bobbi Deporter dan Hernacki, *Quantum Learning Membiasakan Belajar Nyaman dan*

3. Macam-macam Gaya Belajar

Setiap orang adalah individu yang unik, masing-masing akan melihat dunia dengan caranya sendiri. Meskipun kita melihat satu kejadian pada waktu yang bersamaan, tidak menjamin kita akan sama dalam melaporkan apa yang kita lihat. Hal ini karena setiap orang memiliki cara berpikir dan memahami sesuatu yang berbeda-beda. Setiap individu mempunyai gaya belajar yang berbeda. Ada yang lebih cepat belajar dengan membaca, mengamati, bereksperimen, *trial and error* (coba-coba gagal), pengalaman, dan sebagainya. Menurut Bobby DePotter, ada dua hal yang perlu diperhatikan dalam gaya belajar. Pertama adalah cara seseorang menyerap informasi dengan mudah atau sering disebut sebagai modalitas. Kedua adalah cara orang mengolah dan mengatur informasi tersebut.²⁶ Modalitas belajar adalah cara menyerap informasi melalui indra yang kita miliki. Masing-masing orang mempunyai kecenderungan berbeda-beda dalam menyerap informasi. Modalitas dalam belajar dibagi dalam tiga kelompok sebagai berikut.

1. Belajar dengan melihat (*visual learning*)
2. Belajar dengan mendengar (*auditory learning*)
3. Belajar dengan melakukan (*kinesthetic learning*)

a. *Visual Learning* (Gaya Belajar Visual)

Visual learning adalah gaya belajar dengan cara melihat sehingga mata memegang peranan penting. Gaya belajar secara visual dilakukan seseorang untuk memperoleh informasi seperti melihat gambar, diagram, peta, poster, grafik, dan sebagainya. Bisa juga melihat data teks seperti tulisan dan huruf. Orang dengan

Menyenangkan, terj., Alwiyah Abdul Rahman (Bandung, Kaifa, 2003), hal. 165.

²⁶ Nini Subini, *Rahasia Gaya . . .*, (Jakarta: PT. Buku Kita, 2011), hlm. 17.

gaya belajar visual memiliki kebutuhan yang tinggi untuk melihat dan menangkap informasi secara visual sebelum mereka memahaminya. Mereka lebih mudah menangkap pelajaran lewat materi bergambar. Selain itu, mereka memiliki kepekaan yang kuat terhadap warna dan pemahaman yang cukup terhadap artistik. Dalam hal ini teknik visualisasi melatih otak untuk bisa memvisualisasikan sesuatu hal, mulai dari mendeskripsikan suatu pemandangan, benda (baik benda nyata maupun imajinasi) hingga akhirnya mendapatkan yang diinginkan.

Karakteristik seseorang yang menggunakan *visual learning*:

- Materi pembelajaran harus yang dapat dilihat
- Memiliki kepekaan kuat terhadap warna sehingga tertarik pada seni lukis, pahat, dan gambar lebih dari pada musik
- Saat proses KBM (Kegiatan Belajar Mengajar), ia akan berusaha duduk di depan kelas
- Harus melihat bahasa tubuh dan ekspresi muka gurunya untuk mengerti materi pelajaran
- Suka mencoret-coret sesuatu yang terkadang tanpa ada artinya saat di dalam kelas
- Pembaca cepat dan tekun
- Bila berbicara agak cepat dan melirik ke atas
- Lebih suka membaca daripada dibacakan
- Selalu memvisualisasi sesuatu untuk mengingat yang sudah dilihat

- Akan lebih mudah memahami materi pembelajaran yang dikemas menarik menggunakan ilustrasi seperti gambar, diagram, peta warna-warni dan sebagainya
- Lebih mudah mengingat dengan melihat
- Mudah menghafal tempat dan lokasi
- Senantiasa memperhatikan gerak bibir seseorang yang berbicara kepadanya
- Cenderung menggunakan gerakan tubuh saat mengungkapkan sesuatu
- Dapat duduk tenang di tengah situasi yang ramai tanpa merasa terganggu
- Lebih menyukai peragaan daripada penjelasan lisan
- Mementingkan penampilan dalam hal pakaian ataupun penampilan keseluruhan
- Di dalam kelas, lebih suka mencatat sampai sedetail-detailnya untuk mendapatkan informasi
- Mempunyai masalah untuk mengingat instruksi verbal kecuali jika ditulis dan sering kali minta bantuan orang untuk mengulanginya

Kendala tipe belajar model visual:

- Tidak suka berbicara di depan kelompok
- Tidak suka mendengarkan orang lain berbicara
- Tahu apa yang harus dikatakan, tetapi tidak bisa mengungkapkannya dengan kata-kata
- Ditandai dengan sering terlambat menyalin pelajaran di papan tulis
- Tulisan tangannya berantakan
- Sering lupa jika harus menyampaikan pesan secara verbal kepada orang lain

- Biasanya kurang mampu mengingat informasi yang diberikan secara lisan
- Mempunyai kendala untuk berdialog secara langsung karena terlalu reaktif terhadap suara sehingga sulit mengikuti anjuran secara lisan dan sering salah menginterpretasikan kata atau ucapan.

Proses visual dapat dilakukan secara internal dan eksternal. Seseorang pembelajar visual barangkali memilih untuk melihat segala sesuatu secara internal dalam benaknya sebelum menggambarkan atau mendiskusikan dengan orang lain, pendekatan ini seperti mimpi bagi orang lain. Seorang visual yang lebih eksternal suka melihat segala sesuatu, petunjuk, komputer, buku, seni, dan anda, jika anda bercakap-cakap dengan mereka.

b. *Auditory Learning* (Gaya Belajar Auditori)

Gaya belajar auditori yaitu gaya belajar yang dilakukan seseorang untuk memperoleh informasi dengan memanfaatkan indra telinga. Oleh karena itu, mereka sangat mengandalkan telinganya untuk mencapai kesuksesan belajar. Misalnya, dengan cara mendengarkan ceramah, radio, berdialog, berdiskusi. Selain itu, mendengarkan melalui nada (nyanyian).

Karakteristik seseorang dengan gaya belajar auditori:

- Ia akan mencari posisi duduk tempat dia dapat mendengar meskipun tidak dapat melihat terjadi di depannya. Seseorang dengan gaya belajar seperti ini hanya perlu mendengar dengan jelas
- Ketika merasa bosan biasanya berbicara dengan diri sendiri atau teman di sampingnya atau bisa juga dengan menyanyikan sebuah lagu
- Materi pembelajaran yang dipelajari akan mudah dipahami jika dibaca nyaring

- Untuk mengingat materi pembelajarannya mereka akan melakukan cara verbalisasi kepada diri sendiri
 - Lebih cepat menyerap dengan mendengarkan
 - Mudah ingat dari apa yang didengar atau dibicarakan dengan teman-teman atau lingkungannya
 - Dapat mengingat dengan baik materi saat diskusi
 - Senang dibacakan atau mendengar cerita dibanding membaca cerita sendiri
 - Suka menuliskan sesuatu kembali
 - Menggerakkan bibir mereka dan mengucapkan tulisan di buku ketika membaca
 - Senang membaca dengan suara keras
 - Dapat menghafal lebih cepat dengan membaca teks dengan keras dan mendengarkan kaset
 - Pandai berbicara dan bercerita
 - Bisa mengulangi apa yang didengarnya, baik nada atau irama, sehingga bisa mengenal banyak lagu atau iklan di TV
 - Lebih suka humor lisan dibandingkan tulisan (komik)
 - Senang diskusi, bicara, bertanya, atau menjelaskan sesuatu dengan panjang
 - Mudah mempelajari bahasa asing
 - Tidak bisa diam dalam waktu lama
 - Suka mengerjakan tugas kelompok
- Kendala tipe belajar model auditori:
- Cenderung banyak omong
 - Tidak bisa belajar dalam suasana berisik atau ribut

- Lebih memperhatikan informasi yang didengarnya sehingga kurang tertarik untuk memperhatikan hal baru disekitarnya
- Kurang dapat mengingat dengan baik apa yang baru saja dibacanya
- Kurang baik dalam mengerjakan tugas mengarang/menulis
- Pada umumnya bukanlah pembaca yang baik

Seseorang pembelajar dengan kecenderungan auditoris dapat memfokuskan diri secara internal maupun eksternal. Sosok auditoris eksternal suka berbicara dan barangkali akan berbicara pada diri mereka sendiri ketika tengah belajar. Sangat jarang ditemukan sosok auditoris jenis ini yang bisa menjadi fasilitator pelatihan. Sementara itu, para pembelajar dengan kecenderungan auditoris internal akan berkata pada dirinya sendiri di dalam kepalanya, namun jika dilihat dari luar satu-satunya kebiasaan yang terlihat adalah kesunyian.

c. *Kinesthetic Learning* (Gaya Belajar Kinestetik)

Gaya belajar kinestetik merupakan cara belajar yang dilakukan seseorang untuk memperoleh informasi dengan melakukan pengalaman, gerakan, dan sentuhan. Selain itu, belajar kinestetik berhubungan dengan praktik atau pengalaman belajar secara langsung.

Karakteristik seseorang dengan gaya belajar kinestetik

- Ketika menyampaikan pendapat biasanya disertai dengan gerakan tangan atau bahasa tubuh yang melibatkan anggota tubuh lain seperti wajah, mata, dan sebagainya
- Mudah memahami materi pembelajaran yang sudah dilakukan, tetapi akan sulit untuk mengingat materi yang sudah dikatakan atau dilihat

- Ketikan merasa bosan akan pergi atau berpindah tempat
- Menyenangi materi pembelajaran yang bersifat merekayasa suatu bahan
- Gemar menyentuh sesuatu yang dijumpainya
- Suka mengerjakan sesuatu yang memungkinkan tangannya sangat aktif
- Suka menggunakan objek nyata sebagai alat bantu belajar
- Banyak melakukan gerakan fisik
- Ketika membaca, ia menunjuk kata-kata dalam bacaan dengan jari tangannya
- Lebih suka mendemonstrasikan sesuatu dengan peragaan atau gerakan daripada menjelaskan
- Dalam suatu forum memilih duduk di tempat yang memudahkannya untuk bangun dan bergerak ke banyak tempat
- Biasanya memiliki koordinasi tubuh yang baik
- Suka menyentuh segala sesuatu yang dijumpainya
- Suka mengerjakan sesuatu menggunakan tangan
- Suka menggunakan objek yang nyata sebagai alat bantu belajar
- Mampu mengoordinasi sebuah tim di samping kemampuan mengendalikan gerak tubuh (*athletic ability*)
- Lebih mudah menyerap dan memahami informasi dengan cara menjiplak gambar atau kata untuk kemudian belajar mengucapkan atau memahami fakta
- Berbicara dengan perlahan (lambat)
- Suka menggunakan berbagai peralatan dan media
- Berdiri dekat ketika berbicara dengan orang
- Mempunyai perkembangan awal otot-otot yang besar

- Belajar melalui praktik
- Menghafal dengan cara berjalan dan melihat
- Menggunakan jari sebagai penunjuk ketika membaca
- Banyak menggunakan isyarat tubuh
- Tidak dapat duduk diam untuk waktu lama
- Menyukai buku-buku yang berorientasi pada cerita
- Kemungkinan tulisannya jelek
- Ingin melakukan segala sesuatu
- Menyukai permainan dan olahraga

Kendala gaya belajar kinestetik:

- Mengalami kesulitan duduk lama di depan komputer
- Tidak betah membaca atau mendiskusikan topik-topik di dalam ruang kelas
- Sulit untuk berdiam diri
- Sulit mempelajari hal yang abstrak seperti simbol matematika atau peta
- Tidak bisa belajar di sekolah konvensional tempat guru menjelaskan dan anak diam
- Kapasitas energinya cukup tinggi sehingga bila tidak disalurkan akan berpengaruh terhadap konsentrasi belajarnya

Oleh karena itu, hendaknya kita tidak memaksakan cara belajar pada orang lain. Biarkan mereka mencari tahu informasi dengan gaya mereka sendiri karena dengan begitu akan lebih mudah mencapai apa yang diinginkan.

D. LIMIT FUNGSI

Gagasan tentang *limit* inilah yang membedakan kalkulus dari cabang matematika lainnya, karena kalkulus dapat didefinisikan sebagai pengkajian tentang limit.²⁷

Pemahaman Intuitif. Tinjaulah fungsi yang ditentukan oleh:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Perhatikan bahwa fungsi tersebut tidak terdefinisi pada $x = 1$, karena di titik ini $f(x)$ berbentuk $\frac{0}{0}$, yang tidak ada artinya, tetapi kita masih dapat menanyakan apa yang terjadi pada $f(x)$ bilamana x mendekati 1? Untuk sampai pada jawaban dari pertanyaan tersebut, kita dapat melakukan tiga hal. Kita dapat menghitung beberapa nilai $f(x)$ untuk x mendekati 1, kita dapat menunjukkan nilai-nilai ini dalam suatu diagram skematis, dan kita dapat membuat sketsa grafik $y = f(x)$.

Semua informasi yang telah disusun tersebut terlihat akan menuju pada kesimpulan yang sama yaitu $f(x)$ mendekati 3 saat x mendekati 1. Dalam lambang matematis dituliskan: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$. Ini dibaca “limit $(x^3 - 1)/(x - 1)$ untuk x mendekati 1 adalah 3”

1. Pengertian Limit Fungsi di Suatu Titik dan Tak Hingga

Secara intuitif limit dapat didefinisikan sebagai berikut:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, artinya bilamana x dekat tetapi berlainan dari a ($x \neq a$), maka $f(x)$ dekat dengan L ²⁸.

²⁷ Purcell et. al, *calculus 8th Edition*, (Prentice Hall, Inc. 2003), terj. I Nyoman Susila (Jakarta: Erlangga, 2003), hal. 64

²⁸ *Ibid.*, hal. 64

Dari definisi tersebut dapat dipahami bahwa tidak ada yang mensyaratkan bahwa x harus tepat di a . Pemikiran tentang limit dihubungkan dengan perilaku suatu fungsi dekat a , bukannya di a .

a. Sifat-sifat Limit Fungsi (Teorema Limit Fungsi)

Apabila k suatu konstanta, f dan g merupakan fungsi-fungsi yang mempunyai limit untuk $x \rightarrow a$, $a \in \mathbb{R}$ maka berlaku:

- a. $\lim_{x \rightarrow a} k = k$
- b. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- c. $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- d. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- e. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- f. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, untuk $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
- g. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$

Untuk lebih memahami tentang sifat-sifat limit fungsi, pelajailah contoh soal berikut ini. Dalam contoh ini, mengacu pada pernyataan-pernyataan beberapa sifat/teorema limit yang telah diberikan di atas

Contoh soal: carilah $\lim_{x \rightarrow 3} 2x^4$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} 2x^4 &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x^4 && \text{(menggunakan sifat yang c)} \\ &= 2 \cdot [\lim_{x \rightarrow 3} x]^4 && \text{(menggunakan sifat yang g)} \\ &= 2[3]^4 && \text{(menggunakan sifat yang b)} \end{aligned}$$

$$= 162$$

b. Limit Fungsi di Tak Hingga

Diketahui $f(x) = \frac{2}{x}$. Jika dibuat tabel untuk x sebagai berikut:

| | | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---------------|---------------|-----|---------------|-----|----------------|-----|------------------|-----|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | 10 | ... | 100 | ... | 200 | ... |
| $f(x)$ | 2 | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | ... | $\frac{1}{5}$ | ... | $\frac{1}{50}$ | ... | $\frac{1}{1000}$ | ... |

Apabila nilai x makin besar, ternyata nilai $f(x)$ makin lama makin kecil.

Apabila x besar sekali atau x mendekati tak berhingga, ditulis $x \rightarrow \infty$, maka nilai

$\frac{2}{x}$ akan mendekati nol, dikatakan limit dari $\frac{2}{x}$ untuk mendekati tak berhingga adalah

nol dan ditulis:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

Sekarang perhatikan contoh berikut

hitunglah $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1}$

untuk menjawab limit tersebut, dapat dicoba dengan tabel berikut ini:

| | | | | | | | | | | |
|------------------|---|---------------|---------------|-----|-----------------|-----|-------------------|-----|---------------------|-----|
| X | 1 | 2 | 3 | ... | 10 | ... | 100 | ... | 1000 | ... |
| $\frac{2x}{x+1}$ | 1 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | ... | $\frac{20}{11}$ | ... | $\frac{200}{101}$ | ... | $\frac{2000}{1001}$ | ... |

Apabila x menjadi semakin besar, maka nilai $\frac{2x}{x+1}$ akan mendekati 2.

$$\text{Dikatakan bahwa } L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

Limit fungsi yang berbentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dapat diselesaikan dengan cara membagi

bagian pembilang $f(x)$ dan bagian penyebut $g(x)$ dengan x^n , n adalah pangkat

tertinggi dari $f(x)$ atau $g(x)$ untuk setiap n bilangan positif dan a untuk bilangan real, maka:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

Dari contoh itu dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x+1}{x}} && \text{(pembilang, penyebut dibagi } x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}} && \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \right) \\ &= \frac{2}{1+0} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

Cara mudah menafsirkan nilai limit fungsi dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ adalah sebagai berikut:

1. Jika derajat dari pembilang $f(x)$ lebih besar daripada derajat penyebut $g(x)$,

$$\text{maka nilai } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

2. Jika derajat dari pembilang $f(x)$ sama dengan derajat penyebut $g(x)$, maka

$$\text{nilai } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{real}$$

3. Jika derajat dari pembilang $f(x)$ lebih kecil daripada derajat penyebut $g(x)$,

$$\text{maka nilai } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

2. Sifat Limit Fungsi untuk Menghitung Bentuk Tak Tentu Fungsi Aljabar dan Trigonometri

a. Menghitung Limit Fungsi Aljabar

1. Limit Fungsi $f(x)$ untuk mendekati a

Langkah yang digunakan untuk menyelesaikan $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ adalah:

- Menentukan nilai limit $f(x)$ dengan mensubstitusikan nilai $x = a$ pada $f(x)$.

Dengan demikian diperoleh:

- Jika $f(a) = C$, maka nilai $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = C$
 - Jika $f(a) = \frac{C}{0}$, maka nilai $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{C}{0} = \infty$
 - Jika $f(a) = \frac{0}{C}$, maka nilai $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{0}{C} = 0$
 - Jika $f(a) = \frac{0}{0}$, maka harus mengubah bentuk $f(x)$ hingga menjadi bentuk (a), (b), atau (c) dengan jalan menggunakan metode lain yaitu langkah ke 2 dibawah ini
2. Faktorkan bentuk $f(x)$ sehingga $f(a) \neq \frac{0}{0}$, kemudian disubstitusikan lagi, jika tidak bisa diteruskan ke langkah yang ke 3
 3. Bentuk $f(x)$ dikalikan dengan sekawan pembilang dan penyebut sehingga $f(a) \neq \frac{0}{0}$, kemudian disubstitusikan lagi.

Contoh soal: Carilah nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x}$!

Penyelesaian:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x} = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{0^2 - 0} = \frac{1 - \sqrt{1}}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Jadi harus diubah dulu dengan jalan dikalikan sekawannya

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x} &= \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x} \cdot \frac{1 + \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x+1)}{(x^2 - x)(1 + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x(x-1)(1 + \sqrt{x+1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(x-1)(1+\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x-1)(1+\sqrt{x+1})} \\
&= \frac{-1}{(0-1)(1+\sqrt{0+1})} \\
&= \frac{-1}{(-1)(1+1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. Limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati ∞

Jika bentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ diselesaikan dengan substitusi langsung menghasilkan $\frac{\infty}{\infty}$, maka menggunakan langkah-langkah:

- 1) Cari peubah x dari $f(x)$ dan $g(x)$ yang memiliki pangkat tertinggi
- 2) Bagi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan peubah pangkat tertinggi tersebut
- 3) Dengan menggunakan sifat bahwa $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0$ untuk setiap n bilangan positif dan a untuk bilangan real, sehingga limit fungsi yang berbentuk $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dapat diselesaikan.

3. Teorema L'Hopital

Limit bentuk tak tentu dapat diselesaikan dengan aturan L'Hopital. Apabila $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai turunan di $x = a$ dan $f(x) = g(x) = 0$ sedangkan $f'(x) = g'(x)$ tidak sama dengan 0, maka:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Apabila setelah menggunakan aturan L'Hopital ternyata masih dijumpai bentuk $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ dan $\infty - \infty$ lanjutkan lagi pengerjaan dengan menggunakan aturan L'Hopital sampai tidak menemui bentuk $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ dan $\infty - \infty$

b. Menghitung Limit Fungsi Trigonometri

Rumus-rumus limit fungsi trigonometri

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

Untuk lebih memahami tentang limit fungsi trigonometri, perhatikan contoh soal berikut.

Contoh soal: tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \cot x$!

Penyelesaian: $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\tan x} (\tan x \cdot \cot x = 1)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{x}{\tan x}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 2 \cdot 1 = 2$$