Muniri

Kalimedia

STRUKTUR Aljabar

STRUKTUR Aljabar

Muniri

Kalimedia

STRUKTUR ALJABAR

Penulis:
Muniri

Desain Sampul dan Tata letak:
M. Alfian Taufiq El Kamali

ISBN: 978-602-6827-05-0

Penerbit:
KALIMEDIA
Perum POLRI Gowok Blok D 3 No. 200
Depok Sleman Yogyakarta
e-Mail: kalimediaok@yahoo.com
Telp. 082 220 149 510

Distributor oleh:
KALIMEDIA
Telp. 0274 486 598
E-mail: marketingkalimedia@yahoo.com

Cetakan, 1 2016

Dipersembahkan

Kepada yang Mulia kedua Orang tuaku & para guruku,
Istri & anak-anakku tersayang

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas berkat rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulisan Buku "Struktur Aljabar" dapat terselesaikan.

Buku ini dimaksudkan untuk memenuhi kebutuhan mahasiswa yang sedang mempelajari dan memperdalam matakuliah Aljabar Abstrak atau Struktur Aljabar, mengingat buku-buku tersebut merupakan salah satu cabang dari matematika formal yang hingga saat ini peredarannya dirasakan masih sedikit atau langka, walaupun ada banyak menggunakan bahasa asing (bahasa Inggris dan Belanda).

Sajian materi dalam buku ini telah disesuaikan dengan berpedoman pada silabus matakuliah Struktur Aljabar atau Aljabar Abstrak, yang penyajiannya dibagi menjadi dua bagian yaitu; bagian I membahas materi tentang himpunan, sifat-sifat himpunan bilangan, keterbagian, fungsi dan operasi, Grup dan sifat-sifatnya, Grup Permutasi, Order dari unsur grup, Subgrup, subgrup siklik, Teorema Lagrange, Grup hasil kali langsung, dan Homorfisma Grup. Sedangkan bagian II membahas materi tentang Subgrup Normal dan Grup Faktor, Ring (gelanggang), Integral Domain (daerah integral), dan Field (lapangan), Subring dan Ring Ideal, Ring Faktor, Homomorfisma Ring, dan Ideal Prima.

Demi kemudahan dalam mempelajari buku ini, seyogyanya pembaca memahami secara baik bab demi bab secara berurutan, karena secara substantif pokok bahasan bab sebelumnya merupakan prasyarat bagi pokok bahasan bab selanjutnya. Setiap pokok bahasan setiap bab dalam buku ini berupa konsep aljabar yang abstrak dituangkan dalam bentuk definisi, aksioma dan teorema disertai dengan berbagai contoh (teladan) yang memadai serta dilengkapi dengan latihan-latihan.

Penulis telah berupaya secara maksimal untuk menyajikan isi buku ini sebaik-baiknya. Namun pepatah mengatakan "tiada gading yang tidak retak". Menyadari akan hal itu, penulis dengan senang hati akan menerima saran dan kritik demi kesempurnaan buku ini. Semoga buku ini ada guna dan manfaatnya.

Tulungagung, Agustus, 2016

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

Sebelum menelaah konsep-konsep matematika abstrak yang disajikan dalam buku ini, pembaca sebaiknya mengenal/mengingat kembali konsep-konsep fundamental objek kajian himpunan termasuk himpunan-himpunan bilangan yang diekpresikan secara aljabar maupun secara gemetri.

Pemahaman serta penguasaan terhadap konsep-konsep dasar tersebut, seperti konsep himpunan, fungsi, matrik-matrik, vektor, fungsi trigonometri seperti fungsi *sinus*, *cosinus* dan *tangen* beserta operasi-operasinya yang sering digunakan atau operasi khusus yang didefinisikan secara khusus akan memberikan kemudahan dalam memahami dan menguasai konsep-konsep dalam buku ini yang penyajiannya secara abstrak, biasanya dikenal dengan matematika formal.

Buku ini menelaah berbagai konsep-konsep aljabar yang sangat luas dan diekpresikan atau direpresentasikan melalui simbol-simbol yang lazim atau simbol yang sama sekali baru bagi pembaca pemula, mulai dari definisi, aksioma hingga teorema-teorema yang menuntut pembaca untuk membuktikan secara formal.

Untuk mengawali mempelajari konsep-konsep abstrak tersebut, kita mengingatkan kembali objek-objek matematika yang dituangkan kedalam bentuk konsep himpunan beserta operasi, relasi dan fungsi.

A. HIMPUNAN

Terkadang dalam realita kehidupan kita dihadapkan pada banyak data, benda-benda, ataupun objek-objek yang perlu kita olah, identifikasi, digolongkan, dan lain sebagainya. Untuk memudahkan pengolahan, biasanya benda-benda atau objek-objek tersebut kita golongkan berdasarkan kreteria, sifat-sifat, bentuk, ciri-ciri, dan seterusnya. Hasil penggolongan diatas akan diperoleh kumpulan dari sejumlah objek atau yang sering kita sebut sebagai himpunan.

Definisi 1.1	Himpunan adalah kumpulan objek yang dapat dicirikan secara jelas.
	Objek tersebut disebut anggota atau elemen suatu himpunan.
	Penulisan himpunan biasanya dengan simbol '{ }'

Himpunan dinotasikan dengan huruf Kapital seperti A, B, C, dan seterusnya. Sedangkan elemen atau anggota dari suatu himpunan dilambangkan dengan huruf kecil, seperti a, b, c, dan seterusnya. Misalnya diberikan himpunan S dan a elemen S secara simolik ditulis $\boldsymbol{a \in S}$. sedangkan jika a bukan elemen dari S ditulis $\boldsymbol{a \notin S}$. berikut ini diberikan beberapa contoh sederhana.

Teladan 1.1

N : Himpunan Bilangan Natural (bilangan asli) = {1, 2, 3, ...}

Z : Himpunan bilangan Bulat = {...., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3......}

Berdasarkan teladan di atas, berarti $2 \in N$,dan $0 \notin N$. Begitu pula $2 \in Z$ sedangkan $\frac{1}{2} \notin Z$.

Terkadang representasi lebih abstrak dari suatu himpunan dapat dinyatakan sebagai $A = \{a \in S | P(a)\}$, biasanya dibaca A adalah himpunan yang keanggotaannya semua elemen S yang memenuhi P(a).[1]

---

[1] Herstein, I.N, *Topics In Algebra. Second Edition,* John willey & Sons, Inc. 1965, hal. 9.

Teladan 1.2

jika A adalah himpunan bilangan bulat positif ditulis Z^+ atau dinyatakan $A = \{a \in Z | a > 0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Teladan 1.3

$M = \{(i) \in N | i = 3n + 2,\ n = 0, 1, 2, 3, 4\}$. Maka M= $\{2, 5, 7, 11, 13\}$.

Definisi: 1.2 HimpunanKosong	Himpunan kosong (*empty set, null set*) adalah himpunan yang tidak memiliki elemen/anggota.[2]
	Secara simbolik dari himpunan kosong ditulis $\{\ \ \}$atau $\emptyset$.

Teladan 1.4

Pada himpunan semesta bilangan bulat. Himpunan K adalah himpunan bilangan ganjil yang habis di bagi 2. Maka $K = \{\ \ \}$atau $K = \emptyset$.

Teladan 1.5

E = $\{n \in Z : 2 < n < 3\}$, maka E = $\emptyset$, sebab tidak ada bilangan bulat antara 2 dan 3.

F = $\{x \in N : x^2 < 0\}$, maka F = $\emptyset$, sebab tidak ada hasil kuadrat bilangan asli yang negatif.

Definisi: 1.3 Himpunan bagian	Jika terdapat himpunan A dan B, A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B, apabila setiap elemen A terdapat pula di B, ditulis $A \subseteq B$ atau $B \supseteq A$.[3]
	Secara simbolik ditulis $A \subseteq B = \{x | x \in A$, maka $x \in B\}$

[2] *Ibid*, hal. 10.

[3] William D Blair & J A Beachy, *Abstract Algebra with a Concrete Intuduction,* Prentice Hall do Brasil. 1990, hal. 35.

Himpunan A adalah *propersubset* dari B (dinotasikan $A \subset B$), apabila $A \subseteq B$ dan $A \neq B$.

Teladan 1.6

Pada teladan 1.2 dan teladan 1.3 diperoleh bahwa $M \subseteq A$ atau $A \supseteq M$.

Begitu pula $N \subset Z$ atau $Z \supset N$ (teladan 1.1)

Teladan 1.7

Untuk sembarang himpunan A berlaku $A \subseteq A$ atau $A \supseteq A$.

Definisi 1.4 Himpunan sama	Dua himpunan A dan B adalah identik atau sama (equal) jika dan hanya jika elemen dari kedua himpunan tersebut adalah sama.[4]
	Kesamaan himpunan A dan B dinotasikan dengan A = B atau dengan kata lain $A = B$ jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Teladan 1.8

$\{1,2,3\} = \{3,1,2\} = \{2,2,1,3\} = \{1,2,1,3,2,1\}$.

Meskipun demikian penulisan elemen sama pada suatu himpunan secara berulang tidak ada manfaatnya.

Definisi 1.5 Himpunan Kuasa	Himpunan Kuasa (*power Set*) dari A adalah himpunan dari seluruh *subset*A.[5]
	Dinotasikan dengan $P(A)$.

Teladan 1.9

Misalkan $A = \{0,1\}$ maka $P(A) = \{ \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

Selain memperhatikan apa yang menjadi elemen suatu himpunan, kita pun perlu mengetahui berapa banyak elemen dari

---

[4] *Ibid.*, hal. 36.

[5] *Ibid.*

suatu himpunan, yang juga merupakan ukuran besar dari suatu himpunan.

Definisi 1.6 Kardinalitas[6]	Jika S memiliki n buah elemen yang berbeda, maka S adalah himpunan berhingga (*finiteset*), dan n adalah Kardinalitas (*cardinality*) dari S.
	Kardinalitas dari S dinotasikan dengan $\mid S \mid$.

Teladan 1.10

Hitung kardinalitas dari A = {0,1,2,1,2,3,3,4,2}.

Solusi:

Pada A jumlah elemen yang berbeda adalah sebanyak 5, yaitu 0, 1, 2, 3, dan 4. oleh karenanya $\mid A \mid = 5$.

Teladan 1.11

Jika $B = \{0, 1,2\}$, tentukan kardinalitas $P(A)$!.

Solusi:

$P(A) = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$. Jadi $\mid P(A) \mid = 8 = 2^3$

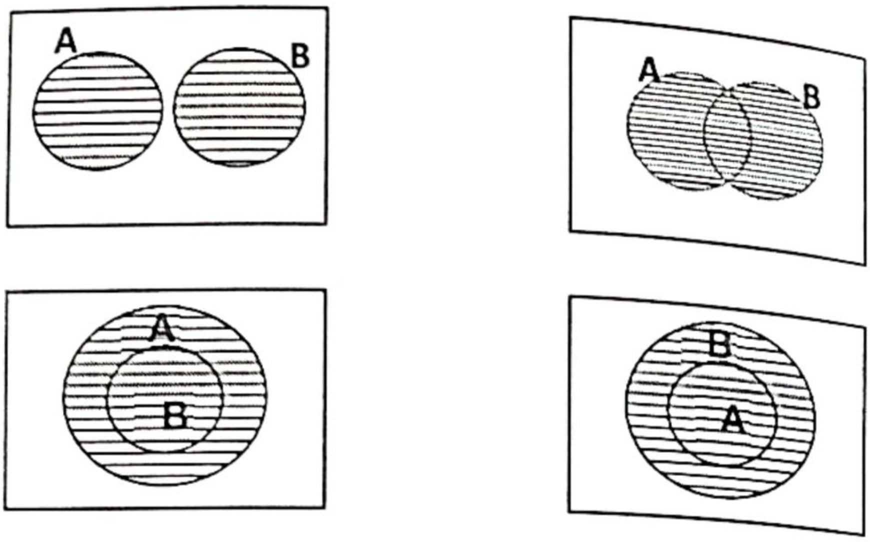
Atau $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Definisi 1.7 Gabungan himpunan (*Union Set*)	Gabungan (*Union*) dari A dan B dinotasikan dengan $A \cup B$ yaitu himpunan yang beranggotakan elemen-elemen A atau elemen-elemen B.[7]
	Secara simbolik ditulis $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$.

[6] Gatot Muhsetyo, *Pengantar Struktur Aljabar*. 1989, IKIP Malang, hal. 19.

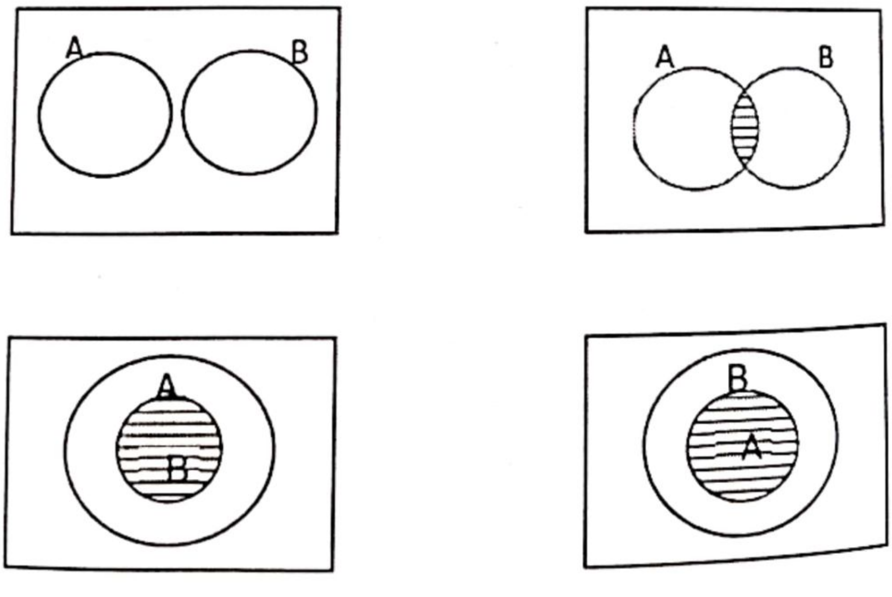
[7] William D Blair & J A Beachy, *Abstract Algebra with a Concrete Intuduction,* Prentice Hall do Brasil. 1990, hal. 37.

Sedangkan ekpresi lain dalam diagram venn dinyatakan sebagai berikut.



Definisi1.8 Irisan (*Intersection*)	Irisan (*intersection*) dari A dan B dinotasikan $A \cap B$ adalah himpunan yang keanggotaannya terdiri atas elemen-elemen A dan elemen-elemen B.[8]
	Secara simbolik $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$

Sedangkan ekpresi lain dinyatakan dalam diagram venn berikut.



[8] William D Blair & J A Beachy, *Abstract Algebra with a Concrete Intuduction*, Prentice Hall do Brasil. 1990, hal. 37.

Teladan 1.12

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{4, 5, 6\}$, maka $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan $A \cap B = \{4\}$.

Sedangkan dua himpunan yang tidak beririsan jika pada kedua himpunan tersebut tidak terdapat elemen yang sama. Dua himpunan yang tidak beririsan dikatakan dua himpunan saling asing atau *disjoint*.

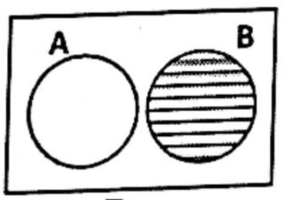
Definisi 1.9 Saling lepas (*Disjoint*)	Dua himpunan A dan B tidak beririsan atau saling asing atau saling lepas (*disjoint*).[9]
	Secara simbolik dinotasikan dengan $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$.

Teladan 1.13

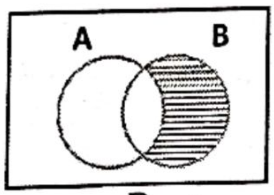
Misalkan A = { 1, 3, 5, 7 } dan B = { 2, 4, 6, 8} maka $A \cap B = \emptyset$.

Definisi1.10 Komplemen Relatif	Komplemen relatif (*relativecomplement*) A terhadap B dinotasikan A/B atau $A - B$ adalah himpunan yang dibentuk oleh elemen A yang bukan elemen B.[10]
	Secara simbolik $A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.

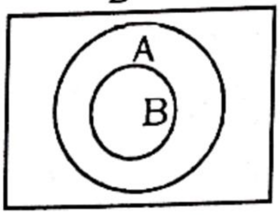
Diagram venn dari *A-B* atau *A/B* adalah sebagai berikut:



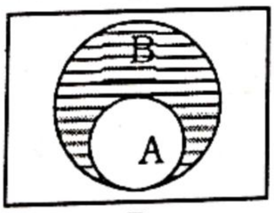
B -



B -



B -



B -

[9] Herstein, I. N. *Topics In Algebra. Second Edition,* John willey & Sons, Inc. 1965, hal. 4.

[10] *Ibid.,* hal. 5.

Teladan 1.14

Himpunan apakah Z/N itu?

Solusi:

Z = {...-2,-1,0, 1, 2...} dan N = {1, 2, 3, ...} maka:
Z/N = {0, -1, -2, -3, ...} atau dinotasikan$Z - N = \{x|x < 1\}$ atau $Z - N = \{x \in Z|x \leq 0\}$.

Definisi 1.11 Komplemen mutlak	Asumsikan U adalah himpunan semesta. Jika terdapat sebarang himpunan A pada U, maka komplemen absolut (*absolutecomplement*) dari S dinotasikan dengan A^c adalah himpunan yang terbentuk dari elemen U yang bukan elemen A.[11]
	Notasi lain dari A^c adalah U/A. $A^c = U - A = \{x \in U|x \notin A\}$

Teladan 1.15

Diberikan U adalah himpunan prima yang kurang dari 50, dan A adalah himpunan bilangan asli ganjil yang kurang 50, maka A^c = {2, 9,15, 21, 27, 33, 35, 39, 45, 49}

Definisi 1.12 Beda Simetris	Dua himpunan A dan B dikatakan Beda Simetris (*symetricdifference*) adalah himpunan yang anggotanya terdiri atas anggota A atau anggota B tetapi bukan anggota $\boldsymbol{A \cap B}$.[12]
	Dinotasikan dengan $\boldsymbol{A \oplus B}$

$\boldsymbol{A \oplus B}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{x|x \in A \cup B \text{ dan } x \notin A \cap B\} \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A/B) \cup (B/A) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

---

[11] Gatot Muhsetyo, *Pengantar Struktur Aljabar*. 1989, IKIP Malang, hal. 21.

[12] Herstein, I. N. *Topics In Algebra.Second Edition*, John willey & Sons, Inc. 1965, hal. 9.

Diagram venn dari $A \oplus B$ adalah sebagai berikut.

Teladan 1.16

Misalkan $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ dan $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ tentukan $A \oplus B$?

Solusi:

$A \oplus B = \{2, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 18\}$

Definisi 1.13 Perkalian Himpunan	Misalkan terdapat himpunan A dan B, maka hasil kali A dan B (*product*, x) adalah himpunan yang terbentuk sebagai pasangan terurut (*orderedpair*) dari (a,b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$.
	Notasi hasil kali A dan B adalah $AxB = \{(a, b) \| a \in A \text{ dan } x \in B\}$.[13]
Definisi 1.14	Dua buah pasangan (a,b) dan (c,d) dikatakan sama dinotasikan dengan $(a,b) = (c,d)$ jika dan hanya jika $a = c$ dan $b = d$.[14]

Teladan 1.17

Misalkan himpunan A = $\{a,b,c\}$ dan B = $\{1,2\}$, maka

$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$

Teladan 1.18

$(a, 2) \neq (a,3)$ dan $(4,3) \neq (3,4)$, tetapi $(a, 3) = (a, 2+1)$ dan $(5, 10) = (6\text{-}1, 2.4+2)$

Definisi 1.15 Himpunan Identik	Dua himpunan atau lebih dikatakan identik jika dan hanya jika himpunan-himpunan tersebut adalah sama.

Pembuktian identik tidaknya dua himpunan dapat dilakukan dengan aljabar himpunan yang menggunakan definisi-definisi

---

[13] *Ibid.*, hal. 1.

[14] David S. Dummit & Richard M Foote, *Abstract Algebra*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991, New Jersey, hal.1.

himpunan yang sudah diberikan beserta turunannya dan hukum De Morgan. Berikut diberikan beberapa contoh dan penyelesaiannya.

Teladan 1.19

Buktikan bahwa $A \cup (A \cap B) = A$.

Solusi:

$$
\begin{aligned}
A \cup (A \cap B) &= (A \cap U) \cup (A \cap B) \\
&= A \cap (U \cup B) \\
&= A \cap U \\
&= A.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\blacksquare}$

Teladan 1.20

Buktikan $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$.

Solusi:

$$
\begin{aligned}
A \cup (A^c \cap B) &= (A \cup (A \cap B)) \cup (A^c \cap B) \\
&= (A \cup [(A \cap B) \cup (A^c \cap B] \\
&= (A \cup [(A \cup A^c) \cap B] \\
&= (A \cup [(U \cap B)] \\
&= (A \cup B).
\end{aligned}
$$

$\boxed{\blacksquare}$

Berikut ini diberikan sifat-sifat yang berlaku pada operasi himpunan yang melibatkan operasi gabungan, irisan dan komplemen. Misalkan *A, B,* dan *C* adalah tiga Himpunan sebarang, dengan $A, B, C \in U$, maka berlaku:

1. Hukum Idempoten

   $A \cap A = A$

   $A \cup A = A$

2. Hukum Komotatif

   $A \cap B = B \cap A$

   $A \cup B = B \cup A$

3. Hukum Asosiatif

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4. Hukum Absorbsi

$A \cap (A \cup C) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$

5. Hukum Distribusi

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

6. Hukum Involusi

$(A^c)^c = A$

7. Hukum De Morgan

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

8. Hukum Identitas

$A \cup \emptyset = A$

$A \cup U = U$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cap U = A$

9. Hukum Komplemen

$A \cup A^c = U$

$A \cap A^c = \emptyset$

$\emptyset^c = U$

$U^c = \emptyset$

Hukum-hukum diatas dapat dibuktikan secara aljabar dan dapat juga ditunjukkan dengan menggunakan tabel kebenaran dan tabel keanggotaan atau menggunakan diagram Venn atau teorema kesamaan himpunan secara formal.

Teorema 1.1	Misalkan A dan B adalah sebarang himpunan, maka: 1. $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $P(A) \subseteq P(B)$ 2. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ 3. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

Bukti:

Hanya akan dibuktikan bagian (1), sedangkan (2) dan (3) diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

- Untuk membuktikan pernyataan jika $A \subseteq B$,maka $P(A) \subseteq P(B)$. Misalkan $A \subseteq B$ dan misalkan $X \in P(A)$ berarti $X \subseteq A$. olah karena $A \subseteq B$ maka $X \subseteq B$ yang berarti pula $X \in P(B)$. Karena $X \in P(A)$ berakibat $X \in P(B)$ maka dapat disimpulkan bahwa $P(A) \subseteq P(B)$
- Untuk membuktikan pernyataan jika $P(A) \subseteq P(B)$ maka $A \subseteq B$.Misalkan $P(A) \subseteq P(B)$. oleh karena $A \in P(A)$, akibatnya $A \in P(B)$. ini berarti bahwa $A \subseteq B$.

$\blacksquare$

B. HIMPUNAN BILANGAN

Sebelum mengkaji lebih jauh tentang himpunan bilangan bulat, akan lebih baik jika kita mengetahui tentang bilangan asli. Biasanya bilangan asli dinyatakan dengan N. Adapun keanggotaan dari $N = \{, 1, 2, 3, \dots\}$. Sedangkan himpunan bilangan bulat dinyatakan dengan "Z" yang merupakan refleksi dari bahasa Jerman berasal dari kata "Zahlen".[15]Keanggotaan dari himpunan bilangan bulat $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Tentu saja berdasarkan konsep himpunan di atas berarti $N \subset Z$. Beberapa sifat aljabar yang berlaku pada bilangan Asli dan bilangan bulat adalah sebagai berikut.

---

[15] William D Blair & J A Beachy, *Abstract Algebra with a Concrete Intuduction,* Prentice Hall do Brasil. 1990, hal. 1.

1. BILANGAN ASLI

Untuk setiap $a, b, c \in N$dan $a, b, c \in Z$maka berlaku:[16]

a) Tertutup, artinya jika $a, b \in N$ maka $a + b \in N$ dan $ab \in N$.

b) Komutatif, artinya jika $a, b \in N$ maka $(a + b) = b + a$ dan $ab = ba$.

c) Asosiatif, artinya jika $a, b, c \in N$ maka berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(ab)c = a(bc)$.

d) Distributif, artinya jika $a, b, c \in N$maka $a(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b)c = ac + bc$

e) Unsur identitas, artinya jika $1 \in N$ maka $1a = a1 = a$.

f) Trikotomi, artinya jika $a, b \in N$ maka berlaku tepat satu, yaitu $a < b$, atau $a = b$, atau $a > b$.

g) Transitif, artinya jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$.

2. BILANGAN BULAT

Untuk setiap $a, b, c \in Z$ maka berlaku:[17]

a) Tertutup, artinya jika $a, b \in Z$ maka $a + b \in Z$, $a - b \in Z$ dan $ab \in Z$.

b) Komutatif, artinya jika $a, b \in Z$ maka $(a + b) = b + a$ dan $ab = ba$.

c) Asosiatif, artinya jika $a, b, c \in Z$ maka berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(ab)c = a(bc)$.

d) Distributif, artinya jika $a, b, c \in Z$maka $a(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b)c = ac + bc$

e) Unsur identitas, artinya jika $0 \in Z$, maka $0 + a = a + 0 = a$ dan jika $1 \in Z$, maka $1a = a1 = a$.

f) Invers suatu unsur, artinya jika $a \in Z$ maka ada $-a \in Z$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$

g) Trikotomi, artinya jika $a, b \in Z$ maka berlaku tepat satu, yaitu $a < b$, atau $a = b$, atau $a > b$.

---

[16] Soehakso, *Pengantar Teori Grup, cetakan IV*, FMIPA UGM, Yogyakarta, 1979, hal. 31.

[17] William D Blair & J A Beachy, *Abstract Algebra with a Concrete Intuduction*, Prentice Hall do Brasil. 1990, hal. 43-44.

h) Transitif, artinya jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$.
i) Jika $a, b \in Z, a \leq b$ maka $a - b \leq 0$.
j) Jika $a, b \in Z, a \geq b$ maka $a - b \geq 0$.
k) Jika $a, b \in Z, a \leq b$ dan $c > 0$, maka $a + c > b + c$.
l) Jika $a, b \in Z, a \leq b$ dan $c > 0$, maka $ac > bc$.

3. BILANGAN PRIMA

Definisi 1.19 Bilangan Prima[18]	Suatu bilangan bulat $p > 1$ disebut *bilangan prima* jika p hanya memiliki pembagi 1 dan p sendiri.
	Jika bilangan bulat $n > 1$ bukan bilangan prima, maka n disebut *bilangan komposit.*

Teladan 1.21
Himpunan bilangan prima ditulis $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$. Sedangkan bilangan komposit $K = \{4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$.

4. BILANGAN RASIONAL

Definisi 1.20 Bilangan Rasional.[19]	Bilangan rasional adalah bilangan yang dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0$.
	Secara simbolik bilangan rasional dinyatakan dengan $Q = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in Z, b \neq 0\right\}$

Misalkan $x, y \in Q$ berarti $x = \frac{a}{b}$, dan $y = \frac{c}{d}$, dimana $a, b, c, d \in Z, b \neq 0, d \neq 0$. Maka $x \pm y = \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, bd \neq 0$, $xy = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, bd \neq 0$ sedangkan $x : y = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

[18] Durbin, J. R. *Modern Algebra,* John Wiley & Sons, Inc, 1979, hal. 12.
[19] Birkhoff & Mc Lane, *A Survey of Modern Algebra,* New Yoek, Mac Millan, 1965, hal. 11.

Sifat-sifat Bilangan Rasional

Untuk setiap $a, b, c \in Q$ maka berlaku sifat-sifat berikut.[20]

a) Tertutup, artinya jika $a, b \in Q$ maka $a + b \in Q$, $a - b \in Q$, $ab \in Q$ dan $\frac{a}{b} \in Q$.

b) Komutatif, artinya jika $a, b \in Q$ maka $(a + b) = b + a$ dan $ab = ba$.

c) Asosiatif, artinya jika $a, b, c \in Q$ maka berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(ab)c = a(bc)$.

d) Distributif, artinya jika $a, b, c \in Q$maka $a(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b)c = ac + bc$

e) Unsur identitas, artinya jika $0 \in Q$, maka $0 + a = a + 0 = a$ dan jika $1 \in Q$, maka $1a = a1 = a$.

f) Invers penjumlahan suatu unsur, artinya jika $a \in Q$ maka ada $-a \in Q$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

g) Invers perkalian suatu unsur, artinya jika $a \in Q$ maka ada $\frac{1}{a} \in Q$ sedemikian sehingga $a . \frac{1}{a} = \frac{1}{a} . a = 1$.

5. BILANGAN KOMPLEKS

Definisi 1.21 Bilangan Kompleks.[21]	Bilangan kompleks adalah bilangan yang dinyatakan sebagai $ai + b$, dimana $a, b \in R$, $i = \sqrt{-1}$, biasanya i disebut bilangan imajiner (bilangan khayal).
	Secara simbolik ditulis $C = \{a + bi \mid a, b \in R,\ i = \sqrt{-1}\}$

Misalkan x dan y keduanya bilangan kompleks maka dapat dinyatakan $x = a + bi$ dan $y = c + di$, sehingga:

1) $x \pm y = (a + bi) \pm (c + di) = (a + c)i \pm (b + d)$.
2) $xy = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

[20] Gaotot Muhsetyo, *Pengantar Struktur Aljabar,* IKIP Malang, hal. 27.

[21] William D Blair & J A Beachy, *Abstract Algebra with a Concrete Intuduction,* Prentice Hall do Brasil. 1990, hal 79.

3) $\frac{x}{y} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

4) $i^2 = 1$ dan $i^2 - 1 = 0$.

5) $0 + 0i = 0$ maka $x + 0i = x$.

6) Jika $z = a + bi$ maka $\bar{z} = a - bi$, dan $\bar{z}$ disebut bilangan konjugasi dari z.[22]

Pada beberapa literatur jika $x, y \in C$ dimana $x = a + bi$ dan $y = c + di$ maka $x = (a, b)$ dan $y = (c, d)$. Sehingga $x + y = (a + c,\ b + d)$ dan $xy = (ac - bd,\ \ ad + bc)$.

Beberapa sifat yang berlaku pada bilangan kompleks adalah berikut ini:

Untuk setiap $x, y, z \in C$ maka berlaku:

a) Tertutup, artinya jika $x, y \in C$ maka $x + y \in C$, $x - y \in C$, $xy \in C$ dan $\frac{x}{y} \in C$.
b) Komutatif, artinya jika $x, y \in C$ maka $(x + y) = y + x$ dan $xy = yx$.
c) Asosiatif, artinya jika $x, y, z \in C$ maka berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$ dan $(xy)z = x(yz)$.
d) Distributif, artinya jika $x, y, z \in C$ maka $x(y + z) = xy + xz$ dan $(x + y)z = xz + yz$
e) Unsur identitas, artinya jika $0 \in C$, maka $0 + x = x + 0 = x$ dan jika $1 \in C$, maka $1x = x1 = x$ untuk setiap $x \in C$
f) Invers penjumlahan suatu unsur, artinya jika $x \in C$ maka ada $-x \in C$ sedemikian sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
g) Invers perkalian suatu unsur, artinya jika $x \in C$ maka ada $\frac{1}{x} \in C$ sedemikian sehingga $x.\frac{1}{x} = \frac{1}{x}.x = 1$

[22]Herstein, I. N. *Abstract Algebra, Third Edition*, Prentice Hall, 1995, hal 29

Lemma 1.1
Jika $z.w \in C$, maka berlaku sifat-sifat berikut:[23]
(a) $\bar{\bar{z}} = z$
(b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
(c) $\overline{zw} = \bar{z}.\bar{w}$
(d) $z.\bar{z}$ adalah bilangan riel positif jika $z \neq 0$
(e) $\bar{z} + z$ sama denganjumlah dua bagian bilangan riel pada z
(f) $\bar{z} -$ z sama dengan jumlah dua bagian bilangan imajiner pada z

Definisi 1.22 Nilai Mutlak Bilangan Kompleks.[24]	Jika $z = a + bi \in C$, maka nilai mutlak dari z ditulis $\lvert z \rvert = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Berdasarkan definisi di atas, diperoleh lemma berikut:

Lemma 1.2
(a) Jika $z, w \in C$, maka $\lvert zw \rvert = \lvert z \rvert \lvert w \rvert$
(b) Jika $z.w \in C$, maka $\lvert z + w \rvert \leq \lvert z \rvert + \lvert w \rvert$

C. KETERBAGIAN

Definisi 1.23 Keterbagian[25]	Misalkan $a, b \in Z$ dimana $a \neq 0$, a dikatakan membagi b jika terdapat $c \in Z$ sehingga $b = ac$
	Dengan kata lain, a pembagi dari b atau b kelipatan dari a atau b habis dibagi a dan ditulis $a \mid b$. Sedangan a tidak membagi b ditulis $a \nmid b$.

---

[23] Herstein, I. N. *Abstract Algebra, Third Edition,* Prentice Hall, 1995, hal. 32-33.

[24] *Ibid.,* hal. 34.

[25] Herstein, I. N. *Abstract Algebra. Third Edition,* Upper Saddle River, New Jersey, 1995, hal. 22.

Teladan 1.22

4 membagi 12 ditulis $a|b$ sebab ada 3 sedemikian sehingga $12 = 4.3$

3 tidak membagi 8 ditulis $3 \nmid 8$, sebab tidak ada n bilangan bulat sehingga $8 = 3n$.

Beberapa sifat aljabar yang berlaku pada bilangan Asli dan bilangan bulat adalah sebagai berikut.

Untuk setiap $a, b, c \in Z$ maka berlaku sifat-sifat berikut.[26]

a) $1|a$
b) Jika $a \neq 0$, maka $a|0$
c) Refleksif, artinya $a|a$.
d) Transitif, artinya jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$.
e) Penjumlahan, artinya jika $a|b$ dan $a|c$ maka $a|b+c$
f) Perkalian, artinya jika $a|b$ maka $ac|bc$
g) Pencoretan (konselasi), artinya jika $ac|bc$ dan $c \neq 0$ maka $a|b$.
h) Jika $a|1$, maka $a = 1$ atau $a = -1$.
i) Jika $a|b$ dan $b|a$ maka $a \pm b$.

D. FPB, KPK DAN ALGORITMA PEMBAGIAN

Definisi 1.24 Faktor Persekutruan Terbesar (FPB)[27]	a) Bilangan c disebut faktor persekutuan dari bilangan a dan b jika c membagi a dan b. b) Bilangan d disebut faktor persekutuan terbesar bilangan a dan b jika i. d faktor persekutuan a, b ii. Untuk setiap faktor persekutuan e dari bilangan a dan b, maka $e|d$.
	Notasi: d ditulis sebagai (a,b) atau FPB(a,b) atau $gcd(a,b)$.

[26] Herstein, I. N. *Abstract Algebra*, hal. 23.

[27] William D Blair & J A Beachy, *Abstract Algebra with a Concrete Intuduction*, Prentice Hall do Brasil. 1990, hal 18.

Definisi 1.25 Faktor Persekutuan Terkecil (KPK)[28]	a) Bilangan k disebut kelipatan persekutuan bilangan a dan b jika k dapat dibagi oleh a dan b. b) Bilangan k disebut kelipatan persekutuan terkecil bilangan a dan b jika k kelipatan persekutuan a dan b c) Untuk setiap kelipatan persekutuan l dari bilangan a dan b, maka $k\|l$.
	Notasi: k ditulis sebagai KPK (a,b) atau $lcm\ (a,b)$.

Teladan 1.23

1. FPB (45,75) = 15.
2. Bilangan 8 dan 9 adalah relatif prima, sebab FPB (8,9) = 1.
3. KPK (12,20) = 60.

Sifat-sifat

1) Algoritma Pembagian

   Algoritma pembagian, artinya jika $a, b \in Z$ dengan $b \neq 0$, maka terdapat bilangan bulat n dan r, dimana $0 \leq r < n$ sedemikian sehingga $a = bn + r$.

   Jika $b|a$, maka $r = 0$, sehingga $a = bn$.[29]
2) Jika a dan b bilangan bulat dan d= FPB (a,b), maka ada bilangan m dan n sehingga $d = ma + nb$
3) Jika p prima, a, b bilangan bulat dan $p|ab$, maka $p|a$ atau $p|b$.
4) Jika $a|c$ dan $b|c$ serta FPB (a,b) = 1, maka $ab|c$.
5) Pemfaktoran Tunggal

   Setiap bilangan bulat a dengan $|a| > 1$, maka a dapat ditulis sebagai perkalian bilangan prima (Penulisan ini tunggal kecuali urutannya).

---

[28] *Ibid.*, hal. 19.

[29] Herstein, I. N. *Abstract Algebra, Third Edition*, Upper Saddle River, New Jersey, 1995, hal. 22.

TEOREMA 1.2	E. Teorema Bachet Bezout, Faktor persekutuan terbesar dari sebarang bilangan bulat a dan b, dapat ditulis sebagai kombinasi dari a dan b, yaitu ada bilangan bulat x, y sehingga $(a, b) = ax + by$,[30] F. Lemma Euclid Jika $a\|bc$ dan $(a,b) = 1$, maka $a\|c$. G. Jika $(a,b) = d$, maka $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. H. Misalkan c adalah bilangan bulat positif, maka $(ca, cb) = c(a, b)$. I. $(a^2, b^2) = (a, b)^2$ J. FPB dari dua bilangan asli berurutan adalah 1. FPB$(n,n+1) = 1$ dengan n bilangan asli.

Definisi 1.26 Relatif Prima[31]	Jika $a, b \in Z^+$ dikatakan relatif prima jika FPB $(a,b)=1$ dapat ditulis $(a,b) = 1$

Teladan 1.24

Pasangan terurut 3 dan 4 adalah relatif prima, sebab $(3,4) = 1$. Begitu pula $(5,9) = 1$.

Untuk setiap $a, b, c \in Z$ maka berlaku sifat:

1. Jika $b|ac$ dan $(a,b) = 1$ maka $b|c$.
2. Jika $b|a$ dan $c|a$ serta $(b,c)=1$ maka $bc|a$.

---

30 Herstein, I. N. *Topics in Algebra, second Edition*. John willey & Sons Inc. 1965, hal 18.

31 *Ibid.,* hal. 19.

E. RELASI KONGRUENSI

Definisi 1.27 Kongruensi Modulo *n*.[32]	Misalkan $m > 0$. Jika a dan b adalah bilangan bulat sehingga a-b dapat dibagi m, maka a dan b dikatakan kongruen modulo m, ditulis$a \equiv b(mod\ m)$.
	Dengan kata lain, $a - b = km$, untuk k bilangan bulat.

Teladan: 1.25

(a) $31 \equiv 1(mod\ 6)$, sebab 31-1=30=6(5)

(b) $100 \equiv 2(mod\ 7)$, sebab 100-2=98=7(14)

Sifat-sifat

Misalkan $a, b, c, d, m \in Z$ dan $m > 0, k \in Z^+$ dengan $a \equiv b(mod\ m)$ dan $c \equiv d(mod\ m)$. Maka berlaku sifat-sifat berikut.[33]

(a) $a + c \equiv b + d(mod\ m)$

(b) $a - c \equiv b - d(mod\ m)$

(c) $ac \equiv bd(mod\ m)$

(d) $a^k \equiv b^k(mod\ m)$

(e) Jika f polinomial dengan koefisien bilangan bulat maka$f(a) \equiv f(b)(mod\ m)$

F. TEOREMA FERMAT, WILSON'S, & EULER

a) Teorema Kecil Fermat.[34]

Jika p adalah bilangan prima dan FPB(p,a) = 1, maka$a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$ atau $a^{p-1} - 1 \equiv 0(mod\ p)$.

---

[32] William D Blair & J A Beachy, *Abstract Algebra with a Concrete Intuduction,* Prentice Hall do Brasil. 1990, hal. 21.

[33] William D Blair & J A Beachy, *Abstract Algebra with a Concrete Intuduction,* Prentice Hall do Brasil. 1990, hal. 25.

[34] Gatot Muhsetyo, *Pengantar Teori Bilangan,* Malang, UM Press, 1999, hal. 151.

b) Akibat

Jika p bilangan prima, maka untuk setiap bilangan bulat a berlaku $a^p \equiv 1(mod\ p)$atau$a^p - a \equiv 0(mod\ p)$

c) Lemma

Jika $a^2 \equiv 1(mod\ p)$, maka berlaku tepat satu $a \equiv 1(mod\ p)$ atau $a \equiv -1(mod\ p)$.

d) Teorema Wilson

Jika p bilangan prima, maka $(p-1)! + 1 \equiv 0(mod\ p)$ atau $(p-1)! \equiv -1(mod\ p)$.

e) Kebalikan Teorema Wilson

Jika $(p-1)! + 1 \equiv 0(mod\ p)$, maka p adalah bilangan prima.

f) Teorema Euler

Jika FPB $(a,n) = 1$, maka $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ (mod\ n)$.

g) Persamaan kuadrat $x^2 + 1 \equiv 0(mod\ p)$dengan p bilangan prima ganjil mempunyai jawab jika dan hanya jika $p \equiv 1\ (mod\ p)$.

SOAL-SOAL UNTUK LATIHAN

1. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$. Buktikan bahwa $A \subseteq C$.
2. Jika $A \subseteq B$. Buktikan bahwa $A \cup C \subseteq B \cup C$, untuk sebarang himpunan C.
3. Misalkan $C \subseteq S$ dan C' adalah komplemen C dalam himpunan S. Tunjukkan jika A dan B keduanya subset S, maka berlaku:
   (a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
   (b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
4. Diketahui S adalah himpunan semesta. Misalkan A dan B keduanya subset S didefinisikan $A + B = (A - B) \cup (B - A)$ dan $A.B = A \cap B$. Tunjukkan bahwa:
   (a) $A + B = B + A$
   (b) $A + A = \emptyset$
   (c) $A + \emptyset = A$
   (d) Jika $A + B = A + C$, maka $B = C$.
5. Tentukan faktor-faktor prima dari bilangan berikut.
   (a) 36 (b) 120 (c) 1024 (d) 5040
6. Periksalah, apakah bilangan-bilangan berikut merupakan bilangan prima.
   (a) 301 (b) 1001 (c) 473 (d) 2003
7. Diberikakan bilangan-bilangan prima 2, 3, 5, 7, 11, ... buatlah bilangan bulat positif yang dibangun (a)1+2.3, (b) 1+2.3.5, (c) 1+2.3.5.7, dan seterusnya. Apakah bilangan yang terbentuk merupakan bilangan prima juga?
8. Tunjukkan bahwa jika $a|m$ dan $b|m$ serta $(a,b) = 1$, maka $(a,b)|m$.
9. Tentukan hasil dari operasi bilangan-bilangan berikut.
   (a) $(6 - 7i) + (8 + i)$
   (b) $(6 - 7i)(8 + i)$
   (c) $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}i\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}i\right)$
   (d) $(2 + 3i)^4$
   (e) $(3 - 4i)^7$

10. Tentukan nilai mutlak dari

(a) $|6 - 4i|$

(b) $\left|\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right|$

(c) $\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right|$

11. Tunjukkan bahwa $|\bar{z}| = |z|$.

12. Misalkan $a, b \in Z^+$. Tunjukkan bahwa jika $h = \frac{a}{(a,b)}$ dan $k = \frac{b}{(a,b)}$, maka$(h, k) = 1$.

13. Misalkan $a, b \in Z - \{0\}$ dengan (a,b)=1. Tunjukkan bahwa $(a+b, ab) = 1$.

14. Misalkan $a, b \in Z - \{0\}$ dengan (a,b)=1. Hitunglah $(a+b, a-b)$!

15. Tentukan nilai x pada kongruensi berikut.

(a) $2x \equiv 1(mod\ 9)$

(b) $5x \equiv 1(mod\ 12)$

(c) $19x \equiv 1(mod\ 36)$

(d) $x^2 \equiv 1(mod\ 16)$

Tujuan Perkuliahan Umum (TPU).

Mahasiswa dapat memahami dan menjelaskan fungsi (pemetaan), fungsi injektif, surjektif dan bijektif, komposisi fungsi, invers fungsi pada himpunan berserta sifat-sifatnya.

Tujuan Perkuliahan Khusus (TPK)

Setelah selesai perkuliahan mahasiswa diharapkan mampu :

a) Menentukan daerah asal dan daerah kawan dari suatu himpunan.
b) Menentukan fungsi dari himpunan A dan B yang tak kosong.
c) Menentukan fungsi 1-1 (injektif) dari himpunan tak kosong.
d) Menentukan fungsi Surjektif dari himpunan tak kosong.
e) Menentukan fungsi bijektif dari himpunan tak kosong.
f) Menentukan komposisi fungsi.
g) Menentukan Invers fungsi.
h) Membuktikan sifat-sifat suatu fungsi

BAB II
FUNGSI (PEMETAAN)

Fungsi merupakan konsep dasar matematika yang sangat penting karena mempelajari keterhubungan atau keterkaitan variabel-variabel dari dua atau lebih himpunan-himpunan semesta pembicaraan merupakan hal pokok yang sangat fundamental dalam matematika, sehingga tidaklah mengherankan bila permasalahan tentang fungsi atau pemetaan banyak dijumpai dalam aljabar, geometri, kalkulus, statistika dan sebagainya. Pada beberapa literatur kata fungsi memiliki makna yang sama dengan kata pemetaan, sehingga dalam buku ini kedua kata tersebut seringkali digunakan secara bergantian. Berikut ini diberikan tentang makna fungsi yang dijadikan dasar atau rujukan dalam pembahasan selanjutnya.

A. PENGERTIAN FUNGSI

Definisi 2.1	Suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu keterkaitan yang menghubungkan setiap elemen pada himpunan A dengan suatu elemen di himpunan B yang tunggal atau unik.
Catatan: Keterkaitan bisa dimaknai suatu aturan, formula, hubungan, korespondensi, format sederhana, tidak berlebihan.	

Dari definisi di atas, himpunan A disebut dengan daerah asal (*domain*) dan himpunan B disebut dengan daerah kawan (*codomain*) dari fungsi.

Bentuk lain dari definisi diatas dapat dinyatakan seperti berikut ini.

Misalkan A dan B suatu himpunan tak kosong. Suatu fungsi/ pemetaan (*function/mapping*) f dari A ke B dapat dinyatakan sebagai suatu himpunan bagian f dari A x B sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ terdapat tepat satu $b \in B$ dimana $(a,b) \in f$ atau $(a, f(a))$ dengan $f(a) = b$.[1]

Jika $a = b$ maka $f(a) = f(b)$

Himpunan A disebut daerah asal (domain) dari f dan B disebut daerah kawan (codomain) dari f

Ungkapan diatas dapat juga dinyatakan sebagai berikut:

Misalkan A dan B suatu himpunan tak kosong. Suatu pengaitan f dari A ke B disebut pemetaan (*fungsi*) jika :

1. Untuk setiap $a \in A$ terdapat $b \in B$ sedemikian hingga $f(a) = b$.
2. Untuk sebarang $a_1, a_2 \in A$. Jika $a_1 = a_2$, maka $f(a_1) = f(a_2)$.[2]

Catatan:	Penulisan $f: A \to B$ menunjukkan bahwa f suatu fungsi dengan daerah asal A dan daerah kawan B. Jika diberikan fungsi $f: A \to B$, maka $f(a) = b$ dibaca bayangan a oleh f adalah b, atau nilai a oleh fungsi f sama dengan b.

---

[1] Herstein, I. N. *Abstract Algebra, Third Edition*, Prentice Hall, 1995, hal. 9.

[2] Herstein, I.N. *Topics in Algebra*. John Wiley & Sons, Inc, 1965, hal. 11.

Berarti jika $f(a) = b$, berarti $(a,b) \in f$ atau $(a, f(a))$. Sedangkan aturan yang memasangkan setiap anggota di A dengan anggota di B disebut pengaitan.

Jika $f: A \to B$ suatu fungsi, maka daerah hasil (*range*) atau peta (*image*) dari f. Sedangkan *range* atau himpunan peta (*image*) f dinyatakan dengan f(A) atau $R_f = \{b \in B : b = f(a)$ untuk suatu $a \in A\}$.

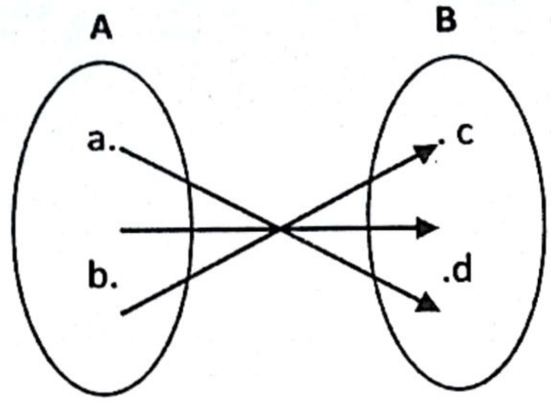
Fungsi atau Pemetaan secara umum seringkali dinyatakan dalam simbol huruf-huruf latin seperti α, β, γ, dan seterusnya, atau dituliskan dalam huruf-huruf abjad alfabet seperti *f, g, h,* dan seterusnya. Jika α adalah suatu fungsi dari A ke B, maka kita akan menuliskannya dengan $\alpha : A \to B$ atau $A \xrightarrow{\alpha} B$.

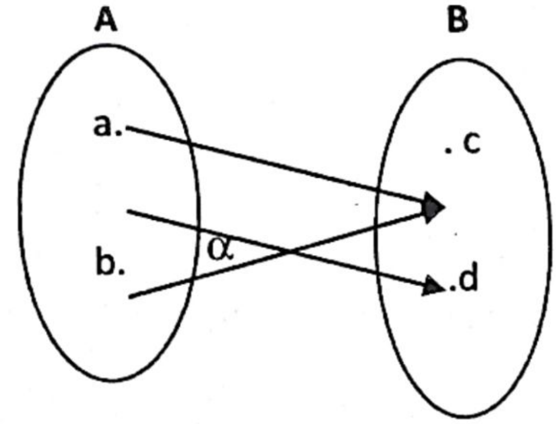
Jika x adalah suatu elemen A, maka $\alpha(x)$ menyatakan elemen tunggal di B yang terkait dengan x. Elemen $\alpha(x)$ disebut bayangan x atau *image* dari x oleh fungsi α atau $\alpha(x)$ menyatakan nilai x oleh fungsi α. Himpunan yang anggotanya semua bayangan dari α disebut dengan daerah hasil atau *range* dari α.

Untuk memudahkan dalam mengingat dan menulis daerah asal atau domain dari α dinyatakan secara simbolik dengan D_α atau da(α) dan daerah kawan atau codomain dari α secara simbolik dengan C_α atau dk(α), serta daerah hasil atau *range* atau peta dari α secara simbolik dengan R_α atau dh(α). Bila $\alpha: A \to B$, maka daerah hasil α atau *range* dapat ditulis $\alpha(A)$ atau R_α.

Teladan 2.1

Jika $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{c, d, e\}$, maka dua fungsi α dan β dari A ke B, dapat dinyatakan dengan diagram panah berikut ini :





$\alpha : A \rightarrow B$ didefinisikan dengan

$\alpha(a) = e$, $\alpha(b) = d$, dan $\alpha(c) = c$

$da(\alpha) = A$, $dk(\alpha) = B$, $dh(\alpha) = \alpha(A) = B$

β

$\beta : A \rightarrow B$ didefinisikan dengan
$\beta(a) = d$, $\beta(b) = e$, dan $\beta(c) = d$

$da(\beta) = A$, $dk(\beta) = B$, $dh(\beta) = \beta(A) = \{d, e\}$ dimana $dh(\beta) = \beta(A) = \{d,e\} \subseteq B$

Pernyataan α memetakan A ke B berarti α adalah suatu fungsi dari A ke B atau $\alpha: A \rightarrow B$. Jika α memetakan A ke B, maka semua bayangan dari α termuat di B. Tentu saja daerah hasil dari α bisa terdiri dari satu atau lebih anggota-anggota B, dengan kata lain bahwa range suatu fungsi adalah subset codomain atau dapat ditulis $\alpha(A) \subseteq B$.

B. JENIS-JENIS FUNGSI

Untuk membedakan kategori fungsi, disajikan beberapa jenis fungsi yang diantaranya adalah:

a). Fungsi Konstan (fungsi tetap)

b). Fungsi Onto atau Surjektif

c). Fungsi satu-satu atau injektif

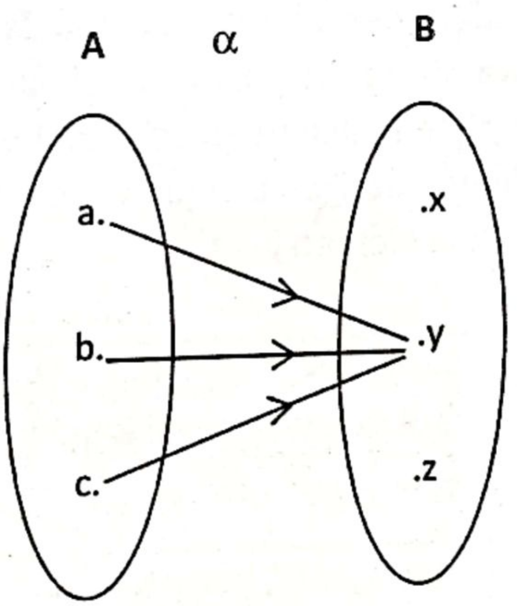
d). Fungsi satu-satu dan onto (fungsi bijektif)

e). Fungsi identitas

f). Fungsi Invers

Definisi 2.2 Fungsi Konstan	Misalkan fungsi $\alpha: A \rightarrow B$ sedemikian sehingga $\alpha(A)$ hanya memuat satu anggota di B, maka α disebut dengan pemetaan atau fungsi konstan (*constant mapping*)

Teladan 2.2

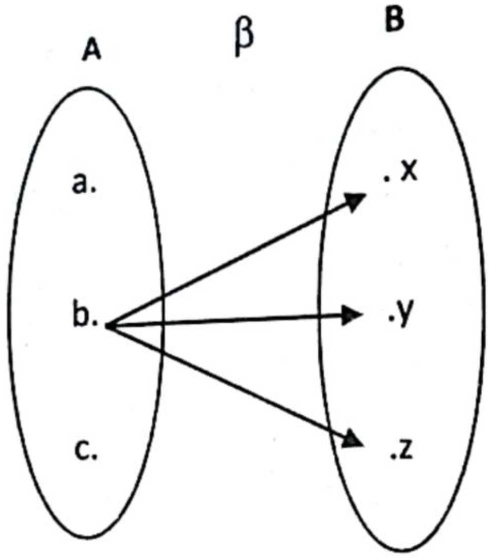


$\alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(c) = y$

$\alpha(A) = \{ y \}$

Secara umum fungsi konstan diekpresikan sebagai $f(x) = k$, dimana k adalah elemen kodomain yang tetap.

apabila kedudukan atau posisi dari arah diagram panah dirubah sebagaimana diagram berikut:



Maka β bukan fungsi (bukan pemetaan), karena $b \in A$ *tidak* dipasangkan ke tepat satu elemen *B,* artinya b memiliki tiga bayangan yang berbeda.

Pernyataan $\alpha: x \rightarrow y$ atau $x \overset{\alpha}{\rightarrow} y$ adalah pernyataan yang menunjukkan bahwa y adalah bayangan dari x oleh fungsi α. Suatu formula $(x, y) \rightarrow x + y$ untuk masing-masing pasangan bilangan-bilangan real x dan y mendefinisikan suatu fungsi dari *RxR* ke *R*. Perlu mendapatkan perhatian khusus pada beberapa teladan selanjutnya bahwa suatu fungsi tidak selalu mengkait-kan elemen tunggal dengan elemen tunggal, tetapi dapat juga mengkaitkan pasangan elemen dengan elemen yang tunggal atau pasangan elemen ke pasangan elemen juga.

Definisi 2.3 Fungsi Onto	Misalkan fungsi $\alpha: A \rightarrow B$ dan $\alpha(A) = B$, maka α disebut dengan fungsi kepada (onto atau *surjektif*).
Jadi α adalah fungsi *onto* atau *surjektif*, berarti jika $\forall\, y \in B$ terdapat (paling sedikit satu) $x \in A$ sedemikian sehingga $\alpha(x) = y$.[3]	

[3] William D.Blair & John A. Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 55.

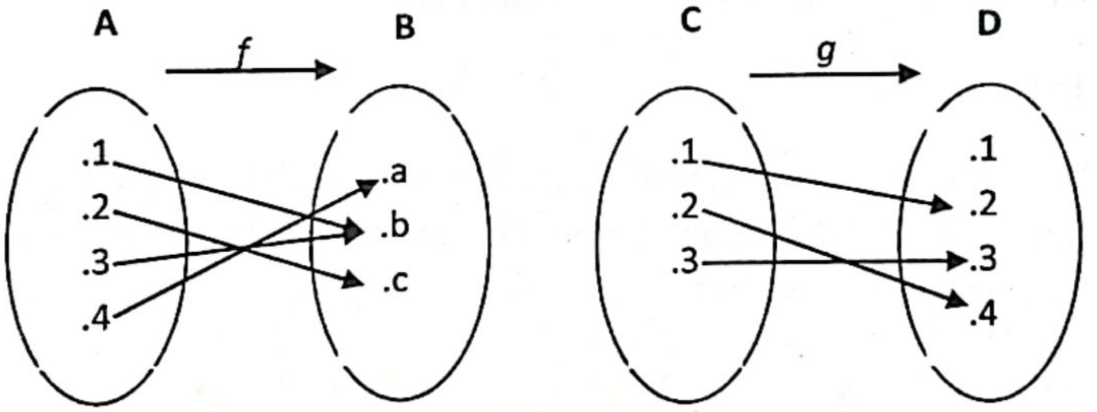
Ekspresi pada teladan 2.1, fungsi α merupakan fungsi surjektif, sedangkan fungsi β bukan fungsi surjektif. Mengapa?

Teladan 2.3

Jika $f: R \rightarrow R$ dengan $f(x) = 2x - 6$ maka f merupakan fungsi onto, sebab $\forall y \in R, terdapat\ x \in R$, dimana $x = \frac{y+6}{2}$ sedemikian sehingga dan $f(x) = f\left(\frac{y+6}{2}\right) = 2\left(\frac{y+6}{2}\right) - 6 = y + 6 - 6 = y.$

Teladan 2.4

Jika diamati secara baik pada diagram panah, dapat dengan mudah untuk menunjukkan apakah suatu fungsi tergolong surjektif atau bukan? Berikut ini diberikan ilustrasi fungsi surjektif melalui diagram panah.



Dengan memperhatikan diagram panah pada fungsi f dan g di atas, berarti fungsi f adalah fungsi surjektif atau onto, sedangkan fungsi g bukan fungsi surjektif/onto.

Adanya istilah fungsi onto atau surjektif, yaitu suatu pemetaan yang memiliki daerah hasil sama dengan daerah kawan atau dh(α) = dk(α) atau $D_\alpha = \alpha(A)$, maka seberang fungsi dari suatu himpunan A ke himpunan A disebut dengan fungsi ke dalam (*into*). Selanjutnya, jika diperhatikan pada beberapa teladan bahwa $\alpha: A \rightarrow B$ dan $y \in B$, maka kawan dari y yang merupakan elemen A dapat lebih dari satu. Jika kawan dari $y \in B$

adalah hanya satu, maka α disebut dengan fungsi 1 – 1 (*one – to – one*).

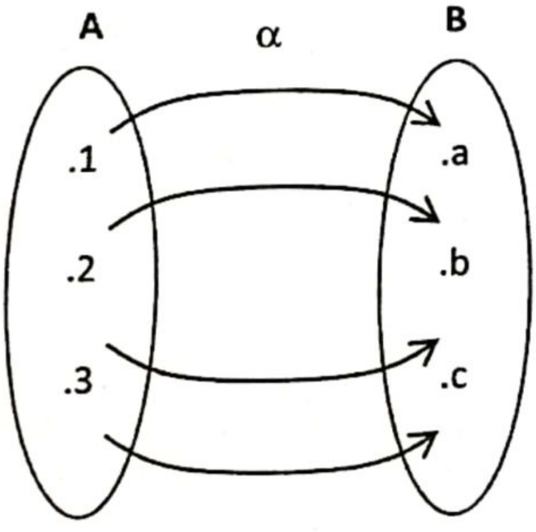
<table>
<tr><td>Definisi 2.4 Fungsi Injektif</td><td>Fungsi α adalah 1 – 1 (injektif) jika setiap elemen berbeda di A memiliki bayangan pada elemen B yang berbeda juga.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ungkapan lain dari fungsi injektif:

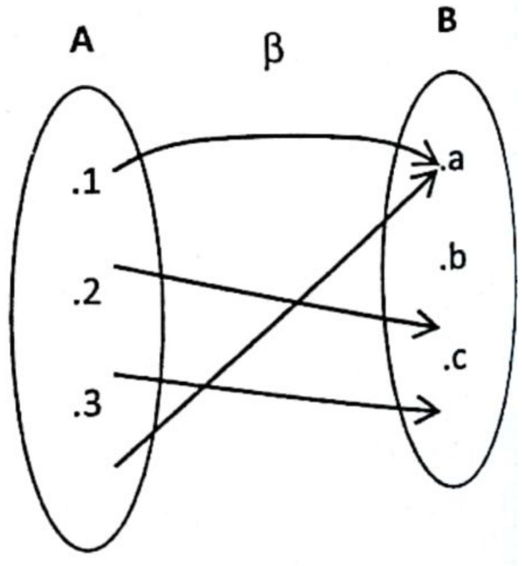
Jika $x_1 \neq x_2$ berakibat $\alpha(x_1) \neq \alpha(x_2)$ atau diungkapkan dengan kontra posisi yang ekuivalen dengan pernyataan: jika $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$, maka $x_1 = x_2$.[4]</td></tr>
</table>

Hal ini berarti bahwa elemen-elemen yang berbeda mempunyai bayangan-bayangan yang berbeda pula.

Teladan 2.5

Dibawah ini adalah representasi fungsi α adalah fungsi 1-1 dan fungsi β adalah bukan fungsi 1-1 yang diilustrasikan dengan diagram panah berikut.





[4] William D.Blair & John A. Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 56.

Catatan:	α adalah fungsi 1–1 (*injektif*) karena bayangan dari elemen-elemen yang berbeda adalah berbeda pula, yaitu $\alpha(1) \neq \alpha(2) \neq \alpha(3) \neq \alpha(4)$. Sedangkan fungsi β bukan fungsi 1-1 (*injektif*) sebab ada dua elemen berbeda di A, tetapi memiliki bayangan sama yaitu $1 \neq 4, tetapi\ \beta(1) = \beta(4) = a$.

Teladan 2.6

Fungsi f sebagaimana Teladan 2.3 merupakan fungsi satu-satu (*injektif*). Sebab jika $f(x) = f(y)$ berakibat $x = y$, seperti hasil algoritma berikut.

$$f(x) = f(y)$$

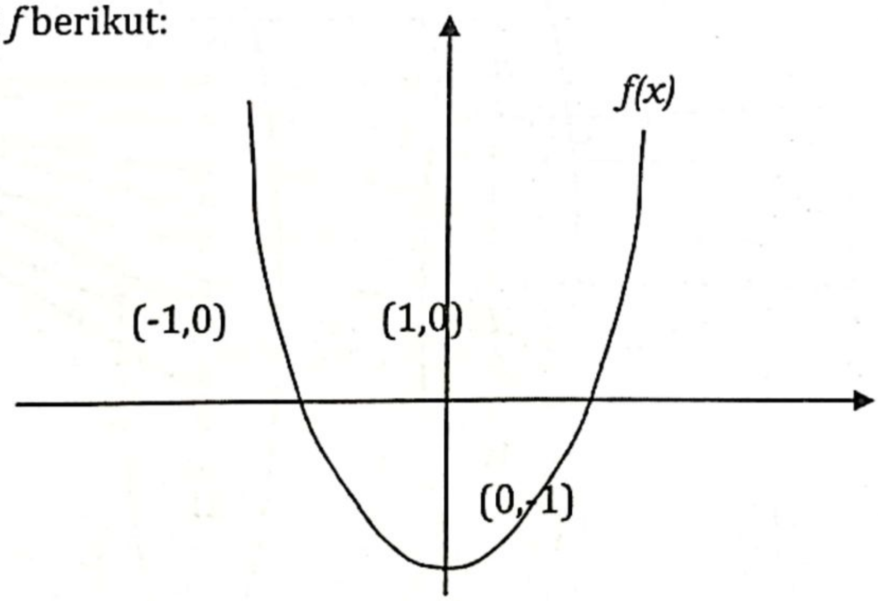
$$2x - 6 = 2y - 6$$

$$2x = 2y$$

$$x = y$$

Teladan 2.7

Pemetaan $f: R \to R$ didefinisikan dengan $f(x) = x^2 - 1$ dan grafik fungsi f berikut:



Berdasarkan grafik fungsi diatas, *f(x)* bukan merupakan fungsi injektif sebab $1 \neq -1$, $tetapi\ f(1) = f(-1) = 0$.

Teladan 2.8

Fungsi $g: R \to R$ yang didefinisikan dengan $g(x) = \cos x$ adalah bukan fungsi injektif atau 1–1, sebab $g(x) = \cos x = \cos(x + 2n\pi) = g(x + 2n\pi)$ untuk setiap $x \in R$ dan n bilangan bulat.

Catatan:	Suatu fungsi 1-1 (*injektif*) tidak harus merupakan fungsi onto (*surjektif*). Sebaliknya, suatu fungsi yang onto (*surjektif*) belum tentu 1–1 (*injektif*).

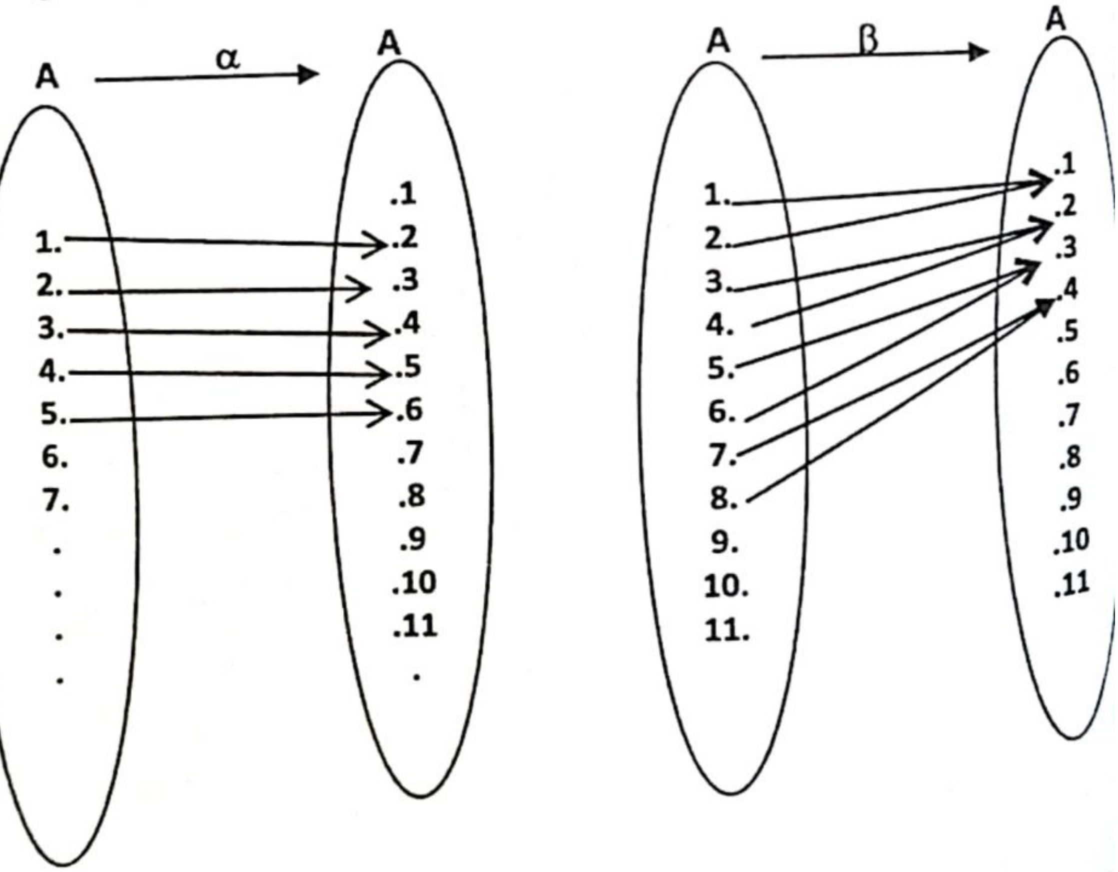
Teladan 2.9

Misalnya $\alpha: A \to A$ dan $\beta: A \to A$ dengan A adalah himpunan bilangan asli. Jika kedua fungsi didefinisikan dengan:

$$\alpha(n) = 2n + 1 \text{ , dan}$$

$$\beta(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, \; jika\ n\ bilangan\ Genap \\ \frac{(n+1)}{2}, jika\ n\ bilangan\ Ganjil \end{cases}$$

Diagram panah dari fungsi α dan β tersebut adalah berikut ini:

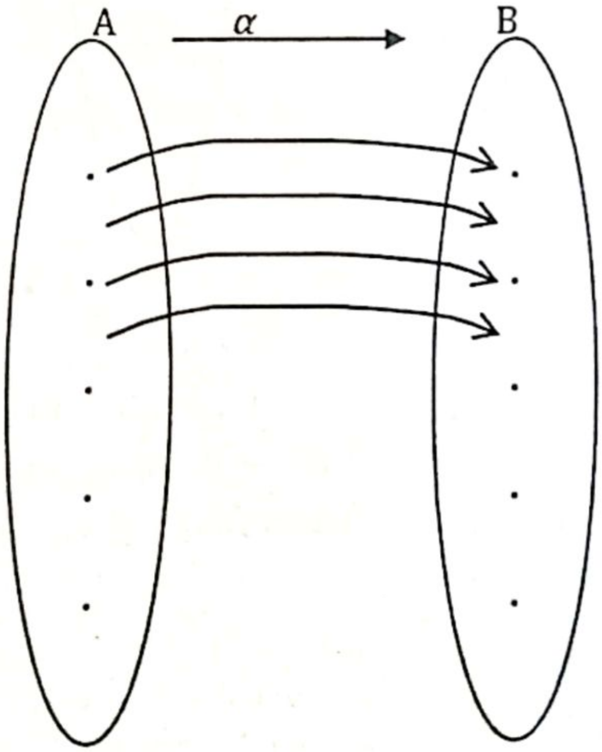


Fungsi-fungsi yang direpresentasikan melalui diagram panah diatas menunjukkan bahwa α adalah fungsi 1–1 (*injektif*) tetapi bukan fungsi onto (*surjektif*), sedangkan β adalah fungsi onto (*surjektif*) tetapi bukan fungsi 1–1 (*injektif*).

Eksistensi fungsi 1–1 (*injektif*) yang bukan merupakan fungsi onto (*surjektif*) dapat digunakan untuk membedakan himpunan-himpunan tak hingga (*infinite*) dengan himpunan-himpunan yang terhingga (*finite*). Suatu himpunan A adalah tak terhingga jika ada suatu pemetaan dari A ke A yang 1–1 (*injektif*) tetapi bukan fungsi onto (*surjektif*).

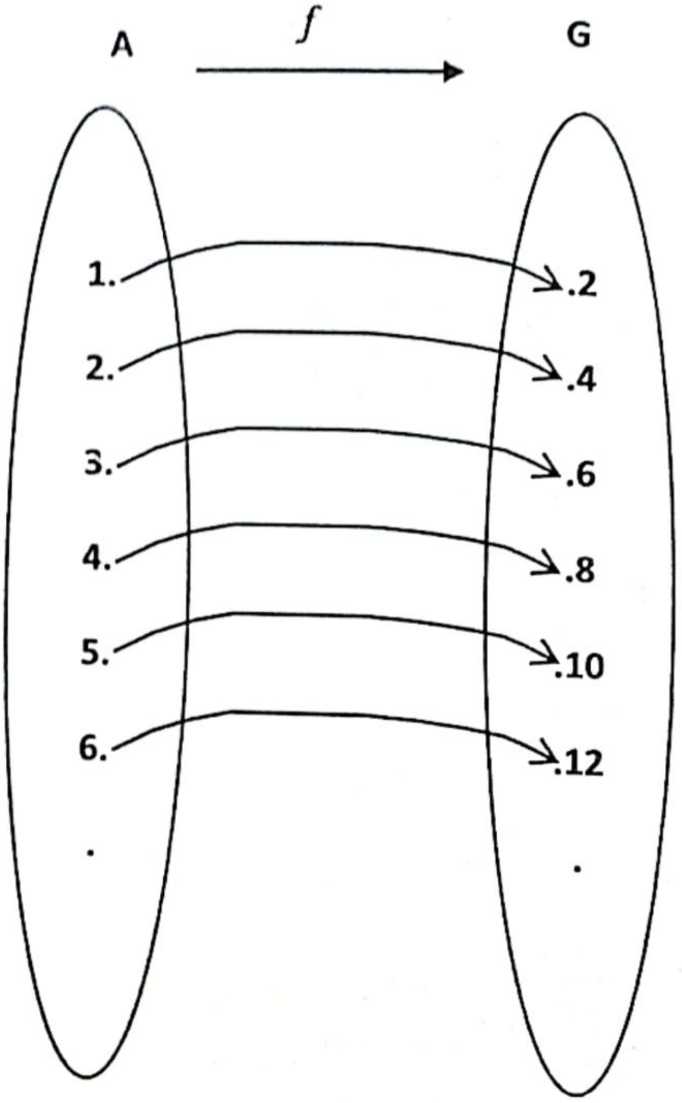
Definisi 2.5	Misalkan α suatu fungsi, α disebut fungsi *bijektif* jika α fungsi 1–1 (*injektif*) dan onto (*surjektif*).
Jika $\alpha: A \to B$ merupakan fungsi *bijektif*, maka setiap anggota dari A dibayangkan ke satu anggota B yang tunggal dan setiap anggota dari B merupakan bayangan dari satu anggota A yang tunggal pula.	

Ilustrasi dari fungsi *bijektif* adalah :



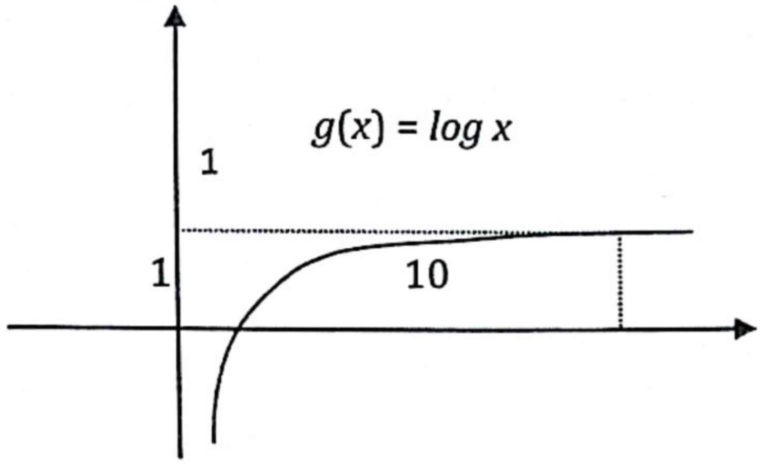
Teladan 2.10

Jika A adalah himpunan bilangan asli dan G adalah himpunan bilangan genap positif, maka $f: A \to G$ didefinisikan dengan $f(n) = 2n$ adalah fungsi 1 - 1 dan onto (*bijektive*) yang diekspresikan sebagaimana diagram berikut.



Teladan 2.11

Jika R^+ adalah himpunan bilangan real positif dan R adalah himpunan bilangan real, maka $g : R^+ \to R$ yang didefinisikan dengan $g(x) = \log x$ adalah merupakan fungsi g bijektif. Grafik dari g adalah sebagai berikut :



Cobalah untuk menjelaskan mengapa g merupakan fungsi *bijektif*?.

Teladan 2.12

Fungsi f seperti teladan 2.3 merupakan fungsi *bijektif.*

Definisi 2.6 Fungsi Identitas.[5]	Misalkan A himpunan sebarang, dan i fungsi identitas (*identity maping*) dari A ke A, yang didefinisikan $i(x) = x,\ \forall x \in A$. Untuk memudahkan penulisan, i_A berarti fungsi identitas di dalam A atau fungsi dari A ke A.

Teladan untuk fungsi identitas ini silakan ditunjukkan dan diidentifikasi sendiri sebagai latihan.

Definisi 2.7 Kesamaan fungsi	Dua fungsi $\alpha: A \to B$ dan $\beta: A \to B$ dikatakan sama jika $da(\alpha) = da(\beta)$ dan $\alpha(x) = \beta(x)$ untuk setiap x di dalam daerah asal persekutuan.[6]

[5] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 57.

[6] Durbin, J.R. *Modern Algebra*. John Wiley & Sons, Inc, 1979.

Teladan 2.13

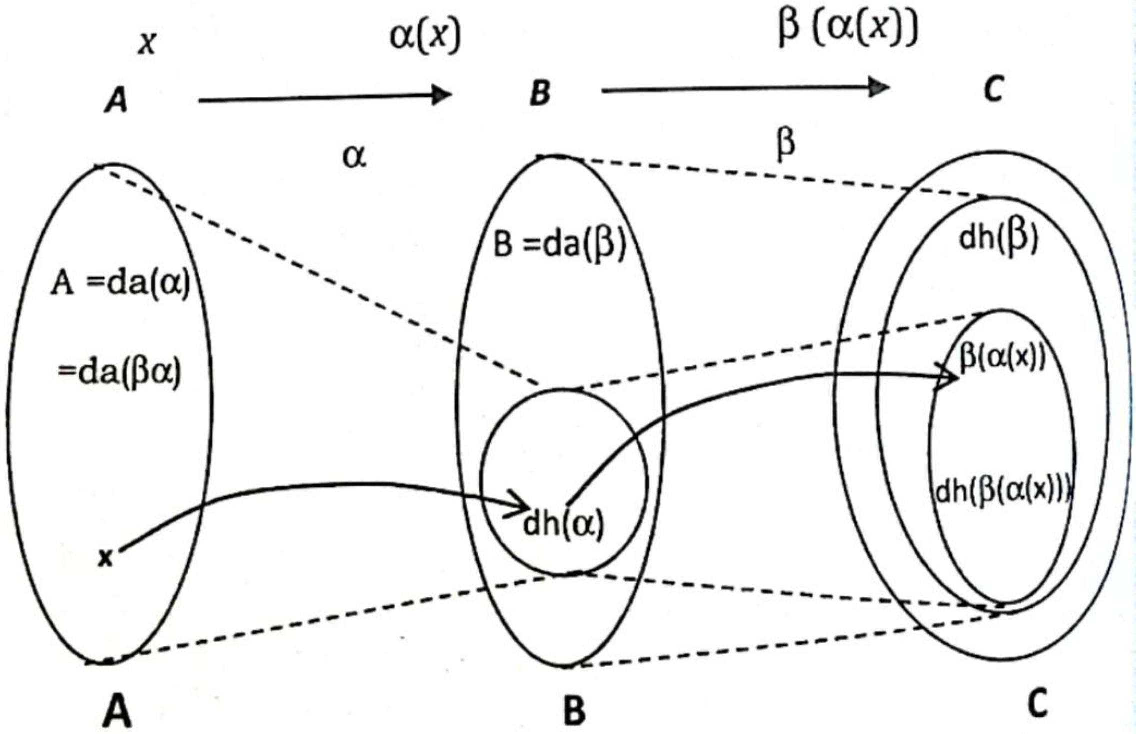
Jika $f: R \to R$ didefinisikan dengan $f(x) = (x+4)^2$ dan $g: R \to R$ didefinisikan dengan $g(x) = x^2 + 8x + 16$, maka $f = g$ sebab $da(f) = da(g) = R$ dan $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in R$ adalah

$$f(x) = (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16 = g(x).$$

Teladan 2.14

Jika $f: R \to R$ dengan $f(x) = 2x - 6$ dan $g: Z \to Z$ dengan $g(x) = 2(x-3)$, maka $f \neq g$ sebab $da(f) \neq da(g)$.

Ditentukan $\alpha : A \to B$ dan $\beta : B \to C$. Jika $x \in A$, maka bayangan x oleh α ditulis $\alpha(x)$ yang merupakan anggota B atau $\alpha(x) \in B$. Karena $\alpha(x) \in B$, maka bayangan $\alpha(x)$ oleh β ditulis $\beta(\alpha(x)$ yang merupakan anggota C ditulis $\beta(\alpha(x)) \in C$.



Urutan pemetaan α dilanjutkan oleh pemetaan β menurut cara seperti ditunjukkan dengan diagram di atas dapat dipandang sebagai suatu fungsi dari A ke C. Fungsi ini disebut komposisi fungsi α dan β, ditunjukkan dengan symbol $\beta^\circ \alpha: A \to C$.

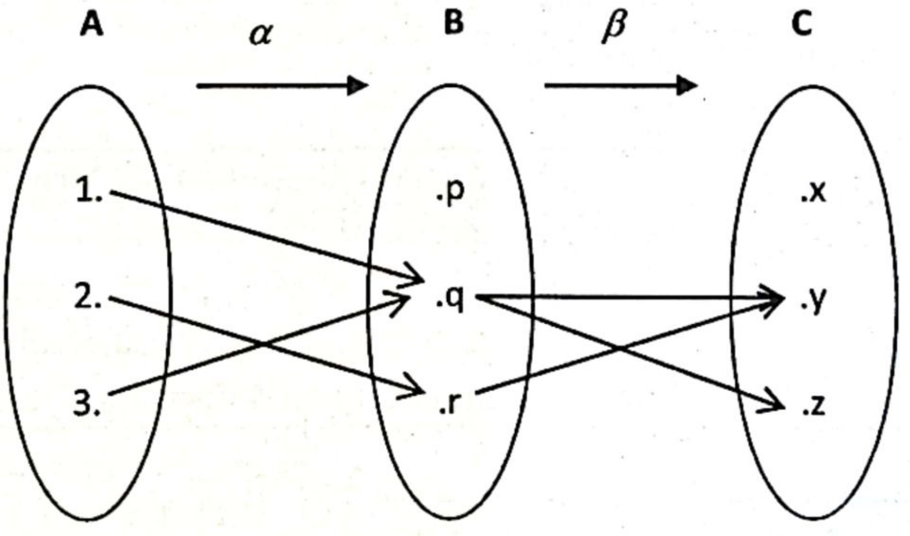
Definisi 2.8 Komposisi fungsi	Misalkan α dan β adalah suatu fungsi, dengan $\alpha: A \to B$ dan $\beta : B \to C$. Komposisi dari α dan β adalah pemetaan $\beta \circ \alpha: A \to C$ yang didefinisikan dengan: $(\beta \circ \alpha)(x) = \beta(\alpha(x)) \in C$ untuk setiap $x \in A$.[7]
Daerah asal dari $\beta \circ \alpha$ adalah A dan daerah hasilnya merupakan himpunan bagian C.	

Teladan 2.15

Ditentukan $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p, q, r\}$, dan $C = \{x, y, z\}$.
$\alpha: A \to B$ didefinisikan dengan $\alpha(1) = q$; $\alpha(2) = r$; $\alpha(3) = p$
$\beta: B \to C$ didefinisikan dengan
$\beta(p) = x$; $\beta(q) = z$; $dan\ \beta(r) = y$.

Pemetaan $\beta \circ \alpha$ dari A ke C dapat ditentukan sebagai berikut:
$(\beta \circ \alpha)(1) = \beta(\alpha(1)) = \beta(q) = z$
$(\beta \circ \alpha)(2) = \beta(\alpha(2)) = \beta(r) = y$
$(\beta \circ \alpha)(3) = \beta(\alpha(3)) = \beta(p) = x$

Diagram dari α, β dan $\beta \circ \alpha$ dapat dinyatakan sebagaimana berikut:



[7] Herstein, I. N. *Abstract Algebra, Third Edition,* Prentice Hall, 1995.

Teladan 2.16

Misalkan fungsi f dan g dari R ke R didefinisikan dengan $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = 3x^2 + 4$

Komposisi-komposisi fungsi $g^\circ f : R \rightarrow R$ dan $f^\circ g : R \rightarrow R$ adalah

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2 + 4) = 2(3x^2 + 4) - 3$$
$$= 6x^2 + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = 3(2x - 3)^2 + 4 =$$
$$3(4x^2 - 12x + 9) + 4 = 12x^2 - 36x + 31$$

Berdasarkan ilustrasi contoh di atas, terlihat bahwa hasil $g^\circ f \neq f^\circ g$. Hal ini berarti bahwa komposisi dua fungsi tidak memenuhi sifat komutatif.

Definisi 2.9	Misalkan A dan B suatu himpunan tak kosong. Himpunan A dan B dikatakan ekivalen jika dan hanya terdapat f : A →B fungsi korespondensi 1-1.[8]

Teladan 2.17

Himpunan Z dan $2Z$ adalah ekivalen karena terdapat pengaitan $f(n) = 2n$ untuk setiap $n \in Z$ yang mendefinisikan suatu fungsi korespondensi 1-1.

Definisi 2.10	Misalkan A suatu himpunan tak kosong. Himpunan A dikatakan hingga (*finite*), jika terdapat n bilangan bulat positif demikian sehingga A dan {1,2,3,.....,n} adalah ekivalen. Sedangkan himpunan A dikatakan tak hingga

[8] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 61.

	(*infinite*) jika A dan {1,2,3,.....n} tidak ekivalen untuk setiap n bilangan bulat positif.[9]

Teladan 2.18

Misalkan G himpunan semua bilangan bulat positif yang kurang dari 25. Maka G adalah suatu himpunan hingga.

Definisi 2.11	Misalkan A suatu himpunan tak kosong. Himpunan A dikatakan terbilang (*denumerable*) jika A ekivalen dengan himpunan bilangan bulat positif.
Definisi 2.12	Misalkan A suatu himpunan tak kosong. Himpunan A dikatakan terhitung (*countable*) jika A ekivalen dengan suatu himpunan bagian B dari himpunan bilangan bulat positif. Dalam hal lainnya A dikatakan tak terhitung (*uncountable*).[10]

Teladan 2.19

Misalkan Z himpunan semua bilangan bulat dan $2Z$ himpunan semua bilangan bulat kelipatan genap. Maka $2Z$ dikatakan terbilang, karena dapat dibuat fungsi bijektif dari Z ke $2Z$ yaitu $f(x) = 2x$.

C. SIFAT-SIFAT FUNGSI

Beberapa Teorema yang berkaitan dengan sifat-sifat dan komposisi fungsi adalah sebagai berikut:

---

[9] RMJTT Soehakso. *Pengantar Teori Group*. Cetakan IV. Yogyakarta: FIPA UGM Yogyakarta, 1979.

[10] *Ibid.*

Teorema 2.1	Jika $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$, dan $\gamma : C \to D$, maka berlaku $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$.[11]

Bukti:

Perhatikan bahwa $(\beta \circ \alpha)$ mempunyai daerah asal A, sehingga $\gamma \circ (\beta \circ \alpha)$ mempunyai daerah asal A juga.

Selanjutnya, jika $(\gamma \circ \beta) = \delta$ maka $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = (\delta \circ \alpha)$, karena $(\delta \circ \alpha)$ mempunyai daerah asal A, berarti $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ juga mempunyai daerah asal A, $\forall x \in A$.

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha)(x) = \big(\gamma \circ (\beta \circ \alpha)\big)(x) = \gamma(\beta\big(\alpha(x)\big))$$
.........(*)

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha(x) \;=\; (\gamma \circ \beta)\alpha(x) = \gamma(\beta\big(\alpha(x)\big))$$
...............(**)

Dari (*) dan (**) didapat karena x adalah sebarang elemen dari A, maka $\big((\gamma \circ \beta) \circ \alpha\big)(x) = (\gamma \circ (\beta \circ \alpha))(x)$ untuk semua $x \in A$. ■

Teorema 2.2	Diberikan $\alpha: A \to B$ dan $\beta: B \to C$. a. Jika α dan β adalah onto, maka β ∘ α adalah onto. b. Jika β ∘ α adalah onto, maka β adalah onto. c. Jika α dan β adalah 1 – 1, maka β ∘ α adalah 1 - 1. d. Jika β ∘ α adalah 1 – 1, maka α adalah 1 - 1.[12]

[11] Gatot Muhsetyo. *Pengantar Struktur Aljabar*. IKIP Malang, 1989.

[12] Herstein, I.N. *Abstract Algebra*. *Third Edition*. Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey 1995, hal. 12.

Bukti :

a. Misalkan α dan β adalah onto.

Untuk membuktikan bahwa $\beta \circ \alpha: A \to C$ adalah onto, sebagaimana definisi fungsi onto, maka dapat ditunjukkan bahwa $\forall z \in C$, $\exists x \in A$, sedemikian sehingga $(\beta \circ \alpha)(x)$. Berdasarkan yang diketahui, bahwa α dan β adalah onto. Karena β adalah onto, berarti untuk sebarang $z \in C$, terdapat $y \in B$ sehingga $\beta\,(y) = z$. Oleh karena α adalah onto, berarti untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$, sedemikian sehingga $y = \alpha(x)$. Berdasarkan $\beta\,(y) = \beta(\alpha(x)) = (\beta \circ \alpha)(x) = z$.

Dengan kata lain untuk sebarang $z \in C$, terdapat $x \in A$, sedemikian sehingga $(\beta \circ \alpha)(x) = z$. Ini berarti bahwa $\beta \circ \alpha$ fungsi onto. ■

b. Misalnya $\beta \circ \alpha$ adalah onto. Karena $\beta \circ \alpha : A \to C$ berarti untuk setiap $z \in C$, maka ada $x \in A$ sehingga $(\beta \circ \alpha)(x) = z$. Karena $(\beta \circ \alpha)(x) = \beta(\alpha(x))$, dan $\beta(\alpha(x)) = z$. dengan $\alpha(x) \in B$.

Oleh karena $\forall z \in C$, ada $\alpha(x) \in B$ sehingga $\beta(\alpha(x)) = z$. Ini berarti bahwa β adalah fungsi onto.

■

c. Diketahui α dan β adalah fungsi-fungsi 1–1.

Akan dibuktikan $\beta \circ \alpha$ juga fungsi 1-1. Misalkan $x_1, x_2 \in A$ dan $(\beta \circ \alpha)(x_1) = (\beta \circ \alpha)(x_2)$. Karena $(\beta \circ \alpha)(x_1) = \beta(\alpha(x_1)$ *dan* $(\beta \circ \alpha)(x_2) = \beta(\alpha(x_2))$, maka $(\beta \circ \alpha)(x_1) = (\beta \circ \alpha)(x_2)$ akan berakibat $\beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2))$. Karena β adalah 1 – 1, maka didapat $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$. Begitu pula karena α adalah fungsi 1 – 1 dan $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$, maka didapat $x_1 = x_2$. Oleh karena $(\beta \circ \alpha)(x_1) = (\beta \circ \alpha)(x_2)$ berakibat $x_1 = x_2$, ini berarti $\beta \circ \alpha$ adalah fungsi 1 – 1.

■

d. Diketahui $\beta \circ \alpha$ adalah fungsi 1 – 1

Misalkan $x_1, x_2 \in A$ dan $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$, maka didapat $\beta(\alpha(x_1) = \beta(\alpha(x_2))$, dan berdasarkan definisi diperoleh $(\beta \circ \alpha)(x_1) = (\beta \circ \alpha)(x_2)$.

Karena $\beta \circ \alpha$ adalah 1 – 1 dan $(\beta \circ \alpha)(x_1) = (\beta \circ \alpha)(x_2)$, maka $x_1 = x_2$.

Jadi, karena $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$, berakibat $x_1 = x_2$ ini berarti bahwa α merupakan fungsi 1 – 1.

■

Definisi 2.13 Fungsi invers.[13]	Suatu fungsi $\beta: B \to A$ adalah invers dari fungsi $\alpha: A \to B$, jika $\beta \circ \alpha = i_A \; dan \; \alpha \circ \beta = i_B$.
Suatu fungsi yang mempunyai invers disebut *invertible*. Jika α invers dari β ditulis $\alpha = \beta^{-1}$ atau sebaliknya $\beta = \alpha^{-1}$. Jadi α dan β dikatakan saling invers (*invertible*)	

Teladan 2.20

Misalkan f : Z → 2Z dengan $f(x) = 2x$, $\forall x \in$ Z, sedangkan g : 2Z →Z dengan $g(x) = \dfrac{x}{2}$, $\forall x \in$ 2Z. Maka $(g \text{ o } f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = x = i_Z$, $\forall x \in$ Z, ini berarti bahwa g merupakan invers kiri dari f.

Sedangkan $(f \text{ o } g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2\left(\dfrac{x}{2}\right) = x = i_{2Z}$, $\forall x \in$ 2Z.

Hal ini menunjukkan bahwa g invers kanan dari f. Selanjutnya karena g o f = i_Z, dan f o g = i_{2Z}, maka dapat dikatakan bahwa g saling invers (*invertible*) dengan f.

---

[13] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 57.

Teorema 2.3	Suatu fungsi adalah *invertibel* jika dan hanya jika fungsi 1 – 1 dan onto (*bijektif*).[14]

Bukti:

(→) Misalnya $\alpha: A \rightarrow B$ adalah invertibel dengan invers β, maka $\beta \circ \alpha$ merupakan fungsi identitas pada A yang merupakan fungsi 1-1.

$\beta \circ \alpha$ adalah fungsi 1-1, berdasarkan teorema 1.2d diperoleh α adalah fungsi 1 – 1. Selanjutnya, karena $\beta \circ \alpha$ adalah fungsi identitas pada B, maka $\beta \circ \alpha$ merupakan fungsi onto, sehingga berdasarkan teorema 1.2 (d) berarti α haruslah onto. Jadi, jika $\alpha: A \rightarrow B$ adalah invertibel, maka α adalah fungsi 1– 1 dan onto (bijektif).

(←) Misalnya $\alpha: A \rightarrow B$ adalah 1 –1 dan onto. Harus ditunjukkan bahwa α adalah *invertible*.

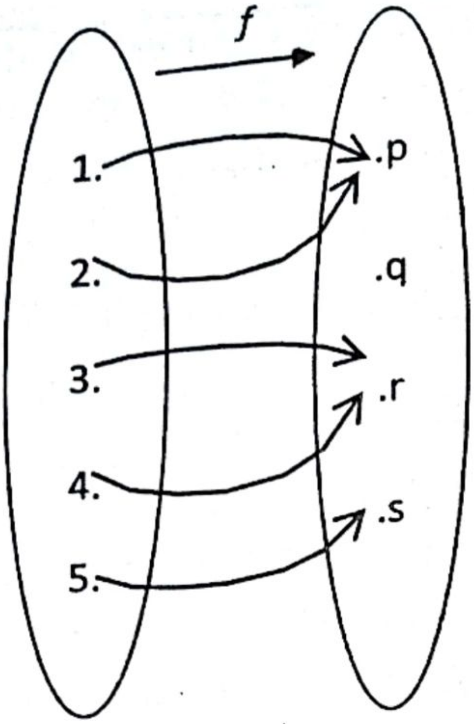
Ambil sebarang $b \in B$ karena α adalah onto, maka ada $a \in A$ sedemikian sehingga $\alpha(a) = b$. Karena α juga merupakan fungsi 1 – 1, maka $a \in A$ haruslah tunggal, sehingga dapat ditentukan $\beta(b) = a$ yang selalu dapat dilakukan karena α adalah 1 – 1 dan onto dan $\alpha(a) = b$, untuk a yang tunggal. Jadi, terdapat fungsi $\beta: B \rightarrow A$. karena $(\beta \circ \alpha)(a) = \beta(\alpha(a)) = \beta(b) = a$ dan $(\alpha \circ \beta)(b) = \alpha(\beta(b)) = \alpha(a) = b$, maka jelas bahwa $\beta \circ \alpha = i_A$ dan $\alpha \circ \beta = i_B$ atau β adalah invers dari α. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa α adalah invertibel. ■

Teladan 2.21

Sekarang, cobalah perhatikan pemetaan $f: A \rightarrow B$ yang didefinisikan seperti diagram panah berikut.

---

[14] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*. Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey 1995, hal. 12.



$f(1) = p$

$f(2) = p$

$f(3) = r$

$f(4) = r$

$f(5) = s$

Misalkan $X = \{1, 2, 4\} \subset A\ dan\ Y = \{2, 3, 5\} \subset A$, berdasarkan diagram panah diatas didapat: $f(X) = \{p, r\} \subset \{p, r, s\} = f(A)$

Hal ini menggambarkan bahwa jika $X \subset A\ dan\ Y \subset A$ maka akan berakibat $f(X) \subset f(A) dan\ f(Y) \subset f(A)$.

Perlu diperhatikan bahwa:	$f(X)$ adalah ekpresi dari renge fungsi f dengan domain X $f(A)$ adalah ekpresi dari renge fungsi f dengan domain A $f(Y)$ adalah ekpresi dari renge fungsi f dengan domain Y
Berarti jika $y \in f(A)$, maka ada $x \in A$, sedemikian sehingga $f(x) = y$	

Teorema 2.4	Misalkan diberikan pemetaan $f: A \rightarrow B$. Jika $X \subset A$maka $f(X) \subset f(A)$.[15]
	dibaca: renge fungsi dengan domain X subset renge fungsi dengan domain A.

Bukti:

Misalkan $y \in f(X)$ berarti ada $x \in X$ sedemikian sehingga $y = f(x)$. Karena $X \subset A$, berarti jika $x \in X$ maka $x \in A$. karena $x \in A$ sedemikian sehingga $f(x) = y$ ini berarti $f(x) = y \in f(A)$. Karena $y \in f(X)$ berakibat $y \in f(A)$, ini berarti $f(X) \subset f(A)$.

■

Teorema 2.5	Buktikan bahwa $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
	dibaca: renge fungsi dengan domain $A \cup B$ sama dengan renge fungsi dengan domain A digabung dengan renge fungsi dengan domain B.

Bukti:

Ambil sebarang $y \in f(A \cup B)$, maka ada $x \in (A \cup B)$. Sehingga $y = f(x)$.

Karena $x \in (A \cup B)$, maka $x \in A$ *atau* $x \in B$

Jika $x \in A$, maka $f(x) \in f(A)$ atau

Jika $x \in B$, maka $f(x) \in f(B)$

Jadi $f(x) \in f(A) \cup f(B)$ atau $y \in f(A) \cup f(B)$

$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ .....(*)

[15] Gatot Muhsetyo. *Pengantar Struktur Aljabar*. IKIP Malang, 1989, hal. 21.

Selanjutnya, karena $A \subset A \cup B$ dan $B \subset A \cup B$, berdasarkan teorema 1.4 diperoleh $f(A) \subset f(A \cup B)$ dan $f(B) \subset f(A \cup B)$.

Berarti $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ .....(**)

Berdasarkan (*) dan (**) diperoleh $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

■

Teorema 2.6	Buktikan bahwa $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
	dibaca: renge fungsi dengan domain $A \cap B$ sama dengan renge fungsi dengan domain A diiriskan dengan renge fungsi dengan domain *B*.

Bukti:

Ambil sebarang $y \in f(A \cap B)$, maka ada $x \in (A \cap B)$. Sehingga $y = f(x)$.

Karena $x \in (A \cap B)$, maka $x \in A$ dan $x \in B$

Jika $x \in A$, maka $f(x) \in f(A)$, dan

Jika $x \in B$, maka $f(x) \in f(B)$

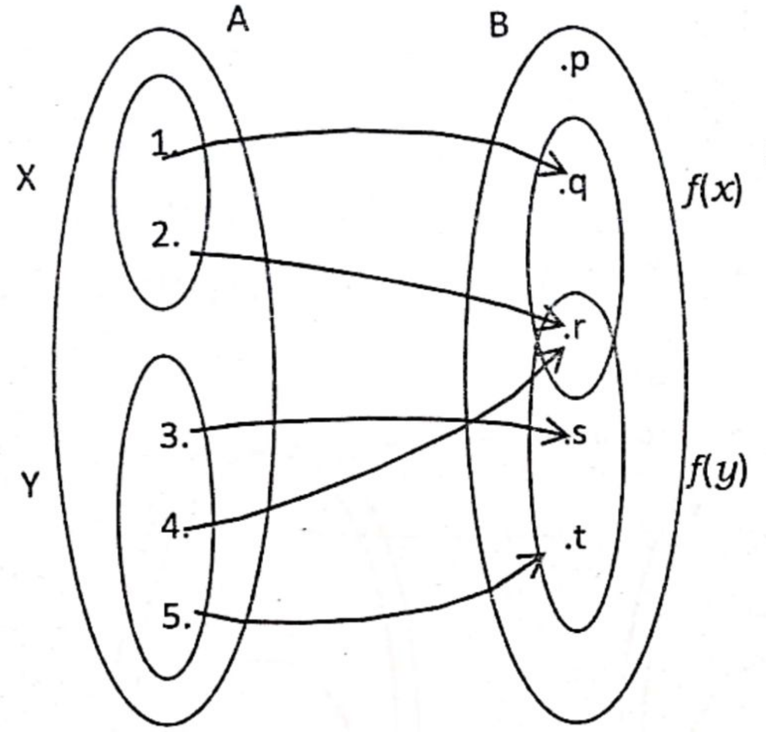
Jadi $f(x) \in f(A) \cap f(B)$ atau $y \in f(A) \cap f(B)$

$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

■

Perlu diperhatikan bahwa tanda $\subset$ (himpunan bagian) tidak dapat begitu saja diganti dengan tanda = (sama dengan).

Sebagai ilustrasi, misalkan $f: A \to B$ dengan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{p, q, r, s, t\}$ yang didefinisikan seperti diagram berikut.:



$X = \{1,2\}$, maka $f(x) = \{q,r\}$

$Y = \{3,4,5\}$, maka $f(y) = \{r,s,t\}$

Dimana $X \cap Y = \varnothing$, maka $f(X \cap Y) = \varnothing$, akan tetapi

$f(x) \cap f(y) = \{r\} \neq \emptyset$

$f(x) \cap f(y) = \{r\}$ dan $f(X \cap Y) = \varnothing$, jelas bahwa $f(X \cap Y) \neq f(x) \cap f(y)$

Teorema 2.7	Ditentukan bahwa pemetaan $f: A \to B$, $X \subset B$ *dan* $Y \subset B$. jika $X \subset Y$, maka $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$.[16]

Bukti:

Misalkan $f^{-1}(X)$ adalah renge fungsi f^{1} dengan domain X, yang diekspresikan sebagai : $f^{-1}(X) = \{m \in A: f(m) \in X\}$. Misalkan diambil sembarang $m \in f^{-1}(X)$, maka $f(m) \in X$.

[16] Gatot Muhsetyo. *Pengantar Struktur Aljabar*. IKIP Malang, 1989, hal. 24.

Karena $X \subset Y$ maka $f(m) \in Y$. sehingga diperoleh bahwa $m \in f^{-1}(Y)$.

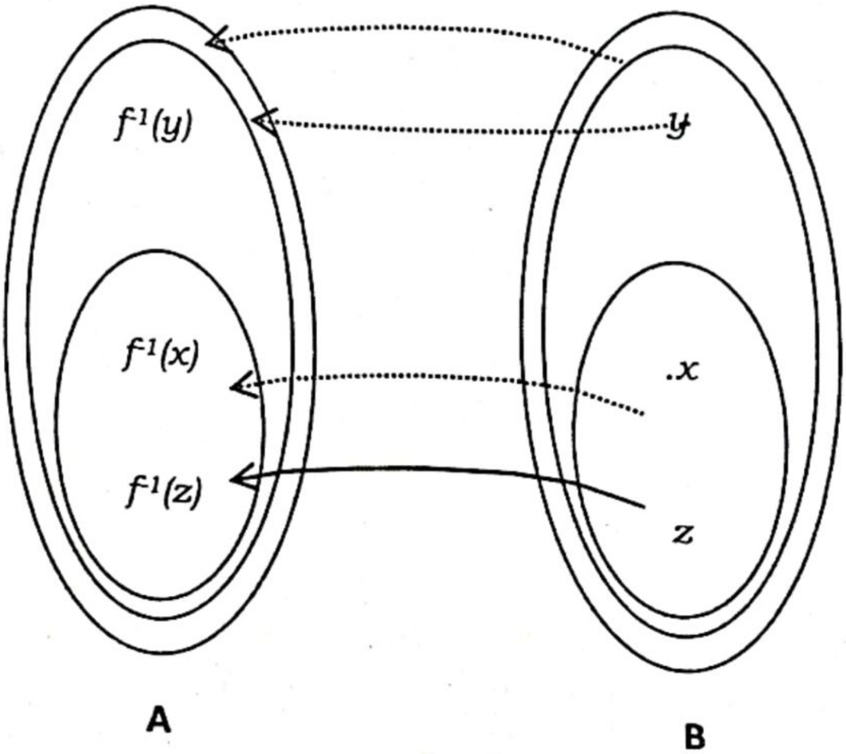
Karena $m \in f^{-1}(X)$ berakibat $m \in f^{-1}(Y)$ berarti

$$f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$$

Jadi, $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$.

■

Ilustrasi Teorema 2.7 dapat dilihat seperti diagram panah berikut:



Teorema 2.8	Jika $f: A \to B,\ X \subset B\ dan\, Y\ \subset B$. Maka $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{1-}(Y)$.[17]

Bukti:

$f^{-1}(X) = \{x \in A : f(x) \in X\}$ dan $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$

$f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in X\ atau\ x \in A : f(x) \in Y\} = \{x \in A : f(x) \in X \cup Y\} = f^{-1}(X \cup Y)$. ■

Teorema 2.9	Jika $f: A \to B,\ X \subset B\ dan\, Y\ \subset B$. Maka $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{1-}(Y)$.[18]

Bukti:

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(X \cap Y) & \\
&= \{x \in A: f(x) \in X \cap Y\} \\
&= \{x \in A: f(x) \in X\ dan\ f(x) \in Y\} \\
&= \{x \in A: f(x) \in X\} \cap \{x \in A: f(x) \in Y\} \\
&= f^{-1}(X) \cap f^{1-}(Y) \quad ■
\end{aligned}
$$

Teorema 2.10	Jika $f: A \to B, dan\ X \subset B$. Maka $f^{-1}(X^c) = (f^{-1}(X))^c$.[19]

Bukti:

Misalkan $f^{-1}(X) = \{x \in A: f(x) \in X\}$ berarti

---

[17] Gatot Muhsetyo. *Pengantar Struktur Aljabar*. IKIP Malang, 1989, hal. 25.

[18] *Ibid.,* hal. 26.

[19] *Ibid.,* hal. 28.

$(f^{-1}(X))^c = \{x \in A: f(x) \notin X\} = \{x \in A: f(x) \in X^c\} = f^{-1}(X^c)$. ■

D. FUNGSI KHUSUS

Selanjutnya, ada beberapa macam fungsi bercirikan khas yang patut pula diketahui, seperti fungsi barisan, fungsi restriksi, fungsi proyeksi dan fungsi karakteristik.

1. Fungsi Barisan

Istilah barisan sudah dikenal dalam aljabar dan dalam kalkulus. Pada dasarnya barisan merupakan pemetaan dari himpunan bilangan asli atau himpunan bagiannya ke sebarang himpunan.

Beberapa barisan yang kita kenal adalah barisan hitung (tambah/aritmatika), barisan kali (ukur/geometri), barisan harmonis dan barisan-barisan khas yang lain. Bayangan dari fungsi barisan disebut dengan harga-harga fungsi. Sebagai contoh barisan hitung tak hingga berikut:

Teladan 2.22

Misalkan fungsi $f: N \to Z$ yang dirumuskan sebagai $f(x) = 4x - 3$. Maka dapat diperiksa melalui ilustrasi tabel berikut.

x	1	2	3	4	5	....	*n*
f(x)	1	5	9	13	17	...	4*n*-3

Nilai atau harga fungsi untuk *f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 9,* dan seterusnya, disebut dengan suku-suku barisan. Secara umum suku-suku barisan dapat dinyatakan dengan : $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots S_n$

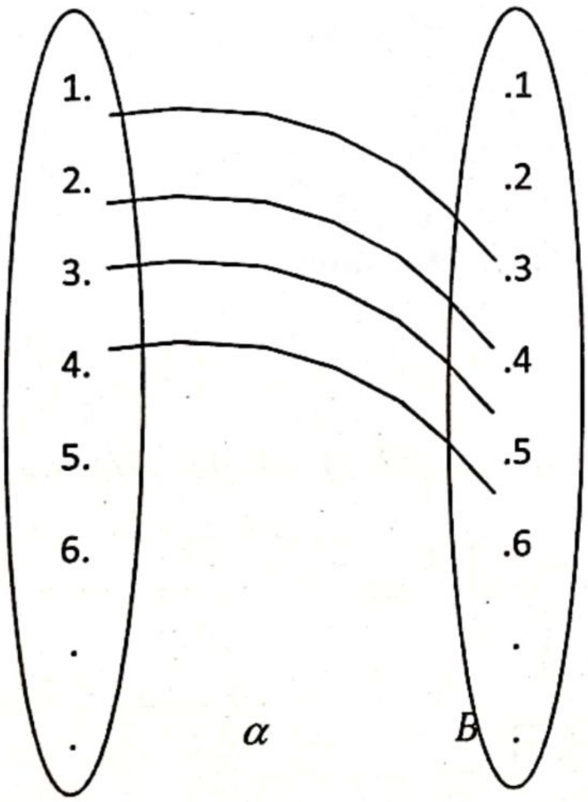
2. Fungsi Restriksi

Fungsi restriksi (pembatas) pada dasarnya merupakan suatu fungsi yang merupakan "bagian" dari fungsi lain.

Jika $\alpha : X \rightarrow Y$ dan $\beta : X_1 \rightarrow Y$ dengan $X_1 \subset X$, maka β disebut restriksi α pada X_1, ditulis $\beta = \alpha | X_1$. ini berarti bahwa untuk sebarang $x \in X_1$, berlaku $\alpha(x) = \beta(x)$. Dalam hal β merupakan restriksi dari α, dan α disebut dengan ekstensi (perluasan) dari β terhadap X.

Teladan 2.23

Jika pemetaan $\alpha : A \rightarrow A$ dengan A adalah himpunan bilangan asli, jika $n \in A$, maka $\alpha(n) = n + 2$. Diagram α adalah:



Ambil A_1 = himpunan bilangan asli ganjil. Suatu fungsi β dari A_1 ke A yang didefinisikan dengan $\beta(n) = n + 2$ adalah merupakan pembatasan dari α pada A_1 atau $\beta = \alpha \mid A_1$.

Teladan 2.24

$f : R \rightarrow R$ dengan $f(x) = x^2$ dan $g : R^+ \rightarrow R$ dengan $g(x) =$ berarti fungsi g adalah merupakan pembatasan dari f pada atau $g = f \,|\, R^+$

3. Fungsi Proyeksi

Suatu fungsi proyeksi memetakan pasangan elem dengan elemen yang tidak berpasangan. Fungsi proyeksi ke memetakan $(x, y) \in A \times B$ ke $x \in A$, sedangkan fungsi proyeksi k 2 memetakan $(x, y) \in A \times B$ ke $y \in B$. Tentunya, jika terdap perkalian kartesian n buah himpunan, maka dapat dibent fungsi-fungsi proyeksi ke-i dengan $i \leq n$. sifat dari fungsi proyel adalah onto tetapi bukan bijektif.

Hal diatas dapat diketahui karena fungsi proyeksi ke akan memetakan (x, y_1), (x, y_2) dan (x, y_3) ke x. sebagai ilustr dapat dipelajari teladan berikut.

Teladan 2.25

Misal suatu fungsi $f : R \times R \rightarrow R$ yang memetakan (x, y) ke x. berarti bahwa:

$$f(2, 0) = 2,\ f(2, 2) = 2,\ f(2, 3) = 2,\ f(2, 3\tfrac{1}{2}) = 2$$

$$f(3, \tfrac{1}{2}) = 3,\ f(3, 4) = 3,\ f(3, 5) = 3,\ f(3, 5\tfrac{2}{3}) = 3$$

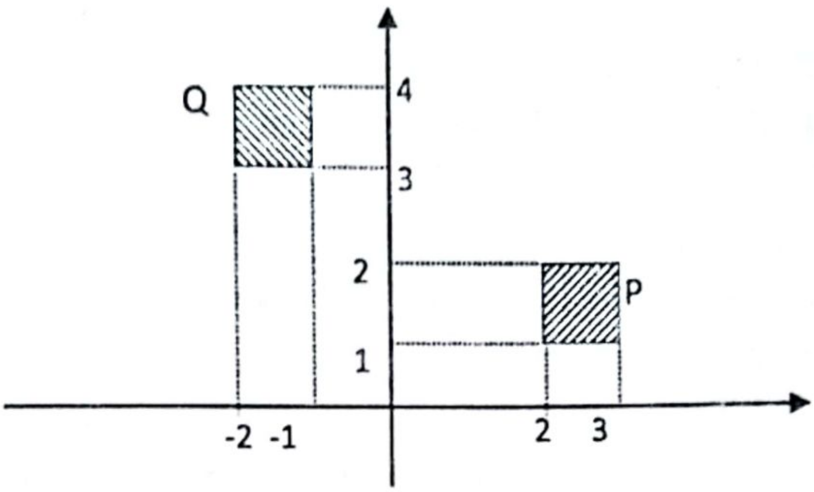
Sekarang, jika diambil:

$$P = [2, 3] \times [1, 2]$$

$$Q = [-2, -1] \times [3, 4]$$

Maka dapat ditentukan bahwa:

$f(P) = [2, 3]$ dan $f(Q) = [-2, -1]$



4. Fungsi Karakteristik

Fungsi karakteristik memisahkan bayangannya secara *dikotomi* atau *trikotomi* bahkan lebih dari elemen-elemen daerah asal. Jika ditentukan $X \subset A$ dan $f: A \rightarrow B$ dengan $B = \{0, 1\}$, maka f merupakan fungsi karakteristik bila:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & jika\ x \notin X \\ 1, & jika\ x \in X \end{cases}$$

Karena fungsi karakteristik ini memisahkan elemen-elemen di dalam dan di luar X, maka dinyatakan sebagai fungsi karakteristik dari himpunan X di dalam A, ditulis dengan f_X.

Teladan 2.26

Misalkan $g: R \rightarrow R$ yang didefinisikan sebagaiman berikut.

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & jika\ 6 \leq x \leq 10 \\ x^2, & jika - 2 \leq x < 6 \\ 3 - x, & jika - 10 \leq x \leq -2 \end{cases}$$

Fungsi g di atas, juga merupakan fungsi karakteristik. Silakan anda sket salah fungsi g tersebut ke dalam diagram kartisius!

SOAL-SOAL UNTUK LATIHAN

1. Daftarlah semua fungsi berikut:
   a. dari $\{x, y\}$ ke $\{1, 2\}$
   b. dari $\{x, y, z\}$ ke $\{1, 2\}$
   c. dari $\{x, y\}$ ke $\{1, 2, 3\}$
2. Misalkan $S = \{1, 2, 3\}$ dan $T = \{a, b, c\}$.
   a. Ada berapa macam pemetaan yang dapat dibuat dari S ke T ?
   b. Ada berapa macam pemetaan onto atau surjektif yang dapat dibuat dari S ke T ?
   c. Ada berapa macam pemetaan $1 - 1$ atau injektif yang dapat dibuat dari S ke T ?
3. Ditentukan $A = \{p, q, r, s\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$
   $\alpha : A \rightarrow B$ dan $\beta : A \rightarrow B$ didefinisikan dengan $\alpha(p) = b$, $\alpha(q) = d$, $\alpha(r) = a$, $\alpha(s) = c$, *dan* $\beta(p) = d$, $\beta(q) = b$, $\beta(r) = c$, $\beta(s) = a$. periksalah:

   (a) apakah α fungsi – 1
   (b) apakah β fungsi $1 - 1$
   (c) apakah α fungsi onto
   (d) apakah β fungsi onto
   (e) tentukan $\alpha(X)$, $\beta(Y)$, $\alpha(X \cap Y)$, dan $\beta(X \cup Y)$ jika diketahui $X = \{p, r\}$ dan $Y = \{q, r, s\}$.
4. Misalkan f, g dan h adalah fungsi-fungsi dari B ke B, dimana B adalah himpunan bilangan bulat, didefinisikan sebagai $f(x) = 2x$, $g(x) = x + 1$, dan $h(x) = x^3$, $\forall x \in B$.
   (a) Manakah dari f, g, dan h yang merupakan fungsi onto ?
   (b) Manakah yang merupakan fungsi $1 - 1$?
   (c) Tentukan $f(1)$, $g(A)$ dan $h(A)$ jika A adalah himpunan bilangan asli.
5. Misalkan f, g dan h adalah fungsi-fungsi dari R ke R yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x - 1$, dan $h(x) = 3x$.

Carilah formula untuk masing-masing komposisi berikut:

(a) $f \circ f$	(d) $g \circ f$	(g) $h \circ f$
(b) $f \circ g$	(e) $g \circ g$	(h) $h \circ g$
(c) $f \circ h$	(f) $g \circ h$	(i) $h \circ h$

6. Carilah *invers* dari fungsi *R* ke *R* berikut:
   (a) $f(x) = 2x + 3$
   (b) $i(x) = \dfrac{2x-1}{3+4x}$
   (c) $g(x) = 6 - 4x$
   (d) $j(x) = 2x^3$
   (e) $h(x) = \dfrac{x+1}{x-4}$

7. Suatu fungsi $f: R \rightarrow R$ adalah onto jika dan hanya jika setiap garis mendatar (sejajar dengan sumbu x) memotong grafik f paling sedikit satu kali.
   (a) Cobalah nyatakan serupa untuk $f: R \rightarrow R$ yang 1 – 1
   (b) Cobalah nyatakan serupa untuk $f: R \rightarrow R$ yang 1 – 1 dan onto

8. Masing-masing α berikut ini mendefinisikan suatu fungsi dari *R* ke *R*. Tunjukkan fungsi α yang onto dan yang 1 – 1.

(a) $\alpha(x) = 3x - 2$	(d) $\alpha(x) = -2x^2 + 8$
(b) $\alpha(x) = 2x^3$	(e) $\alpha(x) = \sin x$
(c) $\alpha(x) = 2e^x + 1$	(f) $\alpha(x) = 2^x$

9. Diketahui B = himpunan bilangan bulat, dan $f: B \rightarrow B$, yang didefinisikan dengan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \textit{jika } x \textit{ Ganjil} \\ \frac{x}{2}, \textit{jika } x \textit{ Genap} \end{cases}$$

   (a) Apakah f merupakan fungsi injektif ? Mengapa ?
   (b) Apakah f merupakan fungsi surjektif ? Mengapa ?

10. Berilah suatu contoh fungsi 1 – 1 yang bukan onto dari suatu himpunan ke dirinya sendiri.
11. Berilah suatu contoh fungsi onto yang bukan 1 –1 dari suatu Himpunan ke dirinya sendiri.

Tujuan Umum Perkuliahan (TUP)

Setelah selesai perkuliahan mahasiswa diharapkan dapat memahami konsep operasi biner, jenis-jenis operasi biner serta sifat-sifatnya pada suatu himpunan.

Tujuan Khusus Perkuliahan (TKP)

Setelah selesai perkuliahan mahasiswa diharapkan mampu:

a) Menentukan operasi biner jika diberikan suatu operasi pada himpunan tertentu;
b) Terampil melakukan operasi biner pada elemen-elemen suatu himpunan;
c) Mengidentifikasi apakah suatu operasi biner pada suatu himpunan bersifat asosiatif, komutatif, memiliki elemen identitas, adanya invers untuk setiap elemen himpunan.
d) Menentukan invers suatu elemen dan elemen identitas-nya jika didefinisikan suatu operasi biner pada suatu himpunan.

BAB III
OPERASI BINER

Secara umum yang dimaksud dengan operasi biner adalah operasi yang ada pada setiap kali operasi itu dijalankan hanya ada dua unsur yang dapat diselesaikan. Jika ada tiga unsur, dua unsur dikerjakan lebih dahulu sedangkan satu unsur dikerjakan kemudian. Jadi dalam operasi biner tidak dapat mengerjakan tiga unsur sekaligus. Disamping itu pula operasi biner mencakup sifat ketertutupan.

Jika suatu bilangan bulat ditambahkan dengan bilangan bulat yang lain maka juga akan memberikan hasil suatu bilangan bulat yang unik (tunggal). Berdasarkan pernyataan diatas dengan operasi penjumlahan menunjukkan adanya hubungan bahwa setiap pasangan $(a,b) \in ZxZ$ dimana $a,b \in Z$ akan menghasilkan $a+b \in Z$ yang unik/tunggal. Jadi operasi + pada himpunan Z merupakan suatu fungsi dari $Z \times Z$ ke Z dengan ekspresi matematis dapat ditulis $+ :(a,b) \rightarrow a + b$.

A. PENGERTIAN OPERASI BINER

Berdasarkan ide operasi penambahan pada himpunan Z diatas (juga berlaku pada operasi pengurangan dan perkalian). Hal tersebut dapat diabstraksikan secara formal melalui definisi operasi pada suatu himpunan dengan operasi biner berikut ini.

Definisi 3.1	Operasi Biner $*$ pada suatu himpunan S adalah suatu fungsi dari SxS ke S, yang memetakan setiap $(a,b) \in SxS$ ke suatu $a*b \in S$ yang unik/ tunggal. Karena $a * b \in S$ berarti S tertutup dibawah operasi $*$.[1]
Secara simbolis	$* : (a,b) \rightarrow a * b.$

Teladan 3.1

Operasi perjumlahan dan perkalian pada himpunan bilangan asli adalah merupakan operasi biner. Sebab jika $a, b \in N$ maka $a + b \in N$. bergitu juga $ab \in N$. Sedangkan operasi pengurangan dan pembagian pada N bukan merupakan operasi biner Mengapa? Sebab jika $2, 3 \in N$ akan tetapi $2 - 3 = -1 \notin N$

Teladan 3.2

Perkalian pada $Z^+ : (m,n) \rightarrow mn$ merupakan operasi biner Artinya bahwa perkalian dua bilangan bulat positif menghasilkan bilangan bulat positif, yang berarti bahwa operasi perkalian bersifat tertutup pada Z^+.

Demikian juga berlaku pada Z, Q, R dan C. Akan tetapi operasi pembagian pada Z bukanlah operasi biner sebab $1, 2 \in Z$ akan tetapi $\frac{1}{2} \notin Z$.

---

[1] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 89.

Teladan 3.3

Operasi perpangkatan pada Z^+ yaitu fungsi $(m,n) \rightarrow m^n$ adalah operasi biner.

Teladan 3.4

Misalkan A = { 2, 4, 6, 8, ...} yaitu himpunan bilangan asli genap dan dipasang operasi +, yaitu operasi penjumlahan seperti yang telah kita kenal. Maka + merupakan operasi biner pada A, sebab jumlah setiap bilangan asli genap selalu merupakan bilangan asli genap. Artinya operasi dua anggota A akan mengahsilkan unsur dalam A juga.

Teladan 3.5

Misalkan $M(R)$ adalah himpunan semua matriks-matriks dengan entry-entry bilangan real. Operasi + (katakan operasi penjumlahan sehari-hari) pada $M(R)$ bukanlah operasi biner, sebab ada matriks $A, B \in M(R)$ sehingga $A + B$ tidak terdefinisi, yaitu matriks A dan B berordo tidak sama.

Tetapi jika + pada $M_n(R)$ yaitu himpunan semua matriks-matriks dengan entri-entri bilangan real ordo *nxn* maka + adalah operasi biner. Karena matriks dengan ordo nxn jika dikalikan dengan matriks nxn juga akan mengahsilkan matriks baru berordo *nxn*.

Teladan 3.6

Operasi + pada R-{0} bukan operasi biner, sebab untuk 2,-2 $\in R - \{0\}$ tetapi $2 + (-2) = 0$ bukan anggota dari $R - \{0\}$ artinya tidak tertutup dibawah operasi +.

Teladan 3.7

Misalkan F adalah himpunan fungsi-fungsi dengan domain himunan bilangan-bilangan real R. operasi + dan $\cdot$ pada F didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $f, g \in F$ dan x anggota domain berlaku.

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$$

Kedua fungsi $f + g$ dan fg merupakan fungsi-fungsi dengan domain R yang unik, sehingga F tertutup dibawah operasi + dan · .

Contoh-contoh diatas adalah operasi penjumlahan dan pengurangan yang dipakai sehari-hari. Dibawah ini akan disajikan beberapa contoh operasi biner $*$ dengan definisi yang diberikan.

Teladan 3.8

Misalkan S adalah himpunan tak kosong, M(S) himpunan semua pemetaan-pemetaan dari S ke S. Jika α, $\beta \in$ M(S), maka $\beta \circ \alpha \in$ M(S) dan komposisi ini *unik*, sehingga o adalah operasi biner pada M(S).

Teladan 3.9

Didefinisikan operasi $*$ sebagai $x * y = x + y + 1$, $\forall x, y \in R$ maka $*$ adalah operasi biner pada R.

Dapat diperiksa, melalui pemisalan dua bilangan reil (kita pilih 0,23 dan 0,5). Berdasarkan definisi operasi * di atas, diperoleh 0,23 * 0,5 = 0,23 + 0,5 +1 = 0,73 + 1 = 1,73 dimana 1,73 juga elemen bilangan reil.

Untuk menunjukkan apakah operasi * merupakan operasi biner pada R dapat dilakukan uji coba untuk memeriksa keumumannya.

Teladan 3.10

Misalkan $S = \{a,b,c\}$ dengan operasi $*$ didefinisikan sebagai:

$x * y = x$, $\forall x, y \in S$, maka $*$ merupakan operasi biner.

Karena S hingga maka operasi ini dapat dilihat pada tabel 3.1 yang dikenal dengan sebutan tabel Cayley berikut ini:

*	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

Tabel 3.1

cara membaca tabel diatas adalah diawali dari kiri ke kanan, misalnya $a * a = a;\ b * a = b;\ c * b = c$,......... dst

Unsur-unsur yang ada dalam tabel secara keseluruhan adalah unsur-unsur dari S dan ini menunjukkan bahwa S bersifat tertutup dibawah operasi $*$.

Teladan 3.11

Perhatikan C = { a, b, c, d, e } dan operasi o pada C didefinisikan seperti pada tabel 3.2 berikut ini:

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

Tabel 3.2

Cara membaca tabel 3.2, point d yang dilingkari adalah hasil dari $b * c$ dan ditulis $b * c = d$. Selanjutnya dapat diperiksa bahwa $c * e = b$, $d * b = e$. $a * d = d$ dan sebagainya. Adapun dapat memeriksanya bahwa setiap $x, y \in C$ maka $(x * y) \in C$ pula. ini berarti operasi * pada C adalah suatu operasi biner. Sering kali operasi biner * pada S dinyatakan sebagai Himpunan S tertutup terhadap operasi *.

Silakan diperiksa!	1. Himpunan bilangan asli genap tertutup terhadap penjumlahan 2. Himpunan bilangan asli ganjil tidak tertutup terhadap pengurangan 3. S = {0, 1, 2, 3, 4} tidak tertutup baik terhadap pengurangan maupun terhadap penjumlahan. 4. C = {a, b, c, d, e} dengan operasi * yang didefinisikan seperti pada tabel 2.2 tertutup terhadap operasi *.

B. SIFAT-SIFAT OPERASI BINER

Sifat-sifat yang mungkin dipenuhi oleh suatu operasi biner * pada himpunan S disajikan pada definisi berikut:

Definisi 3.2	Suatu operasi biner * pada suatu himpunan S dikatakan komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in S$ maka $x * y = y * x$.
Secara simbolis	Operasi biner * pada S, komutatif $\Leftrightarrow \forall\, x, y \in S, \Rightarrow x * y = y * x$

Teladan 3.12

Apabila Q^+ adalah himpunan bilangan rasional positif maka perjumlahan dan perkalian masing-masing merupakan operasi-operasi biner komutatif pada Q^+. Tetapi pembagian pada Q^+ bukan merupakan operasi biner yang komutatif. Periksalah pernyataan-pernyataan kebenaran tersebut?

Catatan:	Perhatikan kembali teladan 3.11 di atas, yaitu operasi biner * pada S = { *a, b, c, d, e* ... } yang didefinisikan menurut tabel 3.2 operasi biner * pada S merupakan operasi biner yang komutatif. Periksalah bahwa $a * b = b * a = b$, $d * e = e * d = c$, $b * d = d * b = e$, dan sebagainya. Untuk memeriksa dengan cepat bahwa operasi biner * pada S tabel 3.2 bersifat komutatif
	Urutan elemen-elemen pada baris dan kolom yang bersesuaian sama. Perhatikan tabel 3.2, misalnya urutan elemen-elemen pada kolom kedua yaitu *b, c, d, e, a* dan urutan elemen-elemen pada baris kedua pun *b, c, d, e, a*, pula. Coba periksa urutan elemen-elemen pada kolom pertama dan baris pertama, kolom ketiga dan baris ketiga, kolom keempat dan baris keempat, kolom kelima dan baris kelima. Semua urut elemen-elemen sepasang-sepasang sama.
	Pada tabel 3.2 ditarik garis putus-putus condong kekiri yaitu diagonal pertama tabel tersebut. Perhatikan bahwa tabel tersebut simetris terhadap diagonal utama. Jika suatu tabel operasi ternyata elemen-elemennya simetris terhadap diagonal utama maka operasi itu bersifat komutatif.

Teladan 3.13

P adalah himpunan semua matriks bujur sangkar berododo 2. Apakah perkalian matriks pada P merupakan operasi yang komutatif? Tentu tidak memenuhi sifat komutatif. Misalnya ambil sebarang dua matrik dengan ordo 2x2 sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -9 & -17 \end{pmatrix}$$

Berarti

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Jadi perkalian matriks pada P tidak bersifat komutatif.

Definisi 3.3	Suatu operasi biner * pada suatu himpunan S bersifat asosiatif jika dan hanya jika untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$.
Secara simbolis	Operasi biner * pada S bersifat asosiatif $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in S, \quad (x * y) * z = x * (y * x)$.

Teladan 3.14

Pada himpunan bilangan asli, baik perkalian maupun penjumlahan bersifat asosiatif. Periksalah kebenarannya!

Teladan 3.15

Perhatikan kembali tabel 3.2 pada teladan 3.11

$(b * c) * d = d * d = b$ dan $b * (c * d) = b * a = b$
Jadi $(b * c) * d = b * (c * d)$, begitu pula untuk
$(d * e) * d = c * d = a$ dan $d * (e * d) = d * c = a$
jadi $(d * e) * c = d * (e * d)$ dan seterusnya periksalah sendiri.

Sehingga operasi biner o pada S = { a, b, c, d, e } yang didefinisikan seperti pada tabel 3.2 bersifat asosiatif.

Teladan 3.16

R adalah himpunan bilangan riel. Operasi biner o pada R didefinisikan sebagai berikut:

Untuk setiap $a, b \in$ R, $a \circ b = a + 2b$

Apakah operasi biner o pada R bersifat asosiatif?

Ambil sembarang $a, b, c \in$ R sedemikian sehingga:

$(a \circ b) \circ c = (a + 2b) \circ c = a + 2b + 2c$, dan

$a \circ (b \circ c) = a \circ (b + 2c) = a + 2b + 4c$.

Maka $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

Jika operasi biner o pada R tidak bersifat asosiatif?.

Teladan 3.17

Berdasarkan teladan 3.9 di atas dipenuhi sifat komutatif sebab untuk setiap $x, y, z \in R$, maka

$x * y \quad = \quad x + y + 1$

$\quad = \quad y + x + 1$ (sifat komotatif penjumlahan pada R)

$\quad = \quad y * x$

Dan juga bersifat asosiatif sebab

$(x * y) * z \quad = \quad (x + y + 1) * z$

$\quad = \quad (x + y + 1) + z + 1$

$\quad = \quad x + y + z + 2$

$x * (y * z) \quad = \quad x * (y + z + 1)$

$$= \quad x + (y + z + 1) + 1$$

$$= \quad x + y + z + 2$$

Teladan 3.18

Pada Teladan 3.11 operasi biner $*$ bersifat komutatif dan asosiatif.

> **Catatan**: bahwa sifat *komutatif* pada tabel Cayley dapat ditunjukkan dengan melihat *kesimetrisan* terhadap diagonal utamanya.[2]

Teladan 3.19

Diberikan Z_3 himpunan terdiri atas bilangan-bilangan bulat modulo 3 dengan operasi biner $\oplus$. Sehingga diperoleh tabel Cayley yang simetris terhadap diagonal sebagai berikut.

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Tabel 3.3

Terlihat pada tabel 3.3 di atas bahwa unsur-unsurnya simetris terhadap diagonal utamanya, maka operasi biner $\oplus$ bersifat komutatif.

---

[2] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 94.

Definisi 3.5 Unsur Identitas	Unsur e disebut sebagai unsur identitas pada himpunan S dengan operasi biner $*$, jika $e * a = a * e = a, \ \forall a \in S$.
Definisi 3.6 Unsur Invers	Himpunan S dengan operasi biner $*$ dan e sebagai unsur identitas, $a^{-1} \in S$ disebut invers dari a terhadap $*$ jika $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, untuk setiap $a \in S$.[3]

Catatan : Jika hanya dipenuhi $a * a^{-1} = e$ maka a^{-1} disebut invers kanan dari a dan jika hanya dipenuhi $a^{-1} * a = e$ maka a^{-1} disebut invers kiri dari a.
Analog untuk unsur identitas kiri atau kanan.

Teladan 3.20

Unsur 0 merupakan unsur identitas pada R dengan operasi + dan invers dari $x \in R$ adalah $-x \in R$. Unsur 1 merupakan unsur identitas dari R^+ dibawah operasi perkalian dan $x \in R^+$ inversnya adalah $\frac{1}{x}$.

Teladan 3.21

Pada teladan 3.19 unsur $\bar{0}$ adalah unsur identitas dan dari tabel dapat dilihat bahwa $\bar{1}$ inversnya $\bar{2}$ dan sebaliknya.

[3] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 19.

Teorema 3.1	Jika himpunan S terhadap operasi biner * mempunyai elemen identitas maka elemen identitas itu tunggal.

Bukti:

Misalkan himpunan S terhadap operasi biner * mempunyai elemen-elemen identitas e_1 dan e_2 dengan $e_1, e_2 \in S$. Karena e_1 elemen identitas pada S dan $e_2 \in S$ maka $e_1 * e_2 = e_2$, sedangkan $e_2 * e_1 = e_2$. Dilain pihak karena e_2 elemen identitas pada S dan $e_1 \in S$, maka $e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_1$.

Jadi $e_1 = e_2$. Ini berarti elemen identitas pada S terhadap operasi biner * adalah elemen tunggal.

■

Teorema 3.2	Misalkan * adalah suatu operasi biner pada himpunan S. Jika $x \in S$ mempunyai invers terhadap operasi * maka invers dari x tersebut tunggal.[4]

Bukti:

Misalkan invers dari $x \in S$ terhadap operasi biner * adalah x_1 dan x_2 dengan $x_1, x_2 \in S$ dan misalkan elemen identitas S terhadap operasi biner * adalah e. Karena x_1 adalah invers dari x, maka $x * x_1 = x_1 * x = e$. Demikian pula, karena x_2 adalah invers dari x, maka $x * x_2 = x_2 * x = e$. Maka $x_1 = x_2$. Ini berarti bahwa invers dari x terhadap operasi biner * adalah tunggal.

■

[4] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jerseyilley & Sons, Inc, 1995, hal. 49.

Teladan 3.22

Pada teladan 3.10 tidak mempunyai unsur identitas tetapi masing-masing unsur a, b, c merupakan unsur identitas kiri. Apakah setiap unsur mempunyai invers ? coba periksa !

Teladan 3.23

(1). B = { ....,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

Elemen identitas dari B terhadap penjumlahan adalah 0, sedangkab elemen identitas dari B terhadap perkalian adalah 1. Periksalah kebenaran pernyataan itu!

(2). Misalkan P adalah himpunan semua matriks bujur sangkar berordo 2. Kita telah mengetahui bahwa :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Maka elemen identitas dari P terhadap perkalian matriks adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sedangkan elemen identitas dari P terhadap penjumlahan adalah $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3). Perhatikan teladan 2.11 diatas, yaitu operasi biner * pada $S = \{a, b, c, d, e\}$ yang didefinisikan menurut tabel 3.2. Coba perksalah bahwa elemen identitas dari S terhadap operasi biner * adalah a.

Teladan 3.24

Perhatikan C = { a, b, c, d, e } dan operasi o pada C didefinisikan seperti pada tabel berikut ini:

o	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

Tabel 3.4

Cara membaca tabel 3.4 di atas, elemen yang dilingkari adalah hasil operasi dua elemen. Seperti $b \text{ o } c$ dan ditulis $b \text{ o } c = d$. Selanjutnya dapat diperiksa bahwa $c \text{ o } e = b$, $d \text{ o } b = e$. $a \text{ o } d = d$ dan seterusnya. Adapun cara memeriksa dengan memperhatikan setiap $x, y \in C$ kita perhatikan bahwa $x \text{ o } y \in C$ pula. Hal ini berarti bahwa operasi o pada C adalah suatu operasi biner.

Untuk memeriksa apakah operasi biner o bersifat komutatif, kita dapat memperhatikan kesimetrisan unsur-unsur yang terletak bersebrangan pada diagonal utamanya. Simaklah pada tabel diatas! Kita menyaksikan bahwa $a \text{ o } b = b \text{ o } a = b$; $b \text{ o } c = c \text{ o } b = d$, dan seterusnya.

Definisi 3.7	Himpunan tak kosong S dengan satu atau lebih operasi biner disebut Struktur Aljabar. Dinotasikan dengan $(S, *)$, $(S, *, \#)$, dan sebagainya.[5]

Teladan 3.25

Pada himpunan $(Z, +)$ dan $(Z, +, x)$ masing-masing adalah struktur aljabar, dan juga himpunan pada contoh-contoh terdahulu beserta operasi binernya.

Pada bab berikutnya akan dipelajari struktur aljabar grup dengan satu operasi biner, dan struktur aljabar Ring, daerah integral dan lapangan dengan dua operasi biner.

[5] Gatot, Muhsetyo. *Pengantar Struktur Aljabar*. IKIP Malang, 1989, hal. 40.

SOAL-SOAL UNTUK LATIHAN

1. Misalkan S adalah himpunan semua bilangan real kecuali -1. Didefinisikan operasi $*$ pada S bahwa $a * b = a + b + ab,\ \forall a, b \in S$.
   a. Tunjukkan bahwa $*$ merupakan operasi biner
   b. Tentukan solusi dari persamaan $2 * x * 3 = 7$ di S
2. Diberikan himpunan bulat Z dengan operasi $*$ didefinisikan $a * b = ab - 1,\ \forall a, b \in Z$
   a. Jelaskan apakah $*$ suatu operasi biner !
   b. Apakah $*$ bersifat asosiatif dan komutatif ?
   c. Tentukan unsur identitasnya (jika ada) !
   d. Apakah setiap unsur mempunyai invers ? Jelaskan !.
3. Operasi $*$ didefinisikan pada $S = \{1,2,3,4\}$ sebagai berikut :

   $\forall\, a, b \in S,$ didefinisikan $a * b = \begin{cases} \min\{a, b\}, & a \neq b \\ a, & a = b \end{cases}$

   a. Buat tabel cayleynya
   b. Jelaskan apakah $*$ suatu operasi biner ?
   c. Apakah $*$ bersifat komutatif dan asosiatif?
   d. Tentukan unsur identitasnya (jika ada)
   e. Apakah setiap unsur mempunyai invers ? Jelaskan !
4. Diketahui $M(R) = \{ f_{a,b} / a, b \in R, a \neq 0, f_{a,b} : R \rightarrow R, f_{a,b}(x) = ax + b\}$. Didefinisikan operasi $\circ$ pada $M(R)$ sebagai komposisi fungsi. Tunjukkan $\circ$ operasi biner. Apakah operasi tersebut memiliki sifat komutatif dan asosiatif ?
5. Buktikan jika operasi biner $*$ pada S bersifat komutatif dan asosiatif maka $\forall a, b, c, d \in S$ berlaku $(a * b) * (c * d) = ((d * c) * a) * b$.
6. Jika $*$ dan $\square$ adalah operasi biner pada S, maka $a * (b \square c) = (a * b) \square (a * c),\ \forall a, b, c \in S$. Benarkah pernyataan ini ? jika ya buktikan, jika tidak berikan contoh yang menyangkal pernyataan tersebut.

7. Misalnkan $*$ suatu operasi biner pada S. lengkapi titik-titik berikut :
   a. $*$ tidak asosiatif jika dan hanya jika....
   b. $*$ tidak komutatif jika dan hanya jika
   c. $e \in S$ bukan unsur identitas untuk $*$ jika dan hanya jika.....
   d. tidak ada unsur identitas untuk $*$ jika dan hanya jika ...
8. a. Tunjukkan dengan tabel bahwa perkalian merupakan operasi biner pada himpunan $S = \{ 1, -1, i, -i \}$ dimana $i = \sqrt{-1}$.
   b. Tunjukkan bahwa S terhadap perkalian (i) bersifat komutatif (ii) bersifat asosiatif (iii) mempunyai elemen identitas dan (iv) setiap elemennya mempunyai invers.
9. Perhatikan tabel dibawah ini yang merupakan definisi dari operassi # pada himpunan S = { a, b, c, d }.

#	a	b	c	d
a	d	a	c	b
b	a	c	b	d
c	b	d	a	a
d	c	b	d	c

   a) Apakah # merupakan operasi biner pada S? Jelaskan!
   b) Apakah # pada S bersifat komutatif? Jelaskan!
   c) Apakah # pada S bersifat asosiatif? Jelaskan!
   d) Apakah S terhadap operasi # mempunyai elemen identitas?
   e) Apakah setiap elemen S terhadap operasi # mempunyai invers?
10. Pertanyaan sama dengan nomor 9 untuk operasi Δ pada $S = \{a, b, c, d\}$ yang didefinisikan menurut tabel berikut ini.

Δ	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Perhatikan lagi tabel pada soal nomor 9 dan nomor 10 benar ataukah salah pernyataan – pernyataan berikut ini?

a). a # (d Δ c) = (a # d) Δ (a # c)

b). (d Δ c) # a = (d # a) Δ (c # a)

c). d Δ (c # b) = (d Δ c) # (d Δ b)

d). (c # b) Δ d = (c Δ d) # (b Δ d)

11. (a) Ada berapa cara melengkapi tabel Cayley berikut ini, jika u merupakan unsur identitas.

*	u	v
u		
v		

(b) Apakah tabel dapat dibuat jika *u* dan *v* keduanya merupakan unsur identitas ?

(c) Buktikan bahwa himpunan *S* dengan operasi biner * hanya mempunyai paling banyak satu unsur identitas.

12. Buktikan setiap operasi biner pada himpunan yang terdiri dari satu anggota bersifat komutatif dan asosiatif !

13. Jika $x * y = 2x + 3y - 5$, hitunglah:

(a). 7 * 4

(b). -5 * 8

(c). 9 * -6

(d). 2a * 3b

Tujuan Umum Perkuliahan (TUP)

Setelah selesai perkuliahan mahasiswa dapat memahami suatu himpunan terhadap suatu operasi biner merupakan grup, sifat-sifat sederhana dari suatu Grup, Koset kanan dan kiri, order unsur grup, SubGrup dan Grup Siklik,

Tujuan Khusus Perkuliahan (TKP)

Setelah selesai perkuliahan mahasiswa diharapkan mampu:

a) Mengidentifikasi suatu himpunan bilangan terhadap operasi tertentu merupakan suatu grup;
b) Membuktikan sifat-sifat sederhana suatu grup;
c) Menerapkan sifat-sifat sederhana suatu grup;
d) Menentukan penyelesaian suatu persamaan dalam suatu grup yang diketahui;
e) Mengidentifikasi suatu himpunan bagian dari suatu grup merupakan suatu subgrup atau bukan;
f) Membuktikan bahwa himpunan bagian dari suatu grup merupakan subgrup;
g) Membuktikan sifat-sifat yang berkenaan dengan subgrup-subgrup dari suatu grup;
h) Menentukan koset kiri atau koset kanan dari suatu grup dalam grup tertentu;
i) Menentukan teorema yang berkenaan dengan koset-koset suatu subgrup dalam grup tertentu;
j) Menentukan hubungan order suatu grup dengan order dari subgrupnya;
k) Menentukan hubungan order suatu elemen grup dengan order dari grupnya;

l) Mengidentifikasi suatu grup siklik;
m) Menentukan periode suatu elemen dari suatu grup;
n) Menentukan elemen penghasil (generator) dalam suatu grup siklik; membuktikan sifat-sifat grup siklik dan sifat-sifat subgrupnya;

BAB IV
GRUP

Pada bab ini akan dibahas tentang pengertian grup, order grup dan sifat-sifatnya. Selanjutnya juga dikaji pengertian tentang grup permutasi, order unsur grup beserta sifat-sifatnya. Begitu pula membahas mengenai konsep subgrup, grup siklik, dan sifat-sifatnya, koset kiri dan koset kanan serta Teorema Lagrange dan yang terakhir dibahas tentang grup hasil kali langsung.

A. PENGERTIAN GRUP

Kajian tentang grup merupakan pembahasan utama pada Struktur Aljabar atau Aljabar Abstrak. Suatu himpunan dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifatnya tertentu adalah merupakan ide sentral dari Struktur Aljabar atau Aljabar Abstrak atau bahkan dalam Matematika modern.

Misalkan kita mempunyai persamaan $a + x = b$ dengan $a, b \in R$. Proses dalam menyelesaikan persamaan tersebut untuk mengetahui nilai x dapat digunakan langkah-langkah dan sifat-sifat operasi + pada R sebagai berikut:

$a + x = b$ (diketahui)
$-a + (a + x) = -a + b$ (ruas kiri dan kanan ditambahkan $-a$)
$(-a + a) + x = -a + b$ (sifat asosiatif + pada R)
$0 + x = -a + b$ (karena $-a+a = 0$)
$x = -a+b$ (sifat dari 0 sebagai unsur identitas)

Begitu juga untuk persamaan $ax = b$ dengan $a, b \in Q - \{0\}$, maka dalam menyelesaikannya digunakan langkah-langkah seperti diatas dan sifat-sifat operasi perkalian pada Q-$\{0\}$ sebagai berikut:

$$ax = b \text{ (diketahui)}$$

$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}b \text{ (ruas kiri dan kanan dikaliakan } \frac{1}{a}\text{)}$$

$$(\frac{1}{a}a)x = \frac{1}{a}b \text{ (sifat asosiatif perkalian pada } Q\text{-}\{0\}\text{)}$$

$$(1)x = \frac{b}{a} \ (karena\ \frac{1}{a}\ adalah\ invers\ a)$$

$$x = \frac{b}{a} \text{ (karena } 1 \text{ } \textit{adalah unsur identitas}\text{)}$$

Dengan demikian diperoleh penyelesaian kedua persamaan diatas adalah $x = -a + b$ dan $x = \frac{b}{a}$, dan merupakan penyelesaian tunggal.

Secara umum dikatakan bahwa suatu Struktur Aljabar S dengan operasi biner $*$ yang bersifat asosiatif, adanya unsur identitas dan setiap unsurnya mempunyai invers, maka persamaan $ax = b$, dimana $a, b \in S$ mempunyai penyelesaian tunggal (*trivial solution*). Struktur aljabar dengan satu operasi biner yang mempunyai sifat demikian disebut Grup dan definisinya diberikan berikut ini.

Definisi 4.1 Grup.[1]	Suatu himpunan G dengan operasi biner $*$ disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini,
	1. G dibawah Operasi $*$ bersifat asosiatif. Artinya $\forall\, x, y, z \in G$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$

[1] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition,* Simon & Schuster A Viacom Company, 1995, hal. 41.

	2. Ada unsur identitas $e \in G$. Artinya untuk setiap $x \in G$ berlaku $e * x = x * e = x$, 3. Untuk setiap $x \in G$, memiliki invers $x^{-1} \in G$ sehingga $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$
Definisi 4.2	Grup G dikatakan Grup komutatif (*Grup Abel*) atau abelian grup, jika G dibawah operasi $*$ memenuhi sifat komutatif artinya untuk $\forall\, x, y \in G$ berlaku $x * y = y * x$

Berikut ini diberikan beberapa teladan yang dipandang penting untuk kita kaji secara teliti dan hati-hati karena keabstrakan objek kajian semesta pembicaraan berdasarkan definisi dari himpunan dan operasi yang diberikan.

Teladan 4.1

Pada himpunan-himpunan bilangan Z, Q, R, dan C dibawah operasi + adalah merupakan Grup.

Pada himpunan-himpunan tersebut di atas berlaku sifat Asosiatif; memiliki unsur identitasnya adalah 0 dan invers dari x adalah $-x$.

Jika dikaji dan diteliti lebih dalam lagi, ternyata setiap unsur dari himpunan-himpunan di atas dengan operasi + bersifat komutatif, ini berarti bahwa grup-grup tersebut merupakan grup-grup komutatif atau grup abel.

Tugas kita selanjutnya adalah memeriksa atau menganalisis sifat-sifat dari (Z,+), (Q,+), (R,+) dan (C,+)? Apakah benar bahwa (Z,+) memenuhi semua sifat-sifat dimaksud diatas? Begitu juga untuk (Q,+); (R,+); dan (C,+). Silakan diperiksa!

Misalkan untuk (Z,+), apakah operasi + pada Z bersifat asosiatif ?

Misalnya kita ambil sebarang bilangan-bilangan Bulat (sebut x, y dan z) maka berlaku bahwa $(x + y) + z = x + (y + z)$. Hal ini berarti sifat asosiatif terpenuhi.

Begitu juga berlaku $(x + y) = (y + x)$. Ini berarti sifat komutatif terpenuhi.

Untuk memeriksa apakah (Z,+) memiliki unsur identitas?

Ternyata pada Z memiliki unsur 0, dimana jika kita pilih sebarang x bilangan bulat, selalu berlaku $0 + x = x + 0 = x$. Ini berarti bahwa 0 ini disebut unsur identitas di Z.

Selanjutnya apakah setiap unsur Z memiliki invers?

Jika kita kembali pada pengertian invers, ternyata jika kita pilih sebarang x bilangan bulat, kita juga selalu dapat menunjukkan $-x$ bilangan bulat juga sehingga $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Ini berarti bahwa $-x$ adalah invers dari x.

Dengan demikian, karena pada (Z,+) memenuhi semua aksioma berdasarkan definisi 3.1 maka disimpulkan bahwa (Z,+) merupakan Grup Abel.

Begitu pula untuk memeriksa kebenaran (Q,+); (R,+); dan (C,+) dengan cara mengikuti langkah-langkah (bersifat analogi) terhadap Z di atas.

Teladan 4.2

Pada himpunan-himpunan bilangan Q-{0}, R-{0}, C-{0} adalah grup-grup komutatif atau grup-grup Abel dibawah operasi perkalian.

Catatan: Q-{0} dibaca himpunan yang keanggotaannya bilangan rasional selain 0 atau himpunan bilangan rasional yang tidak memuat 0

Pada himpunan-himpunan tersebut semua unsur-unsurnya bersifat asosiatif pada perkalian, unsur identitasnya adalah *1* dan invers dari x adalah $\frac{1}{x}$. Akan Tetapi $Z-\{0\}$ dengan operasi perkalian adalah bukan grup, sebab $2 \in Z - \{0\}$ tidak mempunyai invers. Artinya tidak ada x bilangan bulat jika dikalikan 2 mengahasilkan 1 (silakan diperiksa)!.

Teladan 4.3

$M_2(R)$ himpunan yang anggotanya matriks-matriks berordo 2 x 2 dengan operasi penjumlahan. Maka $M_2(R)$ adalah grup komutatif atau grup Abel.

Unsur identitas e adalah berupa matriks nol dan invers dari matrik A adalah $-A$, $\forall A \in M_2(R)$.

Namun $M_2(R)$ dibawah operasi perkalian bukan grup karena tidak setiap matriks di $M_2(R)$ mempunyai invers, seperti misalnya $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dimana $\det(B) = 0$ berarti B tidak memiliki invers. Silakan diperiksa!

Teladan 4.4

$M_2(R)$ adalah himpunan terdiri atas matriks-matriks yang determinannya tak nol dibawah operasi perkalian adalah grup. Dalam perkalian matriks dengan ordo 2x2 bersifat asosiatif. Unsur identitasnya adalah matriks identitas $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan setiap matriks $A \in M_2(R)$ mempunyai invers matriks yaitu $A^{-1} \in M_2(R)$. Artinya jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dimana $ac - bd \neq 0$ maka invers dari A adalah $A^{-1} = \frac{1}{ac-bd}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{ac-bd} & \frac{-c}{ac-bd} \\ \frac{-b}{ac-bd} & \frac{d}{ac-bd} \end{pmatrix}$.

Silakan diperiksa!

Teladan 4.5

Pada teladan 3.9 ($R, *$) adalah grup Abel

- Operasi $*$ pada R bersifat asosiatif
- Unsur indentitasnya $e = -1$, untuk sebarang $a \in R$, maka berlaku
  $a * e = a * -1 = a + (-1) + 1 = a$ dan
  $e * a = -1 * a = (-1) + a + 1 = a$
- Untuk menentukan invers $x \in R$ adalah sebagai berikut
  $x^{-1} * x = e$ berarti $x^{-1} * x = -1$ maka $x^{-1} + x + 1 = -1$ sehingga diperoleh $x^{-1} = -x - 2$

  Berlaku juga $x * x^{-1} = e$ berarti $x * x^{-1} = -1$ maka $x + x^{-1} + 1 = -1$ sehingga diperoleh $x^{-1} = -x - 2$
  Jadi invers dari $x \in R$ adalah $x^{-1} = -x - 2$
  Misalnya invers dari $x = 3$ adalah $x^{-1} = -3 - 2 = -5$

Teladan 4.6

Tunjukkan struktur aljabar ($F, +$) pada Teladan 3.7 adalah grup!.

Solusi: Misalkan $f, g, h \in F$ dan $x \in R$

1. Sifat assosiatif terpenuhi
   $((f+g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x)$ definisi operasi penjumlahan pada F

   $= (f(x) + g(x)) + h(x)$ definisi operasi penjumlahan pada F

   $= f(x) + (g(x) + h(x))$ sifat asosiatif penjumlahan pada R

   $= f(x) + (g+h)(x)$ definisi operasi penjumlahan pada F

   $= (f(g + h))(x)$ definisi operasi penjumlahan pada F

   Jadi $(f + g) + h = f + (g + h)$.

2. Ada unsur identitasnya adalah fungsi $f_0 \in F$ yang didefinisikan sebagai $f_0(x) = 0,\ \forall x \in R$, sehingga untuk sebarang $f \in F$ berlaku:

$$\begin{aligned}(f_0 + f)(x) &= f_0(x) + f(x)\\ &= 0 + f(x)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh $(f + f_0)(x) = f(x)$
Sehingga diperoleh $f_0 + f = f + f_0 = f$

Jika $g \in F$ maka invers dari g adalah $-g \in F$ yaitu fungsi yang didefinisikan sebagai $(-g)(x) = -g(x),\ \forall x \in R$
sehingga:

$$\begin{aligned}(g + (-g))(x) &= g(x) + (-g)(x)\\ &= g(x) + (-(g(x)))\\ &= 0\\ &= f_0(x)\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh $((-g) + g)(x) = f_0(x)$
Sehingga diperoleh $g + (-g) = -g + g = f_0$
Jadi $-g$ invers dari g (terbukti).

Perhatikan struktur aljabar (F, •) bukan merupakan grup, kenapa demikian? Silakan cari alasannya!.

Definisi 4.3 Order Grup.[2]	Misalkan G adalah grup hingga (finite grup). Order dari G adalah banyaknya keanggotaan G. Dinotasikan dengan O(G) atau |G|.
Jika banyaknya anggota G adalah n, maka O(G) = *n*. Jika G adalah grup tak hingga (infinite grup) maka G dikatakan tidak memiliki order dan ditulis O(G) = 0.	

[2] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 37.

Teladan 4.7

Jika $Z_7 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, maka $O(Z_7) = 7$

Teladan 4.8

Misalkan Z adalah himpunan bilangan bulat. Karena keanggotaan Z tak hingga banyaknya, maka $O(Z) = 0$

Teladan 4.9

$(Z_4, \oplus)$ adalah grup Abel.

Perlu diingat bahwa representasi dari $Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ berarti $O(Z_4) = 4$

$(Z_4, \oplus)$ dapat diperhatikan pada tabel Cayleynya

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Tabel 4.1

Dari tabel 4.1 di atas dapat dilihat bahwa:

a) Unsur identitas $\bar{0}$

b) Invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$

Invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{3}$

Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{2}$

Invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{1}$

Grup ini merupakan grup yang komutatif sebab jika diamati pada tabel 4.1 cayley terlihat simetris terhadap diagonal utamanya. Sedangkan untuk sifat asosiatif tidak dapat diamati pada tabel, sehingga kita harus mencobanya satu persatu. Sebagai ilustrasi dapat dilakukan seperti contoh berikut.

$$(\bar{1} \oplus \bar{2}) \oplus \bar{3} = \bar{3} \oplus \bar{3} = \bar{2}$$

$$\bar{1} \oplus (\bar{2} \oplus \bar{3}) = \bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{2}$$

$$(\bar{1} \oplus \bar{2}) \oplus \bar{3} = \bar{1} \oplus (\bar{2} \oplus \bar{3})$$

dan seterusnya.

Secara umum dapat ditunjukkan sebagai berikut :

Misalkan $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in Z_4$, maka

$\bar{x} \oplus (\bar{y} \oplus \bar{z}) \quad = \bar{x} \oplus (\overline{y+z})$ definisi penjumlahan pada z_4

$= \overline{x+(y+z)}$ definisi penjumlahan pada z_4

$= \overline{(x+y)+z}$ assosiatif penjumlahan pada z

$= \overline{x+y)} \oplus \bar{z}$ definisi penjumlahan pada z_4

$= (\bar{x} \oplus \bar{y}) \oplus \bar{z}$ definisi penjumlahan pada z_4

Teladan 4.10

Misalkan G = {*-1,1*}, tunjukkan bahwa (G,x) adalah grup. Silakan diperiksa! Maka O(G) =2

Teladan 4.11

Misalkan $M_1 = \{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\}$. Maka (M_1, x) adalah grup. Berarti O(M) = 4

Untuk memudahkan menyelesaikan masalah di atas, terlebih dahulu buat tabel cayleynya dan perhatikan sifat-sifatnya (1) unsur identitasnya (2) masing-masing unsur memiliki invers, dapat diamati pada masing-masing baris memuat unsur identitas, dan (3) sifat asosiatif terpenuhi, karena perkalian matriks bersifat asosiatif. Untuk memeriksa apakah sifat komutatif terpenuhi atau tidak, dengan cara mengamati kesimetrisan unsur yang terletak pada sisi-sisi diagonalnya pada tabel cayley.

Teladan 4.12

Misal G = $\{e, a\}$ grup dengan operasi kali, e merupakan unsur identitas. Coba perhatikan pada tabel untuk grup (G,.)

Solusi:

Karena e unsur identitas maka pertama-tama kita buat tabel cayley berikut ini

.	e	a
e	e	a
a	a	.

Selanjutnya melakukan analisis terhadap elemen-elemennya. Andaikan $a \, . \, a = a$?

$$\rightarrow a^{-1} \, . \, (a. \, a) = a^{-1} \, . \, a$$

$$\rightarrow (a^{-1} \, . \, a) \, . \, a = e$$

$$\rightarrow e. \, a = e$$

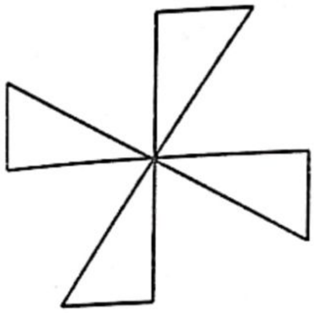
$$\rightarrow a = e$$ kontradiksi dengan teorema ketunggalan unsur identitas.

Karena unsur di G adalah hanya a dan e, maka haruslah a . $a = e$; sehingga diperoleh tabel 3.2 untuk grup (G, .) adalah:

.	e	a
e	e	a
a	a	e

Teladan 4.13

Perhatikan gambar suatu baling-baling berikut.



R adalah rotasi dengan sudut dan sudut putaran 90° (berlawanan arah dengan arah perputaran jarum jam), ditulis

$R(0, 90°) = R$

$R \circ R = R(0, 180°) = R^2$

$R^2 \circ R = R(0, 270°) = R^3$

$R^2 \circ R = R(0, 360°) = I = R^4$

Jika $G = \{I, R, R^2, R^3\}$ terhadap operasi perkalian o, maka G merupakan suatu grup abelian. Dimana I menyatakan transformasi identitas yaitu baling-baling pada posisi semula.

A. SIFAT-SIFAT GRUP

Dalam pembahasan selanjutnya untuk mempermudah penulisan jika suatu grup G yang tidak diberikan definisi dari operasi binernya, maka G adalah suatu grup dibawah operasi perkalian atau operasi titik. Perlu diperhatikan adalah yang dimaksud operasi disini adalah operasi dalam pengertian abstrak artinya tergantung definisi yang diberikan.

Untuk mengenal lebih jauh tentang grup, berikut ini disajikan teorema-teorema mengenai sifat-sifat sederhana dari grup. Teorema ini dimaksudkan agar pembaca dapat mengenal, mengetahui lebih detail tentang grup.

Teorema 4.1 Hukum Kanselasi.[3]	Dalam suatu grup G dan $x, y, z \in G$ berlaku hukum pencoretan (*kanselasi*) 1. Pencoretan kiri : $xy = xz \Rightarrow y = z$ 2. Pencoretan kanan : $yx = zx \Rightarrow y = z$

Bukti :

$xy = xz$ (diketahui)

$\rightarrow$ $x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz)$ eksistensi $x^{-1} \in G$ (aksioma 3)

$\rightarrow$ $(x^{-1}x)\, y = (x^{-1}x)\, z$ asosiatif (aksioma 1)

$\rightarrow$ $e\,y = e\,z$ definisi $x^{-1}.\, x = e$

$\rightarrow$ $y = z$ definisi e.

Dengan cara yang sama bagian kedua juga dapat dibuktikan, yaitu dengan mengalikan ruas kiri dan kanan dengan x^{-1} dari kanan. ■

Teorema 4.2 *Trivial solution.*[4]	Dalam grup G, persamaan $ax = b$ dan $ya = b$ dengan $a, b \in G$ mempunyai penyelesaian tunggal di G.

Bukti :

Misalkan $x = a^{-1}b$ adalah solusi dari persamaan $ax = b$ karena;

[3] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 94.

[4] *Ibid.*

$$
\begin{aligned}
ax &= a(a^{-1}b) && \text{substitusi} \\
&= (aa^{-1})b && \text{sifat asosiatif pada grup G} \\
&= (e)b && \text{definisi invers} \\
&= b && \text{definisi identitas}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, untuk membuktikan ketunggalannya dimisalkan x_1 dan x_2 merupakan solusi dari persamaan $ax = b$ maka $ax_1 = b$ dan $ax_2 = b$. Sehingga $ax_1 = ax_2$, dan menurut hukum konselasi kiri (Teorema 4.1) diperoleh $x_1 = x_2$. Jadi terbukti persamaan $ax = b$ mempunyai penyelesaian tunggal. ■

Bukti untuk persamaan $ya = b$ adalah analog dengan bukti $ax = b$.

Teorema diatas menunjukkan bahwa pada Tabel Cayley, setiap unsur dari grup hingga tepat muncul satu kali pada tiap baris maupun pada kolomnya.

Teorema 4.3 Ketunggalan.[5]	Unsur identitas suatu grup G adalah tunggal.

Bukti :

Misalkan ada e_1, e_2 masing-masing unsur identitas dari G, maka berlaku $\forall x \in G$, $e_1x = x$ karena e_1 unsur identitas di G, dan $e_2x = x$ karena e_2 unsur identitas di G

Sehingga berdasarkan persamaan diatas dapat disimpulkan bahwa $e_1x = e_2x$ dan selanjutnya dengan menggunakan hukum pencoretan kanan diperoleh $e_1 = e_2$.

[5] *Ibid.*, hal. 95.

Karena $e_1 = e_2$ berarti bahwa unsur identitas G adalah tunggal. ■

Teorema 4.4	Setiap unsur grup G mempunya invers tunggal.

Bukti :

Misalkan $a \in G$ dan a_1^{-1}, a_2^{-1} berturut-turut invers dari a. Maka diperoleh

$$a_1^{-1} a = e \quad \text{sebab } a_1^{-1} \text{ invers } a$$

$$a_2^{-1} a = e \quad \text{sebab } a_2^{-1} \text{ invers } a$$

berdasarkan teorema 4.3 bahwa e adalah tunggal, sehingga didapat $a_1^{-1}a = a_2^{-1}a$. Dengan menggunakan hukum pencoretan kanan diperoleh $a_1^{-1} = a_2^{-1}$

Karena $a_1^{-1} = a_2^{-1}$, hal ini berarti bahwa invers dari suatu unsur di G adalah tunggal. ■

Teorema 4.5 *Double Invers.*[6]	Jika G suatu grup, maka $\forall x \in G$ berlaku $(x^{-1})^{-1} = x$

Bukti :

Misalkan $x \in G$ maka berlaku

$\rightarrow x^{-1} x = e$ definisi invers

$\rightarrow (x^{-1})^{-1}(x^{-1} x) = (x^{-1})^{-1} e$ Kedua ruas diopesaikan dengan unsur sama

---

6 David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 19.

→ $((x^{-1})^{-1} x^{-1})x = (x^{-1})^{-1}$ Sifat asosiatif pada G

→ $ex = (x^{-1})^{-1}$ definisi invers

→ $x = (x^{-1})^{-1}$ definisi unsur identitas

Jadi $(x^{-1})^{-1} = x$

■

Teorema 4.6	Jika G suatu grup dan $x, y \in G$ maka berlaku $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.[7]

Bukti :

Karena $x, y \in G$ maka $xy \in G$, sehingga berlaku

→ $(xy)^{-1} xy = e$

→ $(xy)^{-1} (xy) y^{-1} = ey^{-1}$

→ $(xy)^{-1} x(yy^{-1}) = y^{-1}$

→ $(xy)^{-1} x.e = y^{-1}$

→ $(xy)^{-1} x = y^{-1}$

→ $(xy)^{-1} x x^{-1} = y^{-1} x^{-1}$

→ $(xy)^{-1}e = y^{-1} x^{-1}$

→ $(xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1}$ ■

Teorema 4.7	Jika G adalah suatu grup dan $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n \in G$, maka berlaku $(x_1.x_2.x_3....x_n)^{-1} = x_n^{-1}x^{-1}_{n-1}\ldots\ldots x_2^{-1}x_1^{-1}$

Teorema 4.7 ini merupakan akibat dari teorema 4.6 sehingga untuk membuktikannya menggunakan analogi dengan bukti teorema 4.6

[7] *Ibid.*

Berikut ini disajikan Teorema yang memberikan definisi grup berdasarkan pada aksioma (kiri).

Teorema 4.8	Misalkan G himpunan tak kosong dengan operasi dikatakan grup jika dan hanya memenuhi aksioma berikut.[8] 1. Hukum assosiatif : $\forall x, y, z \in G$, berlaku $(xy)z = x(yz)$ 2. Ada unsur identitas kiri : $\forall x \in G, \exists e \in G$, sehingga $ex = x$ 3. Ada unsur invers kiri : $\forall x \in G, \exists x^{-1} \in G$ sehingga $x.x^{-1} = e$

Bukti :

Jika G grup maka menurut definisi 3.1 maka terpenhui aksioma 1, 2, dan 3. Sebaliknya, jika $G \neq \emptyset$ dan G memenuhi aksima 1, 2 dan 3 maka G Grup. Untuk membuktikan G grup, tinggal membuktikan unsur identitas kiri e, juga merupakan unsur identitas kanan dan jika x^{-1} invers kiri dari x, juga merupakan invers kanan dari x.

Jika x^{-1} adalah invers kiri dari x maka:

$$\rightarrow x^{-1}x = e$$

$$\rightarrow (x^{-1}x)\,x^{-1} = ex^{-1}$$

$$\rightarrow x^{-1}(xx^{-1}) = x^{-1}$$

$$\rightarrow (x^{-1})^{-1}(x^{-1}(xx^{-1})) = (x^{-1})^{-1}x^{-1}$$

$$\rightarrow ((x^{-1})^{-1}x^{-1})(xx^{-1}) = e$$

$$\rightarrow e(xx^{-1}) = e$$

$$\rightarrow xx^{-1} = e$$

---

[8] Gatot, Muhsetyo. *Pengantar Struktur Aljabar*. IKIP Malang, 1989, hal. 65.

Jadi x^{-1} merupakan invers kanan dari x

Jika e unsur identitas kiri $\forall x \in G$

$\rightarrow ex \quad = e$

$\rightarrow (x x^{-1})\, x \quad = e$

$\rightarrow x\,(x^{-1}x) \quad = e$

$\rightarrow xe \quad = e$

Jadi e merupakan unsur identitas kanan. Selanjutnya diperoleh $x^{-1}x = xx^{-1} = e$ dan $ex = xe = e$.

Karena pada G memenuhi sifat-sifat grup (asosiatif, memiliki unsur indentitas, dan setiap unsurnya memiliki invers) maka terbukti G grup.

■

B. GRUP PERMUTASI

Definisi 4.4 Permutasi.[9]	Misalkan A adalah himpunan yang tak kosong. Permutasi pada A adalah fungsi/pemetaan bijektif dari A ke A.

Teladan 4.14

Misalkan jika A = {1,2,3}.

Pemetaan bijektif yang mungkin pada A adalah sebagi berikt:

$$\pi_1 : 1 \rightarrow 1 \text{ dimana } \pi_1(1) = 1$$

$$2 \rightarrow 2 \text{ dimana } \pi_1(2) = 2$$

$$3 \rightarrow 3 \text{ dimana } \pi_1(3) = 3$$

[9] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 131.

Adalah pemetaan bijektif sehingga merupakan permutasi pada A dan dinotasikan sebagai:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi_1(1) & \pi_1(2) & \pi_1(3) \end{pmatrix} =$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = (1)$$

Pemetaan lain yang mungkin adalah:

$$\pi_2:\ 1 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 1$$

Juga pemetan bijektif sehingga merupakan permutasi pada A dan dinotasikan

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$$

Permutasi-permutasi pada A yang lain adalah sebagai berikut:

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3) = (12)$$

$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2) = (13)$$

$$\pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23) = (23)$$

Jika S_A adalah koleksi dari semua permutasi-permutasi pada A maka $S_3 = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\}$ sehingga

$$O(S_3) = 3! = 3.2.1 = 6$$

Misalkan operasi pada S_A yaitu perkalian permutasi didefinisikan sebagai *komposisi fungsi*. Berarti untuk sertiap $\alpha, \beta \in S_A$

$$\begin{aligned}(\alpha\beta) &= (\alpha\beta)(x)\\ &= \alpha(\beta(x)) \qquad \forall x \in A\end{aligned}$$

Dengan demikian perhatikan ilustrasi berikut.

$$(\alpha\beta)(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha(\beta(x_1)) & \alpha(\beta(x_2)) & \alpha(\beta(x_3)) \end{pmatrix}$$

Perkalian permutasi atau komposisi fungsi pada permutasi merupakan operasi biner, hal ini dikarenakan komposisi dua fungsi bijektif dari A ke A juga merupakan fungsi bijektif dari A ke A juga. Karena jika $\alpha \in S_A$ adalah permutasi bijektif maka menurut teorema 2.3 α memiliki invers yang juga merupakan fungsi bijektif. Sehingga dapat dinyatakan bahwa α^{1} juga pemetaan bijektif, akibatnya α^{1} juga suatu permutasi.

Misalkan $\pi_2\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ atau dapat juga menggunakan simbol yang lebih sederhana bahwa:

$$\pi_2\pi_3 = (123)(132) = (1)(2)(3) = (1)$$

Cara sederhana perkalian fungsi di atas adalah dimulai dari permutasi *kedua* yaitu π_3 kemudian dilanjutkan permutasi *pertama* yaitu π_2. Amati secara seksama bahwa pada π_3 didapat bahwa 1 ke 3, kemudian pada π_2 didapat 3 ke 1. Jadi diperoleh 1 → 3 dan 3 → 1, sehingga disimpulkan bahwa bayangan 1 → 1. Begitulah seterusnya.

Untuk menentukan invers dari suatu permutasi caranya adalah dengan menukar posisi atau dengan cara membalik posisi unsur-unsur dari permutasi tersebut bagian atas menjadi bagian bawah, selajutnya diurutkan kembali. Misalnya jika $\pi_2 =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$, maka invers dari π_2 ditulis $\pi_2^{-1} = \begin{pmatrix} 231 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}$ atau jika $\pi_2 = (123)$, maka $\pi_2^{-1} = (321)$ atau dapat ditulis (132).

Untuk menguji kebenaran dari aktifitas ini kita dapat mengalikannya kedua permutasi yang saling invers. Jika hasil komposisinya sama dengan permutasi identitas maka dapat disimpulkan bahwa hasil yang didapat adalah benar.

Teladan 4.15

Jika komposisi dua permutasi $(\pi_2\pi_4)(x) = \pi_2(\pi_4(x))$

Pemetaan $\pi_2.\pi_4 : 1 \to 2 \to 3$

$2 \to 1 \to 2$

$3 \to 3 \to 1$

Sehingga $\pi_2\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \pi_5$

Dengan cara yang sama diperoleh $\pi_3\pi_2 = \pi_1$; $\pi_4\pi_5 = \pi_3$; $\pi_2\pi_6 = \pi_4$ dan seterusnya.

Sehingga perkalian permutasi pada S_A dapat dibuat tabel cayleynya sebagai berikut :

.	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
π_1	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
π_2	π_2	π_3	π_1	π_5	π_6	π_4
π_3	π_3	π_1	π_2	π_6	π_4	π_5
π_4	π_4	π_6	π_5	π_1	π_3	π_2
π_5	π_5	π_4	π_6	π_2	π_1	π_3
π_6	π_6	π_5	π_4	π_3	π_2	π_1

Tabel 4.3

Teladan 4.16

Jika $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ maka berdasarkan tabel di atas diperoleh $\pi_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \pi_3$. Begitu juga $\pi_4^{-1} = \pi_4$ dan seterusnya.

Teorema 4.9	Misalkan A adalah himpunan tak kosong dan S_A adalah himpunan semua permutasi-permutasi pada A. maka S_A merupakan grup dibawah operasi perkalian permutasi.[10]

Bukti :

- Perkalian permutasi besifat asosiatif, sebab $\alpha, \beta, \gamma \in S_A$, dan $x \in A$ maka

$$\begin{aligned} ((\gamma\beta)\alpha)(x) &= (\gamma\beta)(\alpha(x) \\ &= \gamma(\beta(\alpha(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma(\beta\alpha)(x)) &= \gamma(\beta(\alpha(x)) \\ &= \gamma(\beta(\alpha(x))) \end{aligned}$$

Oleh karena $((\gamma\beta)\alpha)(x) = (\gamma(\beta\alpha))(x)$ berlaku $\forall x \in A$,

maka $((\gamma\beta)\alpha) = (\gamma(\beta\alpha))$.

- Unsur identitas adalah permutasi i dengan $i(x) = x$, $\forall x \in A$

Untuk setiap $\alpha \in S_A$.diperoleh $(\alpha i)(x) = (\alpha(ix)) = \alpha(x)$

Begitu pula $(i\alpha)(x) = i(\alpha(x)) = \alpha(x)$

Sehingga diperoleh $\alpha i = i\alpha = \alpha$

[10] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 132.

- Jika $\alpha \in S_A$, maka invers dari α adalah α^1 yaitu permutasi yang didefinisikan $\alpha^{-1}(y) = x$ jika dan hanya jika $y = \alpha(x)$. Sehingga:

$$\alpha\alpha^{-1}(y) = \alpha\left(\alpha^{-1}(y)\right) = \alpha(x) = y = i(y)$$

Dipihak lain juga diperoleh:

$$\alpha^{-1}\alpha(x) = \alpha^{-1}\left(\alpha(x)\right) = \alpha^{-1}y = x = i(x)$$

Dengan demikian $\alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = i$

Karena memenuhi sifat (1), (2) dan (3) maka sesuai definisi terbukti S_A grup.

■

Definisi 4.5 Order Grup Simetri.[11]	Jika A hingga dengan banyak unsur *n* maka S_A disebut grup simetrik atau grup permutasi dari A dan dinotasikan dengan S_n. Banyak unsur atau Order S_n adalah $\|S_n\| = n!$

Teladan 4.17

Pada Teladan 4.11 S_3 adalah grup permutasi dari A = { 1,2,3 } yang dituangkan pada tabel 3.3. dan $O(S_3) = |S_3| = 3! = 6$.

1. Unsur identitas adalah π_1
2. Setiap unsur mempunyai invers.

   yaitu invers dari π_1 adalah π_1, invers dari π_2 adalah π_3, invers dari π_5 adalah π_5, invers dari π_4 adalah π_4 dan seterusnya
3. S_3 bukan grup komutatif
4. Sifat-sifat grup dipenuhi, antara lain:

$$(\pi_2\pi_4)^{-1} = (\pi_5)^{-1}$$
$$= (\pi_5)$$

11 *Ibid.*, hal. 133.

$$\pi_4^{-1}\pi_2^{-1} = \pi_4\pi_3$$

$$= (\pi_5)$$

Sehingga $(\pi_2\pi_4)^{-1} = \pi_4^{-1}\pi_2^{-1}$

C. ORDER UNSUR GRUP

Sebelum membahas order dari suatu unsur grup, kiranya kita perlu mengingat kembali tentang operasi berulang seperti penjumlahan berulang atau perkalian berulang. Operasi berulang yang dimaksud diatas adalah operasi dalam pengertian abstrak (yaitu operasi biner pada grup). Berikut ini disajikan beberapa definisi berikut.

Definisi 4.6 Eksponensial.[12]	Misalkan (G, *) suatu grup, jika $a \in G$ dan n bilangan bulat positif. Maka : a) $a^n = a * a * a * \ldots * a$ (sebanyak n suku) b) $a^{-n} = a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1}$ (sebanyak n suku) c) $a^0 = e$ (dimana e suatu unsur identitas di G)

Teladan 4.18

Misalkan (Z, +) adalah grup, dan $2 \in Z$. Maka $2^3 = 2 + 2 + 2 = 6$, dan $2^{-3} = 2^{-1} + 2^{-1} + 2^{-1} = (-2) + (-2) + (-2) = -6$, dan $2^0 = 0$, karena 0 adalah unsur identitas di Z. Sedangkan $0^0 = 0$

$$2^2 + 2^3 = 2^5$$

$$(2^2)^3 = 2^6$$

[12] Herstein, I.N. *Topics in Algebra. Second Edition*, John wiley & Sons, Inc, 1965, hal. 37.

Untuk $(R\text{-}\{0\},x)$ adalah grup, dan $2 \in R - \{0\}$. maka $2^3 = 2.2.2 = 8$, dan $2^{-3} = 2^{-1}.2^{-1}.2^{-1} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, dan $2^0 = 1$, karena 1 adalah unsur identitas di $R - \{0\}$. sedangkan $0^0 = tidak\ terdefinisi$ karena $0 \notin R - \{0\}$.

$$2^2.2^3 = 2^5 = 32$$

$$(2^2)^3 = 2^6 = 64$$

Jika $(Z_5, +)$ adalah suatu grup, $2 \in Z_5$, maka $2^3 = 2 + 2 + 2 = 4 + 2 = 1$ dan $2^{-3} = 2^{-1}.2^{-1}.2^{-1} = 3 + 3 + 3 = 1 + 3 = 4$. Sedangkan $2^0 = 0$

Teorema 4.10 Hukum Eksponen.[13]	Jika G suatu grup, $a \in$ G dan m dan n bilangan bulat, maka berlaku: a. $a^n.a^m = a^{n+m}$ b. $(a^m)^n = a^{n.m}$ c. $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = a^{-n}$

Bukti :

a) Misalkan m,n sebarang bilangan bulat positif

$$a^n.a^m = \underbrace{a.a.a.a \dots .a}_{sebanyak\ n\ suku} . \underbrace{a.a.a.a \dots .a}_{sebanyak\ m\ suku}$$

$$= \underbrace{a.a.a.a \dots .a}_{sebanyak\ n+m\ suku} = a^{n+m}$$

b) Misalkan m, n sebarang bilangan bulat positif

$$(a^m)^n = (\underbrace{a.a.a.a \dots .a}_{sebanyak\ m\ suku})^n$$

$$= \underbrace{a.a.a.a \dots .a}_{sebanyak\ m\ suku} . \underbrace{a.a.a.a \dots .a}_{sebanyak\ m\ suku} \dots \dots \underbrace{a.a.a.a \dots .a}_{sebanyak\ m\ suku} \quad (sebanyak\ n\ suku)$$

---

[13] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 21.

$$= \underbrace{a.a.a.a \ldots .a}_{sebanyak\ n.m\ suku}$$

$$= a^{n.m}$$

c) Misalkan m,n sebarang bilangan bulat positif

$$(a^{-1})^n = a^{-1}a^{-1}a^{-1} \ldots .. a^{-1} \text{ (sebanyak n suku)} = a^{-n}$$

$$= (a.a.a \ldots .a)^{-1} \quad \text{definisi}$$

$$= (a^n)^{-1} \quad \text{definisi}$$

Terbukti untuk m dan n bulat positif.

■

Bukti lengkap dari teorema ini harus dibuat kasus per kasus, yaitu jika m dan n keduanya negatif, jika m negative dan n positif, dan seterusnya, disediakan kepada pembaca sebagai latihan.

Catatan:
Untuk operasi penjumlahan, a^n didefinisikan sebagai na yang berarti bahwa $na = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{sebanyak\ n-suku}$ dimana n bulat positif.
Sedangkan untuk a^{-n} menjadi $-na = \underbrace{-a - a - a - \cdots - a}_{sebanyak\ n-suku}$.[14]

Berdasarkan Hukum Eksponen tersebut diatas untuk operasi penjumlahan menjadi:

1. $(ma) + (na) = (m+n)a$
2. $n(ma) = (nm)a$
3. $n(-a) = -(na) = -na$

[14] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal 21

Definisi 4.7 Order Unsur Grup.[15]	Misalkan G suatu grup dan $a \in G$. Order a adalah n, dimana n bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $a^n = e$. Dinotasikan dengan $O(a) = n$.
Jika tidak ada atau tidak ditemukan bilangan yang demikian, maka dikatakan order a adalah tak hingga atau nol, dan ditulis $O(a) = 0$.	

Teladan 4.19

Jika e adalah identitas suatu grup, maka $O(e) = 1$

Teladan 4.20

Misalkan $G = \{-1, 1, -i, i\}$, dimana $i = \sqrt{-1}$, ini berarti $O(1) = 1$, $O(-1) = 2$, $O(i) = 4$, $O(-i) = 4$

Teladan 4.21

Misalkan $Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ maka $O(\bar{2}) = 3$, $O(\bar{3}) = 2$, $O(\bar{4}) = 3$, $dan\ O(\bar{5}) = 6, O(0) = 1$, $O(1) = 6$.

> ***Catatan:***
> *Karena order* $2 = 3$, *maka* $2^0 = 0$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4, 2^3 = 0$,
> $2^4 = 2$, $2^5 =, , 2^6 = 0$

Teladan 4.22

Dalam himpunan bilangan bulat **Z** setiap unsur tak nolnya mempunyai order tak hingga. Artinya jika $a \in Z$, maka $O(a)=0$.

$Z = \{ \ldots, \ldots, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \ldots, \ldots \}$

Sifat-sifat sederhana dari order suatu unsur grup diberikan beberapa teorema berikut ini.

[15] *Ibid.*, hal. 26.

Teorema 4.11	Misalkan G suatu grup dan $a \in G$ dengan $o(a) = n$. Maka unsur-unsur e $= a^0\, a, a^2, a^3, \ldots,$ a^{n-1} adalah semuanya berbeda.[16]

Bukti:

Dengan pembuktian kontradiksi (diandaikan memiliki unsur yang sama). Andaikan tidak semua unsurnya berbeda.

Berarti $\exists p, q$ dan $0 \leq p < q < n$ sehingga $a^p = a^q$

$\leftrightarrow a^p(a^p)^{-1} = a^q(a^p)^{-1}$ (kedua ruas dikalikan $(a^p)^{-1}$

$\leftrightarrow \qquad e = a^q(a)^{-p}$ teorema 2.10

$\leftrightarrow \qquad e = a^{q-p}$ teorema 2.10, dimana $q - p < n$

$$a^{q-p} = e$$

Maka terdapat $q - p$ dengan $0 < q - p < n$ sehingga $a^{q-p} = e$ hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa $O(a) = n$. Dengan demikian pengandaian salah.

Jadi unsur-unsur $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}$ semuanya berbeda.

■

Teorema 4.12	Misalkan G suatu grup, $a \in G$, jika diketahui $o(a) = n$ dan $a^k = e$ jika dan hanya jika k kelipatan n.[17]

Bukti :

($\leftarrow$) Jika k kelipatan n maka ada $q \in$ Z sehingga $k = qn$ untuk suatu $n \in$ Z. Akibatnya

$\leftrightarrow a^k = a^{qn}$

$\leftrightarrow a^k = (a^n)^q$

[16] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, 1995 ...., hal 60

[17] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal 106

$\leftrightarrow a^k = e^q$ (karena $O(a) = n$)

$\leftrightarrow a^k = e$

($\rightarrow$) Sebaliknya diketahui $a^k = e$.

Menurut algoritma pembagian terdapat $q,r \in Z$ sehingga $k = qn + r$, dimana $0 \leq r < n$.

$\leftrightarrow a^k = a^{qn+r}$

$\leftrightarrow a^k = (a^{qn})a^r$

$\leftrightarrow e = (a^n)^q a^r$

$\leftrightarrow e = (e)^q a^r$

$\leftrightarrow e = a^r$

Andaikan $r \neq 0$ dan $r < n$ dengan $a^r = e$ berarti $O(a) < n$. Hal ini kontradiksi dengan $o(a) = n$. Jadi haruslah $r = 0$ sehingga $k = qn+0 = qn$ atau k kelipatan n.

■

Teorema 4.13	Misalkan G suatu grup dengan order tak hingga dan r, s bilangan bulat yang berbeda dan $a \neq e$. Maka $a^r \neq a^s$.[18]

Teorema di atas, sama artinya dengan kalimat Jika $r \neq s$ maka $a^r \neq a^s$

Bukti : (Menggunakan bukti kontradiksi)

Andaikan $a^r = a^s$

$a^r (a^s)^{-1} = a^s(a^s)^{-1}$

$a^r(a^{-s}) = e$

$a^{r-s} = e$

[18] *Ibid.*, hal. 107.

karena $a^{r-s} = e$, berarti $o(a) = r-s$, hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa a mempunyai order tak hingga. Akibatnya berdasarkan definisi order unsur grup didapat $r - s = 0$ atau $r = s$. Hal ini kontradiksi dengan $r \neq s$. Jadi pengandaian $a^r = a^s$ adalah salah. Terbukti $a^r \neq a^s$.

■

E. SUBGRUP DAN SIFAT-SIFATNYA

Kita telah mempelajari tentang konsep himpunan yang merupakan pengetahuan prasyarat untuk mengkaji suatu grup. Misalkan pada himpunan tak kosong A memiliki himpunan bagian B ditulis A ⊆ B, artinya semua anggota himpunan A termuat dalam himpunan B. Hal tersebut juga berlaku pada suatu grup. Melalui analogi pada konsep himpunan, jika suatu grup yang semua anggota termuat di dalam grup lain (dibawah operasi biner yang sama) disebut subgrup.

Sebagai ilustrasi misalnya himpunan semua bilangan-bilangan genap dibawah operasi penjumlahan merupakan suatu grup, karena himpunan bilangan genap merupakan himpunan bagian dari bilangan bulat Z, dan himpunan bilangan bulat Z juga merupakan grup dibawah operasi penjumlahan, maka himpunan bilangan genap merupakan subgrup dari himpunan bilangan bulat Z.

Definisi 4.8 *Subgrup.*[19]	Misalkan G suatu grup dengan operasi biner * dan jika $H \subseteq G$ serta $H \neq \emptyset$. Maka H disebut subgrup G, jika H adalah suatu grup dibawah operasi biner *.
Notasi dari H subgrup G adalah $H \leq G$.	

[19] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 45.

Teladan 4.23

Jika $\langle R, +\rangle$ adalah grup, dan $\langle Z, +\rangle$ juga grup. Karena $Z \subseteq R$. Ini berarti bahwa Z subgrup R. dapat ditulis $Z \leq R$

Perhatikan bahwa $\{1,-1\} \subseteq Z$, tetapi $\{1,-1\}$ grup dibawah terhadap perkalian, ini berarti bahwa $\{1,-1\}$ bukan subgrup Z.

Teladan 4.24

Perhatikan bahwa $\langle R - \{0\}, x\rangle$ adalah grup, dan $\langle Q - \{0\}, x\rangle$ juga suatu grup, dan karena $\langle Q - \{0\}\rangle \subseteq \langle R - \{0\}\rangle$. Maka dapat dikatakan bahwa $\langle Q - \{0\}\rangle$ subgrup $\langle R - \{0\}\rangle$.

Begitu juga karena $\{1,-1\}$ adalah grup dibawah operasi perkalian berarti $\{1,-1\}$ subgrup $\langle R - \{0\}\rangle$.

Teladan 4.25

Karena $\{ e \}$ dan G masing-masing merupakan subset dari G, maka $\{ e \}$ dan G adalah subgrup-subgrup dari G dan disebut subgrup tak sejati, sedangkan subgrup-subgrup selain itu disebut subgrup sejati.

Subgrup yang hanya memuat $\{ e \}$ disebut subgrup trivial, sedangkan yang lainnya disebut subgrup tak trivial.

Teladan 4.26

Misalkan $H = \{ \pi_1, \pi_2, \pi_3 \}$ karena $\langle H, o\rangle$ adalah suatu grup, maka H disebut subgrup S_3 diatulis $H \leq S_3$

$\circ$	π_1	π_2	π_3
π_1	π_1	π_2	π_3
π_2	π_2	π_3	π_1
π_3	π_3	π_1	π_2

Tabel 4.4

Teorema 4.14	Misalkan G suatu grup, $H \subseteq G, dan\ H \neq \emptyset$. H dikatakan subgrup G jika dan hanya jika memenuhi berikut.[20] *a)* H tertutup dibawah operasi G. Artinya untuk setiap $a,b \in H$ maka $ab \in H$ *b)* Setiap unsur H memiliki invers. Artinya jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$

Bukti :

($\rightarrow$) Jika H subgrup berarti H adalah grup, sehingga menurut definisi grup H tertutup, dan setiap unsur di H memiliki invers. Ini berarti memenuhi sifat (1) dan (2).

($\leftarrow$) Sebaliknya, jika H memenuhi sifat (1) dan (2) maka akan dibuktikan H subgrup. Untuk membuktikan H subgrup, akan ditunjukkan bahwa H suatu grup.

- Sifat tertutup dipenuhi oleh sifat (1)
- Sifat asosiatif terpenuhi, akibat dari $H \subseteq G$ artinya $\forall a,b,c \in H$ maka $a,b,c \in G$, karena G grup maka berlaku sifat asosiatif, artinya $\forall a,b,c \in G$, berlaku $(ab)c = a(bc)$.

Karena $H \subseteq G$, berarti setiap unsur H juga merupakan unsur dari G dan karena G grup, berarti dalam H juga berlaku $\forall a,b,c \in H, (ab)c = a(bc)$

- Setiap unsur di H mempunyai invers karena sifat (2)
- Jika $a \in H$ dan $a^{-1} \in H$ (menurut 2), selanjutnya jika a, $a^{-1} \in H$ maka $aa^{-1} = e \in H$ (menurut 1). Jadi H memuat unsur identitas.

[20] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 46.

Oleh karenanya H adalah grup. Karena $H \subseteq G$ dan H grup, maka H subgrup dari G.

■

Teorema 4.15	Misalkan G suatu grup, $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$. H dikatakan subgrup G jika dan hanya jika berlaku $\forall x, y \in H$, maka $xy^{-1} \in H$.[21]

Bukti :

(→) Jika H subgrup dari G, maka H termasuk grup. Karena H grup maka aksioma-aksioma grup dipenuhi, sehingga syarat perlu berlaku ($\forall x,y \in H$, maka $xy^{-1} \in H$)
(←) Sebaliknya diketahui $\forall x,y \in H$, maka $xy^{-1} \in H$

Akan dibuktikan syarat cukup dari teorema, yaitu H subgrup.

- Assosiatif berlaku $H \subseteq G$.
- Misalkan $x \in H$ maka menurut hipotesis $xx^{-1} = e \in H$.
- Selanjutnya jika $x, e \in H$ maka menurut hipotesis $ex^{-1} = x^{-1} \in H$.
- Misalkan $x, y \in H$ maka $x, y^{-1} \in H$ (menurut 2), akibatnya menurut hipotesis diperoleh $x(y^{-1})^{-1} = xy \in H$ sehingga sifat tertutup terpenuhi. Berdasarkan definisi didapat H adalah grup.

Karena $H \subseteq G$ dan H grup maka H dikatakan subgrup G.

■

Pada dasarnya kedua teorema di atas (teorema 4.14 dan 4.15) dapat digunakan untuk mempermudah dan mempercepat

[21] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 46.

dalam pembuktian suatu subgrup. Di bawah ini diberikan contoh-contoh tentang penggunaan kedua teorema tersebut.

Teladan 4.27

Diberikan $M_2(Z) = \{A_{2x2} |\ |A| \neq 0\}$ dengan entry-entry bilangan bulat} dan $M_2^*(Z) = \{B_{2x2} |\ |B| = 1\}$, jika $\langle M_2(Z), x\rangle$ adalah suatu grup. Buktikan bahwa $M_2^*(Z)$ subgrup dari $M_2(Z)$

Solusi :

Berdasarkan definisi diatas didapat bahwa $M_2^*(Z) \subseteq M_2(Z)$ (alasannya bahwa determinan setiap unsur $M_2^*(Z)$ adalah tidak sama dengan nol, yang berarti termuat di $M_2(Z)$).

Misalkan ambil sembarang matriks $X, Y \in M_2^*(Z)$, maka $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dan $Y = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Dimana $|X| = ad - bc = 1$ dan $|Y| = ps - qr = 1$

Selanjutnya $XY = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |XY| &= (ap + br)(cq + ds) - (aq + bs)(cp + dr) \\ &= apcq + apds + brcq + brds - aqcp - aqdr - bscp \\ &\qquad - bsdr \\ &= apcq + apds + brcq + brds - aqcp - aqdr - bscp \\ &\qquad - bsdr \\ &= adps + bcqr - adqr - bcps \\ &= ad\,(ps - qr) - bc(ps - qr) \\ &= ad\,(1) - bc(1) \\ &= ad - bc = 1 \end{aligned}$$

Jadi $|XY| = 1$

Karena $|XY| = 1$ berarti $XY \in M_2^*(Z)$ (sifat tertutup terpenuhi)

Langkah selanjutnya misalkan untuk sebarang $X \in M_2^*(Z)$. ini berarti bahwa $|X| = 1$ atau det $(X) \neq 0$ maka x^{-1} ada.

$x^{-1} = \frac{1}{|x|} adj(X) = \frac{1}{1} adj(X) = adj(X)$ sehingga $|X^{-1}| = |adj(X)| = 1$. Hal ini berarti bahwa $X^{-1} \in M_2^*(Z)$. syarat cukup teorema 3.14 terpenuhi.

Terbukti $M_2^*(Z)$ subgrup dari $M_2(Z)$

Teladan 4.28

Misalkan F adalah himpunan yang anggotanya merupakan fungsi-fungsi riil dengan domain R dibawah operasi penjumlahan fungsi, maka $\langle F, + \rangle$ adalah grup.

1. Buktikan F^* yaitu himpunan dengan anggota fungsi-fungsi riil yang kontinu pada domain R merupakan subgrup dari F.
2. Apakah himpunan-himpunan fungsi yang terdefrensial-kan merupakan subgrup dari F?

Solusi :

1. Jelaslah bahwa $F^* \subseteq F$
   Selanjutnya misalkan $f, g \subseteq F$. Maka invers dari g yaitu $-g$, dengan $(-g)(x) = -g(x)$ juga fungsi kontinu, sehingga $f+(-g)$ juga fungsi kontinu, karena penjumlahan dua fungsi kontinu merupakan fungsi yang kontinu sehingga syarat cukup teorema 4.15 terpenuhi. Jadi terbukti F* subgrup dari F.

2. Jika $F' \subseteq F$ dengan F' himpunan fungsi-fungsi yang didefrensialkan, menurut Teorema 4.14 maka F' juga merupakan subgrup F sebab penjumlahan fungsi yang terdeferensial-kan merupakan fungsi yang terdefrensialkan

kan juga. Selanjutnya jika $f \in F'$ terdiferensialkan maka $-f$ juga terdiferensialkan. Hal ini berarti $-f \in F'$.

Teorema 4.16	Jika H dan K masing-masing subgrup G, maka $H \cap K$ juga merupakan subgrup G.[22]

Bukti:

Ambil sebarang $x, y \in H \cap K$, maka $x, y \in H$ dan $x, y \in K$. Karena H dan K subgrup-subgrup G, menurut teorema 4.15 berlaku $xy^{-1} \in H$ dan $xy^{-1} \in K$. Akibatnya $xy^{-1} \in H \cap K$. Sehingga menurut teorema 4.15 maka $H \cap K$ subgrup G.

■

Teorema 4.17	Misalkan G suatu grup, C adalah koleksi subgrup-subgrup dari G, maka irisan subgrup-subgrup dari G di C juga merupakan subgrup G.

Bukti:

Dengan menggunakan langkah-langkah pembuktian yang analog dengan bukti Teorema 4.16, maka teorema 4.17 dapat dibuktikan. Untuk menumbuhkan kepercayaan pembaca, bukti dari teorema ini ditinggalkan sebagai latihan. (bisa dicoba sendiri!)

Teorema 4.18	Misalkan G suatu grup dan H subgrup G, maka berlaku ketentuan berikut.[23] 1. $HH = H$ 2. $H^{-1} = \{ h^{-1} \mid h \in H \} = H$

---

[22] Biarkhoff, G & S. Mac Lane. *A Survey of Modern Algebra 3rd*. New York : Mac Millan, 1965, hal. 72.

[23] *Ibid.*, hal. 101.

Bukti :

1. Misalkan $x \in HH$, maka ada $h_1, h_2 \in H$ sehingga $x = h_1h_2$. Karena H subgrup G, maka jika $h_1, h_2 \in H$ akibatnya $h_1h_2 \in H$, karena $h_1h_2 = x$, ini berarti bahwa $x \in H$.

   Jadi $HH \subseteq H$.......(1)

   Sebaliknya, jika $x \in H$, maka $x = xe$. Karena $x, e \in H$ maka $xe \in HH$ atau $x \in HH$.

   jadi $H \subseteq HH$..... (2)

   berdasarkan (1) dan (2) dapat disimpulkan $HH = H$ (Terbukti)

2. Untuk membuktikan $H = H^{-1}$. Kita bisa menunjukkan bahwa $H \subseteq H^{-1}$ dan $H^{-1} \subseteq H$.

   Misalkan jika $x \in H$, karena H subgrup maka berlaku $x^{-1} \in H$,

   selanjutnya $(x^{-1})^{-1} \in H^{-1}$ atau $x \in H^{-1}$

   jadi $H \subseteq H^{-1}$ .....(1)

   Sebaliknya, misalkan jika $x \in H^{-1}$ maka ada suatu $h \in H$, sedemikian sehingga $x = h^{-1}$.

   Karena H subgrup dan $h \in H$ maka $h^{-1} \in H$. Karena $x = h^{-1}$ maka mengakibatkan $x \in H$.

   Jadi $H^{-1} \subseteq H$..... (2)

   Berdasarkan (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa $H = H^{-1}$ ■.

Misalkan G suatu grup, $a \in G$, maka menurut teorema 4.17 berarti irisan semua subgrup-subgrup yang memuat a juga merupakan subgrup, dan subgrup tersebut merupakan subgrup terkecil dari seluruh subgrup yang memuat a.

Ternyata subgrup sebagaimana teorema di atas, merupakan suatu himpunan yang bebrentuk $\{\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0=e, a, a^2, a^3, \ldots\}$, dimana himpunan yang dimaksud dapat dinotasikan sebagai $\{ a^n / n \in Z \}$. Apabila G adalah grup dibawah operasi penjumlahan atau grup aditif maka subgrup tersebut dinotasikan sebagai $\{ na / n \in Z \}$.

Teorema 4.19	Misalkan G suatu grup dan $a \in G$. Maka $H = \{a^n \;/ n \in Z\}$ merupakan subgrup G dan merupakan subgrup terkecil di G yang memuat a.[24]

Bukti :

Misalkan kita ambil sebarang $x,y \in H$. Maka ada $p,q \in Z$ sehingga $x = a^p$ dan $y = a^q$, selanjutnya didapat:

$$xy^{-1} = a^p(a^q)^{-1} = a^p(a^{-q}) = a^{p-q}, \text{ dimana } p - q \in Z$$

Karena $a \in G$ dan $p - q \in Z$ serta $xy^{-1} = a^{p-q} \in H$ maka menurut teorema 4.15 berarti H subgrup G.

■

Untuk membuktikan terkecilnya :

Misalkan H^* sebarang subgrup G yang memuat a, dan untuk sebarang $x \in H$, maka ada $n \in Z$ sehingga $x = a^n$. Selanjutnya karena H^* subgrup yang memuat a maka $a^n \in H^*$ atau $x \in H^*$. Akibatnya $H \subseteq H^*$. Jadi terbukti bahwa H subgrup terkecil yang memuat a. ■

[24] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 54.

F. SUBGRUP SIKLIK

Definisi 4.9 Subgrup siklik.[25]	Subgrup H sebagaimana pada teorema 4.19 di atas disebut subgrup siklik yang dihasilkan oleh a dan dinotasikan dengan $\langle a \rangle$.
Secara simbolis	$H = \langle a \rangle = \{ a^n : n \in Z \}$. a disebut penghasil atau pembangkit atau generator. Jika $G = \langle a \rangle$ maka G disebut grup siklik yang dihasilkan oleh a.

Teladan 4.29

Diketahui $\langle Z, + \rangle$ adalah grup dan $3Z = \{ ..., -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\}$ merupakan subgrup Z yang dihasilkan oleh 3.

Sehingga
$3Z = \langle 3 \rangle = \{3^n : n \in Z\} = \{ \dots, 3^{-2}, 3^{-1}, 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \dots \}$ atau

$$3Z = \{ \dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9 \dots \}$$

Berdasarkan ilustrasi contoh di atas, berarti untuk setiap $x \in 3Z$, maka ada $n \in Z$ sehingga $x = 3^n = 3n$.

Jadi $3Z = \{ 3n \mid n \in Z \} = \langle 3 \rangle$ yang merupakan subgrup siklik di Z yang dihasilkan oleh 3.

Teladan 4.30

$Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ adalah grup siklik yang dihasilkan oleh 1 dan 3 sehingga dapat dinyatakan $Z_4 = \langle 3 \rangle = \langle 1 \rangle$.

Dalam hal ini kita dapat memeriksa dengan melakukan percobaan algoritme pada himpunan $\langle 3 \rangle = \{3^n : n \in Z\}$ atau $\langle 1 \rangle = \{1^n : n \in Z\}$.

---

[25] *Ibid.*, hal. 53.

Teladan 4.31

Misalkan Z adalah himpunan bilangan bulat. Z adalah grup siklik yang dihasilkan oleh 1 dan -1, sehingga $Z = \langle -1 \rangle = \langle 1 \rangle$.

Teladan 4.32

Telah dibahas pada teladan 3.25 bahwa $H = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ merupakan subgrup grup S_3. berdasarkan tabel 3.4 diperoleh:

$$(\pi_2)^1 = \pi_2$$

$$(\pi_2)^2 = \pi_3$$

$$(\pi_2)^3 = \pi_1$$

Sehingga untuk $\pi_2 \in H$, maka ada $n \in Z$ sedemikian sehingga

$$H = \{(\pi_2)^n : n \in Z\} = \langle \pi_2 \rangle.$$

Dengan cara yang sama π_3 juga merupakan penghasil atau pembangkit atau generator dari H, sehingga $H = \langle \pi_2 \rangle = \langle \pi_3 \rangle$ yaitu subgrup siklik dari S_3 yang dihasilkan oleh π_2 atau π_3.

Teladan 4.33

Diberikan grup $G = \{ A, B, C, D \}$ dimana

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

G dikatakan bukan grup siklik dibawah operasi perkalian matriks. Sebab tidak ada matrik dalam keanggotan G yang membentuk/ membangun G.

(silakan diperiksa!)

$\langle A \rangle = \{A\} \neq G$
$\langle B \rangle = \{A, B\} \neq G$

$\langle C\rangle = \{A, C\} \neq G$
$\langle D\rangle = \{A, D\} \neq G$

Berdasarkan algoritme di atas, tidak ada matriks $X \in G$ yang membangun G⟩ hal ini sama artinya bahwa G bukan grup siklik.

Ingat:
jika $a \in G$, dengan G suatu grup dan $O(a) = n$ maka

$$a^n = e$$
$$a^{n+1} = a^n a = ea = a$$
$$a^{n+2} = a^n a^2 = ea^2 = a^2$$
$$\vdots$$
$$a^{2n} = a^n a^n = e.e = e \text{ dan seterusnya}$$

Sehingga keanggotaan dari subgrup siklik yang dihasilkan oleh a dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\langle a\rangle = \{a^0 = e,\ a^1, a^2, a^3, \ldots\ldots\ a^{n-1}\}$$

Lemma 4.1
Misalkan G grup, $a \in G$ dan $O(a)$ hingga, maka $O(a) = |\langle a\rangle|$.[26]

Bukti :

Misalkan $O(a) = n$, berarti $a^n = e$. Grup siklik yang dihasilkan oleh a, dapat ditulis
$\langle a\rangle = \{a^0 = e,\ a^1, a^2, a^3, \ldots\ldots\ a^{n-1}$ selanjutnya berdasarkan teorema 4.11 menyatakan unsur-unsur $a^0 = e,\ a^1, a^2, a^3, \ldots\ldots\ a^{n-1}$ semuanya berbeda. Maka $|\langle a\rangle| = n$.

Ini berarti bahwa $O(a) = |\langle a\rangle| = n$.

■

[26] *Ibid.*, hal. 57.

Teorema berikut ini merupakan sifat-sifat dasar dari grup siklik.

Teorema 4.20	Setiap subgrup dari grup G adalah siklik.[27] Dengan kata lain, jika $a \in G$ dan H subgrup G maka H dapat dinyatakan dalam bentuk $\langle a \rangle = H$

Bukti :

Misalkan G grup dan H subgrup G. Jika $H = \{ e \} = \langle e \rangle\rangle$ maka H siklik.

Jika $H \neq \{ e \}$, berarti ada $a \in G$ sehingga $a^m \in H$.

Misalkan $m \in Z^+$ minimal sehingga $a^m \in H$.

Akan dibuktikan bahwa $H = \langle a^m \rangle\rangle$ yaitu a^m penghasil/generator dari H. Kita ambil sembarang $x \in H$, maka terdapat $p \in Z$ sehingga $x = a^p$. Selanjutnya menurut algoritma pembagian ada $q, r \in Z$ sehingga:

$$p = qm + r, \qquad dimana \ 0 \leq r < m$$

$$\leftrightarrow \ a^p = a^{qm+r}$$

$$\leftrightarrow \ a^p = a^{qm} a^r$$

$$\leftrightarrow \ a^p = (a^m)^q a^r$$

$$\leftrightarrow \ a^r = (a^m)^{-q} a^p$$

Karena H grup dengan $(a^m)^{-q} \in H$ dan $a^p \in H$, sehingga $a^m \in H$

Akibatnya $a^r \in H$

Andaikan $r \neq 0$ maka kontradiksi dengan $m \in Z^+$ minimal sehingga $a^m = e$. Hal ini berarti

[27] *Ibid.*, hal. 57.

$$(a^m)^{-q}a^p = e$$

$$\leftrightarrow \quad a^p = (a^m)^q$$

Karena setiap $x \in H$, terdapat $q \in Z$ sehingga $x = (a^m)^q$ maka $H = \langle a^m \rangle$

Jadi H adalah siklik.

■

G. KOSET DAN TEOREMA LAGRANGE

Sebelum membahas tentang koset, perlu diingat kembali sifat-sifat suatu realasi diantaranya sifat refleksif, simetris dan transitif. Dengan kata lain suatu relasi R pada himpunan G dikatakan bersifat:

(a) *Refleksif* berarti jika xRx untuk semua $x \in G$.
(b) *Simetrik* berarti jika xRy maka yRx.
(c) *Transitif* berarti jika xRy dan yRz maka xRz

Adakalanya dalam referensi lain representasi relasi dari xRx ditulis $(x, x) \in R$. Dengan pengertian yang sama berarti $xRy = (x, y) \in R$, dan seterusnya. Suatu relasi dikatakan ekivalensi jika relasi tersebut bersifat *refleksif, simetris,* dan *transitif.*

Teladan 4.34

Misalkan dalam grup Z, maka $3Z = \langle 3 \rangle$ merupakan subgrup Z. Relasi kongruensi modulo *3* pada 3Z didefinisikan sebagai $a \equiv b \ (mod\ 3)$ jika dan hanya jika $a - b \in 3Z = \langle 3 \rangle$ merupakan relasi ekivalensi (relasi yang memiliki sifat *refleksif, simetris,* dan *transitif*). Adapun klas-klas ekivalensi dari 3Z adalah *0+3Z, 1+3Z* dan *2+3Z.*

Selanjutnya jika *Z* diganti dengan suatu grup *G*, dan $\langle 3 \rangle$ diganti dengan H, dimana H subgrup *G*, dan ekspresi dari *a-b* tentunya berubah menjadi ab^{-1} dalam notasi perkalian secara umum. Relasi yang diberikan adalah relasi ~ pada G, maka klas ekivalensi dari relasi inilah yang disebut koset dari H. Selanjutnya jika G grup hingga, maka dapat dibuktikan bahwa order H akan membagi order G.

Teorema 4.21	Misalkan H subgrup G. Didefinisikan suatu relasi ~ pada G adalah $a \sim_L b$ jika dan hanya jika $a^{-1}b \in H$. Maka relasi ~ merupakan relasi ekivalensi.[28]

Bukti.

(Untuk membuktikan relasi ekivalen, akan ditunjukkan bahwa relasi tersebut mememuhi sifat-sifat refleksif, simetris, dan transitif)

Sifat Refreksif.

Misal $x \in G$, maka $x^{-1}x = e$. Karena H subgrup G maka $e \in H$. sehingga $x^{-1}x \in H$. Jadi $x \sim_L x$

Sifat Simetris.

Misal $x \sim_L y$. Maka $x^{-1}y \in H$, karena H subgrup, $(x^{-1}y)^{-1} \in H$ atau $y^{-1}x \in H$, Jadi $y \sim_L x$.

Sifat Transitif.

Misalkan $x \sim_L y$ dan $y \sim_L z$ maka $x^{-1}y \in H$ dan $y^{-1}z \in H$. Karena H subgroup maka $(x^{-1}y)(y^{-1}z) = x^{-1}z \in H$. Jadi $x \sim_L z$. ■

[28] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, John Wiley & Sons, Inc, 1995, hal. 57.

Klas ekivalensi dari $\sim_L$ mengakibatkan adanya partisi pada G. Klas ekivalensi yang memuat a unsur-unsurnya adalah semua unsur-unsur $x \in G$ sehingga $a \sim_L x$ maka

$$a^{-1}x \in H$$

$$\rightarrow a^{-1}x = h \text{ untuk suatu } h \in H$$

$$\rightarrow \quad x = ah$$

Jadi klas ekivalensi yang memuat a adalah $\{ah /\ h \in H\}$ yang dinotasikan dengan aH.

Teorema 4.22	Misalkan H subgrup G. Didefinisikan suatu relasi $\sim_R$ pada G yaitu $a \sim_R b$ jika dan hanya $ab^{-1} \in H$. Maka relasi $\sim_R$ merupakan relasi ekivalensi.[29]

Bukti dari teorema diatas adalah analog dengan bukti Teorema 4.21 dan diperoleh klas ekivalensi yang memuat a adalah $\{ha \mid h \in H\} = Ha$

Definisi 4.10 Koset kiri dan koset kanan.[30]	Misalkan H adalah subgrup G dan $a \in G$. Himpunan bagian $aH = \{ ah /\ h \in H \}$ disebut koset kiri dari H yang memuat a, sedangkan $Ha = \{ ha / h \in H \}$ disebut koset kanan dari H yang memuat a.

Terlihat bahwa koset kiri merupakan klas ekivalensi dari relasi $\sim_L$ dan koset kanan merupakan klas ekivalensi relasi $\sim_R$.

---

[29] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition,* Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 59.

[30] *Ibid.*, hal. 58.

Jika G grup komutatif maka diperoleh $aH = Ha$, yaitu koset kiri sama dengan koset kanan, sehingga aH disebut koset dari H.

Teladan 4.35

Telah dibahas sebelumnya bahwa 3Z adalah subgrup Z dibawah operasi penjumlahan.

Koset-koset kiri dari 3Z yang memuat m ditulis $m + 3Z$, untuk suatu $m \in$ Z.

Jika $m = 0$ maka koset kiri yang memuat 0 adalah :

$0 + 3Z = \{ ..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\} = 3Z$

Jika m = 1 maka koset kiri yang memuat 1 adalah :

$1 + 3Z = \{ ..., -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, ... \}$

Jika m = 2 maka koset kiri yang memuat 2 adalah:

$2 + 3Z = \{ ..., -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, ... \}$

Koset-koset kiri dari 3Z adalah 0 + 3Z, 1 + 3Z, 2 + 3Z.

Gabungan dari koset-koset kiri dari 3Z membentuk Z. Karena irisan koset-koset kiri dari 3Z merupakan himpunan kosong, berarti koleksi koset-koset kiri diatas adalah merupakan partisi dari Z.

Z
$0 + 3Z$
$1 + 3Z$
$2 + 3Z$

Karena Z grup komutatif maka koset kiri $m+3Z$ sama dengan koset kanan $3Z+m$

Teladan 4.36

$(Z_6, +)$ adalah grup komutatif.

$H = \{\overline{0},\ \overline{3}\}$ adalah subgrup dari Z_6

Koset mumuat $\overline{0}$ adalah $\overline{0} + \{\overline{0}, \overline{3}\} = \{\overline{0}, \overline{3}\}$

Koset memuat $\bar{1}$ adalah $\bar{1} + \{\bar{0}, \bar{3}\} = \{\bar{1}, \bar{4}\}$

Koset memuat $\bar{2}$ adalah $\bar{2} + \{\bar{0}, \bar{3}\} = \{\bar{2}, \bar{5}\}$

Terlihat bahwa koleksi koset-koset kiri merupakan partisi Z_6

Z_6

$\{\bar{0}, \bar{3}\}$
$\{\bar{1}, \bar{4}\}$
$\{\bar{2}, \bar{5}\}$

Teladan 4.37

Berdasarkan Tabel 4.3 tentang grup simetris S_3. Misalkan kita nyatakan $H = \{\pi_1, \pi_6\}$. Sehingga dapat ditentukan koset-koset kiri dari H adalah:

$$\pi_1 H = H = \{\pi_1, \pi_6\}$$

$$\pi_2 H = \{\pi_2 \pi_1, \pi_2 \pi_6\} = \{\pi_2, \pi_4\}$$

$$\pi_3 H = \{\pi_3 \pi_1, \pi_3 \pi_6\} = \{\pi_3, \pi_5\}$$

Sedangkan koset-koset kanan dari H adalah:

$$H\pi_1 = H = \{\pi_1, \pi_6\}$$

$$H\pi_2 = \{\pi_1 \pi_2, \pi_6 \pi_2\} = \{\pi_2, \pi_5\}$$

$$H\pi_3 = \{\pi_1 \pi_3, \pi_6 \pi_3\} = \{\pi_3, \pi_4\}$$

berdasarkan hasil algoritme di atas terlihat koleksi koset-koset kiri maupun koleksi koset-koset kanan merupakan partisi dari S_3. Perhatikan pula bahwa $\pi_2 H \neq H\pi_2$, juga $\pi_3 H \neq H\pi_3$. Hal ini terjadi karena S_3 bukan grup komutatif.

Sebagai konsekwensi bahwa koset-koset kiri maupun koset-koset kanan merupakan klas ekivalensi dari relasi ekivalensi ~ pada G diperoleh teorema berikut ini.

Teorema 4.23	Misalkan H subgrup G, maka kondisi-kondisi berikut adalah ekuivalen. 1. $a^{-1}b \in H$ 2. $b = ah$ untuk suatu $h \in H$ 3. $b \in aH$ 4. $aH = bH$.[31]

Bukti dari teorema diatas adalah analog untuk koset kanan.

Teorema 4.24	Misalkan H subgrup grup G. Maka ada korespondensi satu-satu (fungsi *bijektif*) dari H ke koset kiri aH.[32]

Bukti:

Misalkan fungsi $f : H \to aH$ dengan formola $f(h) = ah$, $\forall h \in H$. akan dibuktikan bahwa f *injektif* dan *surjektif*.

a). f adalah fungsi *injektif*, sebab jika $f(h_1) = f(h_2)$ maka $ah_1 = ah_2$ dengan kanselasi kiri diperoleh $h_1 = h_2$.

b). f adalah fungsi *surjektif*, sebab $\forall x \in aH$ maka $x = ah$, untuk suatu $h \in H$, dan terdapat $h \in H$ sedemikian sehingga $f(h) = ah = x$. Karena f adalah *injektif* dan *surjektif* maka f *bijektif* (*korespondensi satu-satu*) dari H ke aH.

■

[31] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 75.

[32] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 60.

Lemma 4.2
Jika G suatu grup hingga, maka banyaknya unsur (order) setiap koset kiri adalah sama dengan banyaknya unsur (order) subgrup G.[33]

Dengan kata lain jika H subgrup G dan aH koset kiri dari H, maka $O(aH) = O(H)$

Hal ini merupakan konsekwensi dari adanya korespondensi satu-satu atau fungsi bijektif dari H ke koset kiri aH

Bukti dari teorema ini juga dapat digunakan terhadap koset kanan.

Sebagai konsekuensi dari uraian di atas adalah jika G suatu grup hingga, maka order dari subgrup H membagi order grup G. Hal ini disajikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 4.25 Teorema Lagrange	Misalkan G grup hingga dan H subgrup G. maka order H membagi order G.[34]

Bukti :

Misalkan $O(G) = n$ dan $O(H) = m$. Maka menurut akibat Teorema 4.24, setiap koset kiri dari H berorder m. Misalkan r adalah banyak koset-koset kiri dari H. Karena koleksi koset-koset kiri merupakan partisi dari G maka diperoleh $n = r.m$. ini berarti bahwa m merupakan faktor n. Atau m membagi n. Hal ini berarti O(H) membagi O(G). ■

Ilustrasi bukti teorema di atas, dapat ditunjukkan melalui tabel 4.5 berikut.

[33] *Ibid.*, hal. 60.
[34] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 89.

$O(eH) = m$	$O(a_1H) = m$	$O(a_2H) = m$
$O(a_3H) = m$	$O(a_5H) = m$	$O(a_6H) = m$
$O(a_7H) = m$	………	$O(a_{r-1}H) = m$

Tabel 4.5

Teorema 4.26	Setiap grup G dengan order prima adalah siklik.[35]

Bukti :

Misalkan G suatu grup dan $O(G) = p$, dimana p prima, dan misalkan $a \in G$, $a \neq e$. Maka $\langle a \rangle$ subgrup siklik dari G. Berdasarkan Teorema Lagrange $|\langle a \rangle|$ membagi $O(G)$. Berarti $|\langle a \rangle| = p$ atau 1. Akan tetapi karena $a \neq e$ maka $|\langle a \rangle| \neq 1$. Sehingga haruslah $|\langle a \rangle| = p$, yang mengakibatkan $|\langle a \rangle| = O(G)$. Ini berarti bahwa $G = \langle a \rangle$. Terbukti G siklik.

■

Jika H adalah subgrup G dengan order prima p menurut Teorema Lagrange $|H| = p$ atau 1. Ini menunjukkan bahwa $H = G$ atau $H = \{ e \}$.

Akibatnya H bukan subgrup sejati dari G.

Lemma 4.3
Setiap grup G dengan order prima tidak mempunyai subgrup sejati.[36]

[35] *Ibid.*, hal. 90.

[36] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 92.

Bukti:

Bukti dari akibat 4.3 ini diperoleh dari teorema lagrange bahwa order subgrup mebagi order grup, karena O(G) = p, berarti order subgrupnya adalah 1 atau p, jika order subgrup 1 maka subgrupnya $\{ e \}$ atau jika order subgrup adalah p, maka subgrup tersebut adalah G itu sendiri. atau menurut teorema 4.26 yang berarti subgrup adalah $\{e\}$ atau G itu sendiri.

■

Teorema 4.27	Order setiap unsur-unsur grup hingga membagi order grupnya.[37] Dengan kata lain jika $a \in G$ maka $O(a)$ membagi $O(G)$.

Bukti :

Misalkan $a \in G$. Menurut akibat 4.1, $O(a) = |\langle a \rangle|$, karena $\langle a \rangle$ subgrup G maka menurut Teorema Lagrange $|\langle a \rangle|$ membagi O(G), sehingga O(a) membagi O(G).

■

Definisi 4.11	Banyaknya koset–koset subgrup H di grup G disebut indeks dari H di G, dinotasikan (G:H).[38]

Teladan 4.38

Diberikan grup simetris S_3 pada teladan sebelumnya. Karena order dari S_3 adalah 6, maka subgrup-subgrup sejatinya berorder 2 atau 3.

[37] *Ibid.*, hal. 93.
[38] *Ibid.*

Teladan 4.39

Buktikan setiap subgrup sejati dari grup G yang berorder pq, dengan p, q bilangan prima adalah siklik.

Bukti :

Misalkan H subgrup sejati dari grup G. Maka menurut Teorema Lagrange 3.25 O(H) membagi O(G). Karena O(G)=pq ini berarti O(H) = p atau O(H) = q, karena p, q bilangan prima, berarti H berorder prima. Menurut teorema 3.26 H adalah subgrup siklik.

■

H. GRUP HASIL KALI LANGSUNG

Misalkan $G_1, G_2, G_3, \ldots . G_n$ masing-masing grup dengan unsur identitasnya *e*$_i$, dimana *i = 1, 2, 3, ..., n*.

Himpunan tersebut di atas dapat dinyatakan dengan notasi berikut.

$$\prod_{i=1}^{n} G_i = G_1 x\ G_2 x G_3 x\ \ldots . x\ G_n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots, a_n) : a_i \in G_i\ dan\ i = 1, 2, \ldots n\}$$

Definisikan Operasi perkalian pada $\prod_{i=1}^{n} G_i$ sebagai berikut:
$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots, a_n b_n)$

Dari hasil operasi di atas, berarti operasi perkalian tersebut merupakan operasi biner, karena $(a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots, a_n b_n) \in G_1 x\ G_2 x G_3 x\ \ldots . x\ G_n$

Teladan 4.40

Misalkan$Z_3 x Z_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1)$dibawah operasi penjum-lahan adalah grup.

Solusi:

Untuk menunjukkan bahwa $Z_3 x Z_2$ dibawah operasi + adalah grup kita tunjukkan sifat-sifat grup terpenuhi di $Z_3 x Z_2$. Unsur identitasnya (0,0). Setiap unsurnya memiliki invers, seperti

$$(0,0)^{-1} = (0,0)$$

$$(0,1)^{-1} = (0,1)$$

$$(1,0)^{-1} = (2,0)$$

$$(1,1)^{-1} = (2,1)$$

$$(2,0)^{-1} = (1,0)$$

$$(2,1)^{-1} = (1,1)$$

KarenaZ_3 grup dan Z_2 grup dibawah operasi penjumlahan, maka sifat asosiatif juga terpenuhi di $Z_3 x Z_2$

Teorema 4.28	$\left\langle \prod G_i, . \right\rangle$ merupakan grup dan disebut grup hasil kali langsung.[39]

Tidak sukar untuk membuktikan teorema ini. Silakan buktikan !

Unsur identitas adalah ($e_1, e_2, ..., e_n$) dan invers dari ($a_1, a_2, ... a_n$) adalah ($a_1^{-1}, a_2^{-1}, ..., a_n^{-1}$)

Untuk notasi aditif, $\prod G_i$ dinotasikan dengan

$$\prod_{i=1}^{n} G_i = G_1 \otimes G_2 \otimes .... \otimes G_n$$ dan disebut grup jumlah langsung dari G_i, *dimana* $i = 1, 2, ..., n$

[39] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition,* Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 93.

Jika G_i, $i = 1, 2, ..., n$ masing-masing grup hingga dengan $o(G_i) = n_i$ maka menurut definisi $\prod G_i$ diperoleh $O(\prod G_i) = n_1 . n_2 . n_3 . ... n_n$.

■

Teladan 4.41

Diberikan $Z_2 x Z_3$ dibawah operasi penjumlahan adalah Grup

$$Z_2 \times Z_3 = \{(x,y) \mid x \in Z_2, y \in Z_3\}$$

$$= \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$$

Dibawah operasi : $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ maka $(Z_2xZ_3, +)$ adalah merupakan grup.

Dapat dengan mudah diperiksa bahwa Z_2xZ_3 adalah grup siklik dengan penghasil $(1,1)$. Dapat dilihat pada ilustrasi berikut.

$$(1,1)^1 = 1.(1,1) = (1,1)$$

$$(1,1)^2 = 2\,(1,1) = (1,1) + (1,1) = (0,2)$$

$$(1,1)^3 = 3\,(1,1) = (1,1) + (1,1) + (1,1) = (1,0)$$

$$(1,1)^4 = 4\,(1,1) = (0,1)$$

$$(1,1)^5 = 5\,(1,1) = (1,2)$$

$$(1,1)^6 = 6\,(1,1) = (0,0)$$

Berarti bahwa $Z_2xZ_3 = \{(1,1)^n : n \in Z\} = \langle(1,1)\rangle$

Teladan 4.42

Grup Z_3xZ_3 terdiri dari 9 unsur bukan merupakan grup siklik sebab untuk setiap $(x, y) \in Z_3xZ_3$ maka

$$1\,(x,y) = (x,y)$$

$2\ (x,y) = (2x, 2y)$

$3\ (x,y) = (0,0)$

$4\ (x,y) = (0,0) + (x,y) = (x,y)$

$5\ (x,y) = (x,y) + (x,yi\ = (2x, 2y)$ ..... dan seterusnya.

Sehingga tidak ada $(x, y) \in Z_3 x Z_3$ yang meenghasilkan himpunan $Z_3 x Z_3$. Artinya bahwa $Z_3 x Z_3$ bukan grup siklik

Secara umum, dengan argumentasi yang sama dapat disimpulkan bahwa $Z_n \times Z_n$ bukan merupakan grup siklik.

Teladan 4.43

Setiap subgrup sejati dari $Z_p x Z_p$ dengan p prima adalah siklik. Perhatikan banyak unsur dari $Z_p x Z_p$ adalah p^2. Misalkan H subgrup sejati dari $Z_p x Z_p$ maka menurut Teorema Lagrange $O(H) = p$, selanjutnya menurut Teorema 4.25 maka H siklik.

SOAL-SOAL UNTUK LATIHAN

Dibawah ini didefinisikan operasi biner $*$ pada himpunan G. jika G hingga, buat tabel Cayleynya. Periksalah apakah G grup atau bukan (no. 1 s/d 5).

1. $G = \{ (x,y) \in R^2 \mid x \neq 0 \}$. Jika operasi * didefinisikan $(a,b)*(c,d) = (ac, bc + d)$. Periksa apakah (G,*) merupakan suatu grup?
2. $G = \{1,2,3,4,5\}$ adalah himpunan dari bilangan-bilangan bulat modulo 6 selain 0 dengan operasi $*$ yang didefinisikan sebagai $a * b = ab$
3. $G = \{ x \in R \mid -1 < x < 1 \}$ dengan operasi $x * y = \dfrac{x+y}{xy+1}$
4. $G = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ adalah himpunan fungsi-fungsi real dengan $f_0(x) = x$, $f_1(x) = -x$, $f_2(x) = {}^1/_x$, $f_3(x) = -{}^1/_x$, dimana $x \in R-\{0\}$. Operasi biner $*$ didefinisikan sebagai komposisi fungsi.
5. $G = \{f \mid f: R \rightarrow R,\ f(x) \neq 0,\ \forall x \in R\}$. Operasi $*$ didefinisikan sebagai perkalian fungsi yaitu $f, g \in G$, $(f*g)(x) = f(x) * g(x)$, $\forall x \in R$
6. Diberikan himpunan-himpunan {e, a, b}, {e, b}, {a, b, o} beserta operasi biner yang diberikan pada tabel Cayley berikut ini

* e a | b * e | b *
a b e
e e a | b e e | b a
a b o
a a b e b b b b
b o o
b b e b
o o o o

Tunjukkan bahwa himpunan-himpunan tersebut di bawah operasi $*$ bukan merupakan grup.

7. Buktikan grup dengan oder 2 merupakan grup abelian.
8. Misalkan G grup dibawah operasi $*$. Unsur $x \in G$ dikatakan idempoten jika $x * x = x$. Buktikan setiap grup mempunyai tepat satu unsur idempoten.
9. Buktikan jika setiap unsur $x \in G$, G adalah grup berlaku $x^2 = e$, maka G grup komutatif.
10. Buktikan jika dalam grup G berlaku $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall a$, b G, maka G komutatif.
11. Buktikan invers kiri suatu unsur dalam grup jika merupakan invers kanan
12. Buktikan unsur identitas kiri dalam suatu grup juga merupakan unsur identitas kanan.
13. Misalkan G grup dan $a \in G$, $a \neq e$ adalah satu-satunya unsur dari G yang bersifat $a^2 = e$. Buktikan a komutatif dengan setiap unsur dari G.
14. Jika G grup, dan $a, b, c \in G$ maka buktikan persamaan $axb=c$ mempunyai solusi tunggal di G.
15. Diberikan $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$. Tentukan order dari masing-masing unsur Z_4!

16. Jika S_3 adalah himpunan semua permutasi-permutasi dari himpunan S yang terdiri dari 3 anggota. Tentukan order dari setiap unsur S_3!

17. Buktikan order dari setiap unsur dalam grup hingga adalah hingga

18. Buktikan order suatu unsur dari grup sama dengan order dari inversnya.

19. Diberikan G grup dan $a, b \in G$. Buktikan order dari a sama dengan order dari $b^{-1}ab$.

20. Misalkan G suatu grup, $a \in G$ dan k sembarang bilangan bulat positif atau negatif. Buktikan $o(a^k) \leq o(a)$.

21. Buktikan setiap grup berorder genap mempunyai unsur berorder 2.

22. Misalnya G suatu grup. Buktikan suatu unsur dari G yang bukan identitas mempunyai order 2 jika dan hanya jika mempunyai invers dirinya sendiri.

23. Tentukan sub grup-subgrup dari S_3. Kemudian tentukan subgrup sikliknya.

24. Misalkan G suatu grup, dan G = $\langle a \rangle$ dan $a \neq e$, $a^5 = e$. buat tabel Cayley untuk G.

25. Diketahui F adalah himpunan fungsi-fungsi real dengan domain R dan $F' \subset F$ dengan $f(x) \neq 0$, $\forall f \in F'$, $\forall x \in R$. Periksa apakah himpunan di bawah merupakan subgrup dari F dengan operasi penjumlahan dan sub grup dari F' dengan operasi perkalian.

    a. Himpunan semua $f \in F$ dengan $f(1) = 0$
    b. Himpunan semua $f \in F$ dengan $f(0) = 1$

26. Tentukan sub grup siklik yang dihasilkan oleh matriks berikut. $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Dimana matrik A adalah anggota grup G yang terdiri dari matriks-matriks yang invertible berorder 4 x 4 di bawah operasi perkalian.

27. Misalkan G grup, dan $n \in Z^+$, $G_n = \{g^n | g \in G\}$. Buktikan G_n, subgrup G.

28. Misalkan G grup, dan $a \in G$. Tunjukkan bahwa $Ha = \{x \in G | xa = ax\}$ subgrup dari G.

29. Diketahui G grup dan H subgrup G.
Buktikan $H^{-1} = \{h^{-1} | h \in H\}$ dan $HH = H$

30. Diberikan grup G dan $S \subseteq G$.
    a. Jika $N_s = \{n \in G | nS = Sn\}$. Buktikan bahwa Ns subgrup G!
    b. Jika $Zs = \{z \in G | sz = zs, \forall s \in S\}$. Buktikan Zs subgrup G!

31. Buktikan jika suatu grup mempunyai subgrup dengan order n maka grup tersebut memiliki unsur yang berorder n.

32. Buktikan jika G grup siklik dengan order p, dimana p bilangan prima, maka setiap unsur yang tidak sama dengan unsur identitas juga berorder p.

33. Buktikan bahwa grup siklik tak hingga mempunyai generator a atau a^{-1}

34. Tentukan semua koset kiri dari sub grup $\langle 4 \rangle\rangle$ di Z_{12}.

35. Diberikan G grup, H sub grup G. buktikan koset-koset kiri dari H (kecuali H) bukan sub grup dari G.

36. Misalkan $O(G) = pq$, dengan p dan q bilangan-bilangan prima. Buktikan setiap sub grup sejati dari G adalah siklik.

37. Misalkan G grup. H dan K keduanya subgrup G, $H \neq K$. Jika $O(H) = O(K) = p$, dimana p bilangan prima. Buktikan $H \cap K = \{e\}$!

38. Misalkan G grup tidak siklik dengan order p^2, dimana p bilangan prima. Buktikan.
    a. Setiap subgrup sejati dari G adalah siklik
    b. $a^p = e, \forall a \in G$, jika $a \neq e$.

39. a. Buat tabel Cayley untu $Z_2 \times Z_4$ dan tulislah operasi binernya

b. Tentukan order dari (1,3), (1,2) dan (0,2)

40. Jika G, H masing-masing grup komutatif. Buktikan bahwa G x H juga grup komutatif.

41. Misal G suatu grup, $a \in G$. serta $H = \{a \in G \mid a^2 = e\}$. Tunjukkan bahwa H subgrup G!.

HOMOMORFISMA GRUP

Tujuan Umum Perkuliahan (TUP)

Setelah selesai perkuliahan ini diharapkan mahasiswa memahami konsep-konsep dan sifat-sifat homomorpisma/isomorpisma dari grup dan teorema-teoremanya.

Tujuan Khusus Perkuliahan (TKP)

Setelah selesai perkuliahan ini mahasiswa diharapkan mampu :

1. Mengidentifikasi suatu pemetaan merupakan suatu homomorpisma;
2. Mengidentifikasi suatu homomorpisma merupakan isomorpisma atau bukan;

Menentukan teorema yang berkenaan dengan homomorpisma dari grup ke grup.

BAB V
HOMOMORFISMA GRUP

Sebelum kita mempelajari konsep homomorfisma, ada baiknya jika menelaah beberapa ilustrasi berikut.

Misalkan G dan G' masing-masing grup, tentu G dan G' merupakan himpunan dengan sifat-sifat khusus dibawah operasi biner (misalnya bersifat asosiatif, memiliki unsur identitas, dan setiap unsurnya memiliki invers). Karena G dan G' keduanya merupakan himpunan, berarti dapat dibuat suatu "fungsi" dengan domain dan kodomainnya suatu grup. Misalnya simbol dari fungsi tersebut adalah θ. Maka fungsi tersebut dapat dinotasikan dengan $\theta : G \rightarrow G'$.

Hal yang menarik pada kajian ini bukan karena domain dan kodomainnya suatu grup, akan tetapi terletak pada hubungan antara struktur grup G dan struktur grup G' termasuk hubungan elemen-elemennya serta hubungan operasi-operasi binernya.

Misalnya $G = \{ e, a, b, c \}$ dan $G' = \{ E, A, B, C \}$

dengan $e = 1$, $a = -1$, $b = i$, $c = -i$, dimana $i = \sqrt{-1}$ dan

$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

Pada G dan G' dibawah operasi perkalian adalah masing-masing suatu grup. Ilustrasi operasi pada grup G dan grup G' dapat diamati pada daftar Tabel Cayley berikut ini.

$\bullet$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

$\bullet$	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	A	E
C	C	B	E	A

Berdasarkan kedua tabel tersebut diatas diperoleh adanya korespodensi satu-satu (fungsi bijektif) antara unsur-unsur G dengan unsur-unsur G', yaitu $x \in G$ berkorespondensi dengan $x' \in G'$ dan $y \in G$ berkorespondensi dengan $y' \in G'$, serta $xy \in G$ berkorespondensi dengan $x'y' \in G'$.

Korespondensi tersebut "mengawetkan" operasi hasil kali. Selanjutnya jika kita cermati secara seksama, ternyata kedua grup tersebut memiliki daftar Cayley yang identik sehingga dapat dikatakan mempunyai struktur yang sama (dalam pengertian abstrak) sehingga dikatakan kedua grup tersebut *isomorfik* atau dengan kata lain bahwa grup G isomorfik dengan grup G'.

A. PENGERTIAN HOMOMORFISMA

<table>
<tr><td>Definisi 5.1
Homomorfisma.[1]</td><td>Misalkan G grup dibawah operasi * dan G' adalah grup dibawah operasi #.
Fungsi $\theta: G \to G'$ disebut homomorfisma grup jika memenuhi $\theta(x * y) = \theta(x) \# \theta(y)$, berlaku $\forall x, y \in G$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Jika operasi pada G dan G' keduanya dinyatakan sebagai operasi perkalian maka syarat diatas dapat dinotasikan sebagai $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$, $\forall x,y \in G$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Himpunan $\theta(G) = \{ x' \in G' / x' = \theta(x), \ \forall x \in G \}$ disebut bayangan homomorfik dari G (renge homomorfik).</td></tr>
</table>

[1] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 141.

Definisi 5.2 Sifat-sifat *homomorfisma.*[2]	1. jika θ *injektif* maka θ disebut *monomorfisma* 2. jika θ *surjektif*, maka θ disebut *epimorfisma* 3. jika θ *bijektif*, maka θ disebut *isomorfisma* 4. jika $G = G'$ dan θ *isomorfisma* maka θ disebut *authomorfisma*

Selanjutnya untuk sebarang grup G dan G' terdapat paling sedikit satu *homomorfisma* yaitu $\theta : G \rightarrow G'$ dengan aturan $\theta(g) = e'$, $\forall g \in G$ dan e' adalah unsur identitas di G'. maka *homomorfisma* yang demikian disebut *homomorfisma trivial.*

Syarat homomorfisma dari θ terpenuhi. Sebab jika $g_1, g_2 \in G$ maka:

$$\theta(g_1 g_2) = e' \quad \text{karena } g_1 g_2 \in G$$
$$= e'e'$$
$$\theta(g_1 g_2) = \theta(g_1)\,\theta(g_2)$$

Teladan 5.1

Fungsi $\theta : (Z,+) \rightarrow (2Z,+)$ dengan aturan $\theta(n) = 2n$, $\forall n \in Z$. Maka θ disebut *homomorfisma*.

Solusi: Sebab $\forall n_1, n_2 \in Z$ maka diperoleh:

$$\theta(n_1 + n_2) = 2(n_1 + n_2)$$
$$= 2n_1 + 2n_2$$
$$= \theta n_1 + \theta n_2$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa θ bersifat *injektif*:

$$\theta(n) = \theta(m)$$
$$2n = 2m$$
$$n = m$$

juga dapat ditunjukkan bahwa θ bersifat *surjektif*: $\forall y \in 2Z$, maka $y = 2x$ sehingga $\exists x \in Z$, sehingga $\theta(x) = 2x = y$

[2] *Ibid.*, hal. 142.

Karena *homomorfisma* θ bersifat *bijektif* maka θ disebut *isomorfisma*.

Teladan 5.2

Diberikan fungsi $\theta :(R^{+}-\{0\},.) \to (R, +)$ dengan formula $\theta(x) = \log x$. Tunjukkan bahwa θ adalah *homomorfisma!*

Solusi:

Misalkan $x, y \in R^{+}-\{0\}$ maka:

$$\begin{aligned} \theta(xy) &= \log xy \\ &= \log x + \log y \\ \theta(xy) &= \theta(x) + \theta(y) \end{aligned}$$

Jadi θ adalah *homomorfisma*.

Pembaca dapat mencoba apakah θ bersifat *injektif* atau *surjektif*? Jika θ memenuhi kedua sifat tersebut maka θ disebut *isomorfisma.*

Teladan 5.3

Misalkan *A, B* masing-masing grup dan *AxB* grup hasil kali langsung. Diberikan fungsi $\theta: AxB \to A$ dengan formola $\theta((a,b))= a, \forall (a,b) \in AxB$. Tunjukkan bahwa θ suatu *homomorfisma*.

Solusi:

Misalkan (a,b) dan $(c, d) \in AxB$, maka:

$$\begin{aligned} \theta((a,b)(c,d)) &= \theta((ac, bd)) \\ &= a.c \\ &= \theta((a,b))\, \theta((c,d)) \end{aligned}$$

Jadi θ merupakan *homomorfisma*.

Pembaca dapat juga memeriksa bahwa θ bersifat *surjektif*. Sehingga θ disebut *epimorfisma*.

Secara umum jika $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ adalah grup hasil kali langsung dari grup-grup G_i, $i = 1, 2, \ldots n$. Fungsi $\prod_i : G \to G_i$

dengan $\prod_i (g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots, g_n) = g_i$ merupakan *epimorfisma*. Fungsi yang demikian itu disebut *Homomorfisma Proyeksi.*

Teladan 5.4

Misalkan F adalah grup Komutatif yang anggotanya terdiri dari semua fungsi-fungsi real dari R ke R dan $c \in R$. fungsi $\varphi_c : F \to R$ didefinisikan dengan $\varphi_c(f) = f(c)$, $\forall f \in F$.

Jika $f, g \in F$ sebarang maka

$$\begin{aligned} \varphi_c(f+g) &= (f+g)(c) \\ &= f(c) + g(c) \\ &= \varphi_c(f) + \varphi_c(g) \end{aligned}$$

Sehingga φ_c merupakan *homomorfisma* dan φ_c disebut *homomorfisma evaluasi.*

B. SIFAT-SIFAT HOMOMORFISMA

Sebelum membahas sifat-sifat *homomorfisma* akan diperkenalkan suatu definisi beriku ini.

Definisi 5.3	Misalkan fungsi $\varphi : X \to Y$ dan $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Bayangan dari X dinotasikan dengan $\varphi(X)$. Bayangan dari A dinotasikan dengan $\varphi(A)$, bayangan invers dari B dinotasikan dengan $\varphi^{-1}(B)$.[3]
Secara simbolik	$\varphi(A) = \{ \varphi(a) \in Y \mid a \in A \}$ $\varphi^{-1}(B) = \{ x \in X \mid \varphi(x) \in B \}$

Sehingga diperoleh untuk $x \in \varphi(A)$ jika dan hanya jika terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $x = \varphi(a)$ **atau** $\varphi(a) = x$.

$y \in \varphi^{-1}(B)$ jika dan hanya jika $\varphi(y) \in B$

[3] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 140.

Teorema 5.1	Misalkan θ *homomorfisma* dari grup G ke grup G' dengan unsur identitas secara berturut-turut e dan e'. Maka berlaku:[4] a) $\theta(e) = e'$ b) Jika $a \in G$ maka $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1}$ c) Jika H subgrup G, maka $\theta(H)$ subgrup dari G' d) Jika K' subgrup G', maka $\theta^{-1}(K')$ subgrup dari G

Bukti :

Misalkan *homomorfisma* $\theta : G \to G'$. Maka:

1. $$ee = e \quad \textit{definisi}$$
$$\to \quad \theta(ee) = \theta(e)$$
$$\to \quad \theta(e)\theta(e) = \theta(e)$$

Dilain pihak $\theta(e)e' = \theta(e)$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\theta(e)\ \theta(e) = \theta(e)e'$. Selanjutnya dengan pencoretan kiri diperoleh $\theta(e) = e'$.

■

2. Misalkan $a \in G$, maka:
$$aa^{-1} = e \ \text{(definisi)}$$
$$\to \quad \theta(aa^{-1}) = \theta(e)$$
$$\to \theta(a)\theta(a^{-1}) = e'$$

Dilain pihak $\theta(a)(\theta(a))^{-1} = e'$ sehingga $\theta(a)\theta(a^{-1}) = \theta(a)(\theta(a))^{-1}$. Berdasarkan hukum pencoretan diperoleh $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1}$ ■

3. Misalkan $x, y \in \theta(H)$ sebarang, maka menurut definisi 5.3 terdapat $a, b \in H$ sehingga $x = \theta(a)$ dan $y = \theta(b)$. Maka
$$xy^{-1} = \theta(a)\ (\theta(b))^{-1}$$
$$= \theta(a)\ \theta(b^{-1}) \quad \text{menurut 2}$$
$$= \theta(ab^{-1})$$

[4] *Ibid.*, hal. 141.

Karena H subgrup G maka $ab^{-1} \in H$, akibatnya $\theta(ab^{-1}) \in \theta(H)$ atau $xy^{-1} \in \theta(H)$. Selanjutnya menurut Teorema 4.15 maka terbukti $\theta(H)$ subgrup dari G'.

■

4. Misalkan $a,b \in \theta^{-1}(K')$ sebarang, maka $\theta(a) \in K'$ dan $\theta(b) \in K'$ sehingga

$$\theta(ab^{-1}) = \theta(a)\, \theta(b^{-1})$$
$$= \theta(a)\, (\theta(b))^{-1}$$

Karena K' subgrup G' maka $(\theta(b))^{-1} \in K'$ dan juga $\theta(a)(\theta(b))^{-1} \in K'$. akibatnya $\theta(ab^{-1}) \in K'$. Selanjutnya menurut definisi 5.3 terbukti bahwa $ab^{-1} \in \theta^{-1}(K')$.

■

Misalkan $\theta : G \to G'$ homomorfisma grup. Maka $\{ e' \}$ subgrup G' dan menurut Teorema 5.1 point d diperoleh $\theta^{1}(\{ e' \})$ juga merupakan subgrup dari G. Subgrup yang terakhir ini terdiri dari unsur-unsur dari g yang dipetakan oleh θ ke e'. Subgrup yang demikan tersebut merupakan hal penting dalam mempelajari homomorfisma, diantaranya untuk menentukan kriteria apakah suatu homomorfisma merupakan monomorfisma atau bukan.

<table>
<tr><td>Definisi 5.4
Kernel.[5]</td><td>Misalkan $\theta : G \to G'$ suatu homomorfisma grup. Subgrup $\theta^{1}(\{ e' \})$ disebut kernel dari θ dan dinotasikan $Ker\ \theta = \{x \in G \mid \theta(x) = e'\}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dengan kata lain kernel homomorfisma θ adalah Renge homomorfisma θ^{-1} dengan domain $\{ e' \}$ atau (prapeta dari e')</td></tr>
</table>

[5] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 142.

Teladan 5.5

Kernel dari Teladan 5.1 yaitu $\theta : Z \rightarrow 2Z$, dengan $\theta(x) = 2x$;

$$\begin{aligned} Ker\ \theta &= \{x \in Z \mid \theta(x) = 0\} \\ &= \{x \in Z \mid 2x = 0\} \\ &= \{x \in Z \mid x = 0\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Teladan 5.6

Kernel untuk teladan 5.2 yaitu $\theta : (R^{+}-\{0\}, .) \rightarrow (R, +)$; $\theta(x) = \log x$

$$\begin{aligned} Ker\ \theta &= \{x \in R^{+}-\{0\} \mid \theta(x) = 0\} \\ &= \{x \in R^{+}-\{0\} \mid \log x = 0\} \\ &= \{x \in R^{+}-\{0\} \mid x = 1\} \\ &= \{1\} \end{aligned}$$

Teladan 5.7

Kernel untuk Teladan 5.3 $\theta: AxB \rightarrow A$, $\theta(a,b) = a$

$Ker\ \theta$ = $\{(x,y) \in A \times B \mid \theta(x,y)) = e_A$, dimana e_A unsur identitas A}

$= \{(x,y) \in A \times B \mid x = e_A\}$

$= \{(e_A, y) \mid y \in B\}$

$= \{e_A \times B\}$ (*non* trivial)

Teladan 5.8

Kernel untuk Teladan 5.4

$Ker\ \varphi_c$ = $\{f \in F \mid \varphi_c(f) = 0$, dimana 0 unsur identitas (R, +)}

$= \{f \in F \mid f(c) = 0\}$

Beberapa buku tidak mendefinisikan $Ker\ \theta$ sebagai subgrup $\theta^{-1}\{e\}$, tetapi diberikan teorema di bawah ini berupa sifat-sifat kernel.

Teorema 5.2	Jika $\theta: G \to G'$ *homomorfisma* grup maka $Ker\ \theta$ merupakan subgrup G.[6]

Bukti :

Misalkan $x, y \in Ker\ \theta$ sebarang, maka $\theta(x) = e'$, dan $\theta(y) = e'$.

Karena θ suatu homomorfisme maka berlaku:

$$\begin{aligned} \theta(xy^{-1}) &= \theta(x)\ \theta(y^{-1}) \\ &= \theta(x)\ (\theta(y))^{-1} \\ &= e'\ (e')^{-1} \end{aligned}$$

Jadi $\theta(xy^{-1}) = e'$

Sehingga $xy^{-1} \in Ker\ \theta$. Berarti berdasarkan teorema 4.15 bahwa $Ker\ \theta$ subgrup G.

■

Sifat-sifat sederhana dari $Ker\ \theta$ adalah sebagai berikut :

Teorema 5.3	Misalkan $\theta: G \to G'$ *homomorfisma* grup dengan e unsur identitas G, dan e' unsur identitas G'. Maka θ monomorfisma jika dan hanya jika $Ker\ \theta = \{ e \}$.[7]

Misalkan $\theta: G \to G'$ *homomorfisma* grup dengan e unsur identitas G, dan e' unsur identitas G'. Maka θ monomorfisma jika dan hanya jika $Ker\ \theta = \{ e \}$

Bukti :

Jika θ monomorfisma berarti θ *injektif*, selanjutnya menurut Teorema 4.1 point 1 diperoleh $\theta(e) = e'$. Sehingga $Ker\ \theta = \{ e \}$. Misalkan $x, y \in G$.

$$\theta(x) = \theta(y)$$

[6] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition,* Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 70.

[7] *Ibid.*, hal. 71.

$$\rightarrow \quad \theta(x)(\theta(y))^{-1} = \theta(y)(\theta(y))^{-1}$$
$$\rightarrow \quad \theta(x)\,\theta(y^{-1}) = e'$$
$$\rightarrow \quad \theta(xy^{-1}) = e'$$
$$\rightarrow \quad xy^{-1} \in Ker\,\theta = \{e\}$$
$$\rightarrow \quad xy^{-1} = e$$
$$\rightarrow \quad x = y$$

Terbukti θ *injektif.*

■

Misalkan $\theta : G \rightarrow G'$ *homomorfisma* grup. Teorema di bawah ini menunjukkan bahwa himpunan unsur-unsur di G yang dipetakan ke suatu unsur di G' ternyata merupakan *koset* dari subgrup $Ker\,\theta$ di G. Ini berarti bahwa koset kiri dari $Ker\,\theta$ sama dengan koset kanan dari $Ker\,\theta$.

Teorema 5. 4	Misalkan $\theta : G \rightarrow G'$ adalah *homomorfisma* grup, $Ker\,\theta = H$ dan $a \in G$. Maka himpunan $\theta^{-1}(\theta(a)) = \{x \in G \mid \theta(x) = \theta(a)\}$ merupakan koset dari aH dan juga merupakan koset dari Ha.[8]

Bukti :

Akan dibuktikan $\theta^{-1}(\theta(a)) = aH$.

Misalkan $x \in \theta^{-1}(\theta(a))$, maka:

$$\theta(x) = \theta(a)$$
$$\rightarrow \quad (\theta(a))^{-1}\theta(x) = (\theta(a))^{-1}\theta(a)$$
$$\rightarrow \quad \theta(a^{-1})\,\theta(x) = e'$$
$$\rightarrow \quad \theta(a^{-1}x) = e'$$
$$\rightarrow \quad a^{-1}x \in Ker\,\theta = H$$
$$\rightarrow \quad a^{-1}x = h, \quad \text{untuk suatu } h \in H$$
$$\rightarrow \quad x = ah$$
$$\rightarrow \quad x \in aH.$$

[8] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 35.

Sebaliknya, misalkan $y \in aH$ maka $y = ah$, untuk suatu $h \in H$ sehingga $\theta(h) = e'$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \theta(y) &= \theta(ah) \\ &= \theta(a)\theta(h) \\ &= \theta(a)\, e' \\ &= \theta(a) \end{aligned}$$

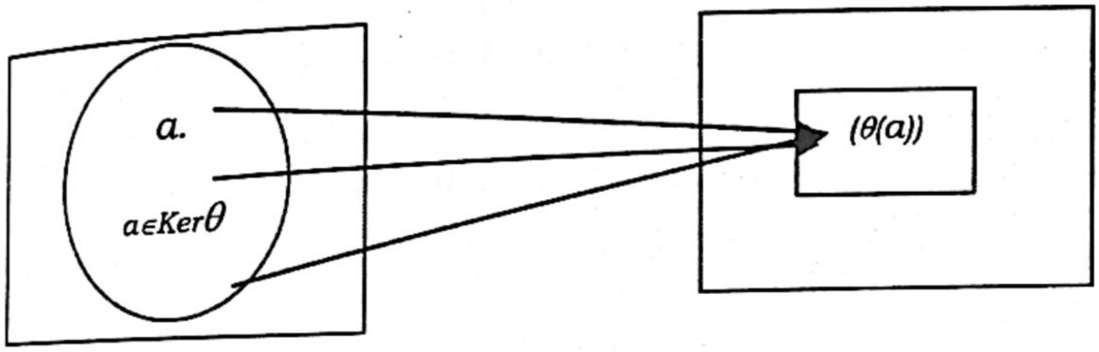
Akibatnya $y \in \theta^{1}(\theta)a))$.

Terbukti $\theta^{1}(\theta(a)) = aH$.

■

Dengan cara analog dapat membuktikan bahwa $\theta^{-1}(\theta(a)) = Ha$ dan buktinya ditinggalkan sebagai latihan.

Teorema di atas dapat digambarkan pada gambar berikut ini.



Teladan 5.9

Diketahui F adalah grup yang terdiri dari semua fungsi-fungsi dari R ke R dan $D \subseteq F$ dengan semua fungsi-fungsi dari D terdefinisikan. Didefinisikan fungsi $\theta : D \rightarrow F$ dengan $\theta(f) = f'$, $\forall f \in D$. Maka θ homomorfisma.

sebab jika $f, g, \in D$, maka

$$\begin{aligned} \theta(f+g) &= (f+g)' \\ &= f' + g' \\ &= \theta(f) + \theta(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker } \theta &= \{ f \in D \mid \theta(f) = f_o, \text{ dengan } f_o \text{ adalah fungsi nol di } F \} \\ &= \{ f \in D \mid f' = f_o, \text{ dengan } f_o \text{ fungsi nol di } F \} \\ &= \{ f \in D \mid f'(x) = f_o(x),\ \forall x \in R \} \\ &= \{ f \in D \mid f'(x) = 0,\ \forall x \in R \} \\ &= \{ f \in D \mid f \in C, C \text{ adalah himpunan fungsi-fungsi konstan} \} \end{aligned}$$

Misalkan $h(x) = \frac{x^{٣}}{٣}$, maka $\theta(h(x)) = x^2$ dan menurut teorema 5.4

$\theta^{1}(\theta(h(x)) = \frac{x^{٣}}{٣} + C$ adalah himpunan fungsi-fungsi di D yang dibayangkan oleh θ ke $h(x) = x^2$.

C. ISOMORFISMA DAN TEOREMA CAYLEY

Dalam sub bab ini akan dijelaskan bahwa relasi isomorfisma merupakan relasi ekuivalensi pada koleksi-koleksi grup. Jika ada isomorfisma dari grup G ke grup G', maka dikatakan grup G isomorfik dengan grup G' sehingga diperoleh G dan G' mempunyai struktur yang sama dan dapat dikatakan identik (dalam pengertian abstrak).

Peranan unsur-unsur dari G dapat digantikan dengan unsur-unsur dari G', begitu juga sebaliknya peranan unsur-unsur dari G' dapat digantikan dengan unsur-unsur G. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap grup isomorfik dengan suatu grup permutasian.

Misalkan $\theta : G \to G'$ isomorfisma grup maka berlaku

$b = \theta(a)$ Jika dan hanya jika $a = \theta^{1}(b)$

sehingga diperoleh

$$\theta^{1}(\theta(a)) = \theta^{1}(b) = a$$
$$\theta(\theta^{1}(b)) = \theta(a) = b$$

Fakta berikut ini berlaku :

1. Jika $\theta : G \to G'$ isomorfisma grup, maka $\theta^{1} : G' \to G$ juga isomorfisma grup.
2. Jika $\theta : G \to G'$ dan $\mu : G' \to G''$ masing-masing isomorfisma, maka $\mu \circ \theta : G \to G''$ juga isomorfisma.

Bukti :

1. Misalkan $\theta : G \to G'$ isomorfisma. Maka θ fungsi *bijektif* sehingga θ^{1} juga fungsi yang *bijektif*. Misalkan kita ambil sebarang $x, y \in G'$, karena θ surjektif maka terdapat $a, b \in G$ sedemikian sehingga $x = \theta(a)$, dan $y = \theta(b)$ dan berlaku $a = \theta^{1}(x)$ dan $b = \theta^{-1}(y)$. Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned} \theta^{1}(xy) &= \theta^{1}(\theta(a)\ \theta(b) \\ &= \theta^{1}(\theta(ab)) \\ &= ab \\ &= \theta^{1}(x)\theta^{1}(y) \end{aligned}$$

Jadi θ^{1} *homomorfisma* yang bijektif maka terbukti θ^{1} isomorfisma.

2. Jika $\theta : G \to G'$ dan $\mu = G \to G''$ masing-masing isomorfisma, maka $\mu \circ \theta$ juga fungsi bijektif. Untuk membuktikan bahwa $\mu \circ \theta$ homomorfisma : misalkan $x, y \in G$ sebarang, maka:

$$\begin{aligned} (\mu \circ \theta)(xy) &= \mu(\theta(xy)) \\ &= \mu(\theta(x)\ \theta(y)) \\ &= \mu(\theta(x)\ \mu(\theta(y) \\ &= (\mu \circ \theta)(x)\ (\mu \circ \theta)(y) \end{aligned}$$

Jadi $(\mu \circ \theta)$ homomorfisma yang bijektif, sehingga $(\mu \circ \theta)$ isomorfisma. ■

Eksistensi dari θ^{1} dan $(\mu \circ \theta)$ dari fakta di atas mengakibatkan relasi isoformisma (dinotasikan dengan relasi $\simeq$) dan relasi $\simeq$ merupakan relasi ekivalensi.

Teorema 5.5	Misalkan C adalah koleksi dari sebarang grup-grup dan relasi $\simeq$ merupakan relasi isomorfisma pada C. maka relasi $\simeq$ merupakan relasi ekivalensi.[9]

Bukti :

<u>*Sifat Refleksif.*</u> Fungsi identitas i merupakan isomorfisma sebab i fungsi bijektif dan $i(xy) = xy = i(x)i(y)$. Karena ada isomorfisma $i : G \to G$ berarti $G \simeq G$.

<u>*Sifat Simetris.*</u> Misalkan $G \simeq G'$ maka ada isomorfisma $\theta: G \to G'$, sehingga $\theta^{1} : G' \to G$ juga isomorfisma. Akibatnya $G' \simeq G$

<u>*Sifat Transitif.*</u> Misalkan $G \simeq G'$ dan $G' \simeq G''$ maka ada isomorfisma μ dan θ, dengan $\theta : G \to G'$ dan $\mu: G' \to G''$. Sehingga $(\mu \circ \theta) : G \to G''$ juga isomorfisma, jadi $G \simeq G''$.

■

Untuk menunjukkan dua grup G dan G' isomorfik dinotasikan dengan $G \simeq G'$ adalah harus ditunjukkan adanya isomorfisma dari G ke G'.

Teladan 5.10

Tunjukkan $(R, +) \simeq (R^{+} - \{0\}, .)$

Solusi :

Suatu fungsi $\theta : R \to R^{+}$ didefinisikan dengan $\theta(x) = e^{x}$, $\forall x \in R$.
Maka fungsi θ bersifat injektif, sebab $\theta(x) = \theta(y) \to e^{x} = e^{y} \to x = y$

Dan θ surjektif, sebab untuk sebarang $r \in R^{+}$ maka ada $\ln r \in R$ sedemikian sehingga $\theta(\ln r) = e^{\ln r} = r$

---

[9] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal 85

Selanjutnya kita akan tunjukkan bahwa θ adalah homomorfisma sebab untuk sebarang $x, y \in R^{+}$ maka :

$$\begin{aligned} \theta(x+y) &= e^{x+y} \\ &= e^{x}e^{y} \\ &= \theta(x).\theta(y) \end{aligned}$$

Jadi karena ada isomorfisma θ: $R \to R^{+}$ dengan $\theta(x) = e^{x}$. Jadi terbukti bahwa $(R, +) \simeq (R^{+}, .)$

Teladan 5.11

Misalkan $H = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ pada teladan 3.24, tunjukkan bahwa $(H, .) \simeq (Z_3, \oplus)$

Solusi:

Didefinisikan fungsi $\theta : H \to Z_3$

$$\begin{aligned} \pi_{\text{١}} &\to \overline{\text{٠}} \\ \pi_{\text{٢}} &\to \overline{\text{١}} \\ \pi_{\text{٣}} &\to \overline{\text{٢}} \end{aligned}$$

Jelaslah bahwa fungsi θ adalah fungsi bijektif.

Hal tersebut dapat diperiksa bahwa $\forall x, y \in H$, berarti $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$, sehingga θ homomorfisma. Untuk menunjukkan ini harus diperiksa satu persatu, misalnya jika $x = \pi_1$ dan $y = \pi_2$, maka:

$$\theta(xy) = \theta(\pi_1\pi_2) = \theta(\pi_2) = 1$$

$$\begin{aligned} \theta(x) \oplus \theta(y) &= \theta(\pi_1) \oplus \theta(\pi_2) \\ &= \overline{\text{٠}} \oplus \text{١} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi $\theta(\pi_1\pi_2) = \theta(\pi_1) \oplus \theta(\pi_2)$.

Untuk yang lainnya silahkan diperiksa sebagai latihan.

Karena ada isomorfisma $\theta : H \to Z_3$ maka $H \simeq Z_3$.

Teorema 5.6	Setiap grup siklik tak hingga G isomorfik dengan Z.[10]

Bukti :

Misalkan G grup siklik yang memuat a dan $\theta : G \to Z$ yang didefinisikan dengan $\theta(a^n) = n,\ \forall a^n \in G$.

θ adalah fungsi sebab jika

$$
\begin{aligned}
& a^n && = a^m \\
\to\ & a^n (a^m)^{-1} && = a^m (a^m)\text{-}1 \\
\to\ & a^n a^{-m} && = e \\
\to\ & a^{n-m} && = e \\
\to\ & n - m && = 0 \text{ (karena } G \text{ siklik tak hingga)} \\
\to\ & n && = m
\end{aligned}
$$

θ fungsi injektif sebab,

$$
\begin{aligned}
\to\ & \theta(a^n) && = \theta(a^m) \\
\to\ & n && = m \\
\to\ & a^n && = a^m
\end{aligned}
$$

dan θ fungsi surjektif sebab untuk setiap $n \in Z$, ada $a^n \in G$ sehingga $\theta(a^n) = n$

selanjutkan kita tunjukkan bahwa θ adalah homomorfisma sebab : misalkan kita ambil sebarang a^n, $a^m \in G$ maka;

$$
\begin{aligned}
\to\ O(a^n a^m) &= \theta(a^{n+m}) \\
&= n + m \\
&= \theta(a^n) + \theta(a^m)
\end{aligned}
$$

Jadi ada isomorfisma $\theta : G \to Z$, sehingga terbukti maka $G \simeq Z$. ■

---

[10] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 72.

Perhatikan semua unsur-unsur pada tabel Cayley grup-grup hingga beserta operasi binernya pada pembahasan terdahulu. Setiap unsur pada setiap baris atau setiap kolom muncul tepat satu kali, sehingga setiap baris maupun setiap kolom merupakan permutasi unsur-unsur dari grupnya. Hal ini menunjukkan fakta tentang adanya hubungan antara suatu grup G dengan subgrup dari grup permutasi S_G. Teorema Cayley berikut ini mejawab hal di atas, ternyata setiap grup G isomorfik dengan subgrup dari S_G.

Teorema 5.7 Teorema Cayley.[11]	Setiap grup adalah isomorfik dengan suatu grup permutasi.

Bukti:

Misalkan G grup dan S_G grup permutasi dari I dan $a \in G$. Maka $\lambda_a : G \to G$ yang didefinisikan dengan $\lambda_a(x) = ax$, $\forall x \in G$ merupakan fungsi. Sehingga dapat ditunjukkan bahwa λ_a adalah fungsi injektif sebab;

$$\begin{aligned} \lambda_a(x) &= \lambda_a(y) \\ \to\ ax &= ay \\ \to\ x &= y \end{aligned}$$

Dan λ_a fungsi subjektif sebab untuk setiap $y \in G$ maka terdapat a^{-1}, sedemikian sehingga $\lambda_a(a^{-1}y) = aa^{-1}y = y$.

Sehingga akibatnya λ_a merupakan fungsi yang bijektif.

Selanjutnya jelas bahwa $G' = \{\lambda_a \mid a \in G\} \subseteq G$. akan dibuktikan bahwa G' subgrup dari S_G.

1) Sifat tertutup terpenuhi sebab;

$$\begin{aligned} \lambda_a \lambda_b (x) &= \lambda_a (bx) \\ &= a(bx) \end{aligned}$$

[11] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition,* Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 109.

$$= (ab)\,x$$
$$= \lambda_{ab}(x)$$
$\rightarrow \quad \lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab} \in G'$ *(karena* $ab \in G$*)*

2) Sifat asosiatif berlaku sebab $G' \subseteq S_G$.

3) Ada unsur identitas λ_e, sehingga;

$$\begin{aligned}(\lambda_a \lambda_e)(x) &= \lambda_a(\lambda_e(x)) \\ &= \lambda_a(ex) \\ &= \lambda_a(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda_e \lambda_a)(x) &= \lambda_e(\lambda_a(x)) \\ &= \lambda_e(ax) \\ &= eax \\ &= ax \\ &= \lambda_a(x)\end{aligned}$$

$\rightarrow \quad \lambda_a \lambda_e = \lambda_e \lambda_a = \lambda_a$

4) Setiap unsur mempunyai invers yaitu invers dari λ_a adalah λ_a^{-1}.

$$\begin{aligned}(\lambda_a \lambda_a^{-1})(x) &= \lambda_a(\lambda_a^{-1}(x)) \\ &= \lambda_a(a^{-1}x) \\ &= a(a^{-1}x) \\ &= (aa^{-1})\,x \\ &= ex \\ &= \lambda_e(x)\end{aligned}$$

Juga berlaku $\lambda_a^{-1}\lambda_a(x) = \lambda_e(x)$, Sehingga $\lambda_a\lambda_a^{-1} = \lambda_a^{-1}\lambda_a = \lambda_e$

Selanjutnya akan dibuktikan $G \simeq G'$

Didefinisikan fungsi $\theta: G \rightarrow G'$ dengan $\theta(a) = \lambda_a$, $\forall a \in G$.

θ injektif.

$$\begin{aligned} & \theta(a) = \theta(b) \\ \rightarrow \quad & \lambda_a = \lambda_b \\ \rightarrow \quad & \lambda_a(x) = \lambda_b(x) \\ \rightarrow \quad & ax = bx \end{aligned}$$

$\rightarrow \quad a \quad = b$ (hukum pencoretan berlaku)

θ surjektif sebagai akibat dari definisi fungsi θ.

Jadi θ *homomorfisma.*

$$\theta(ab) = (\lambda_{ab})$$
$$= \lambda_a \lambda_b$$
$$= \theta(a)\,\theta(b)$$

Sehingga θ isomorfisma dan terbukti $G \simeq G'$

■

Teladan 5.12

Misalkan grup $G = \{a,b,c\}$. Tentukan grup permutasi yang isomorfik dengan G.

Solusi.

Tabel Cayley untuk G adalah sebagai berikut:

$*$	E	a	b
E	E	a	b
A	A	b	e
B	B	e	a

$\lambda_a : G \rightarrow G$

$$e \rightarrow ae = a$$
$$a \rightarrow aa = b$$
$$b \rightarrow ab = e$$

sehingga $\lambda_a = \begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}$

Dengan cara yang sama

diperoleh $\lambda_b = \begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix}$ dan $\lambda_e = \begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix}$.

Jadi grup permutasi yang isomorfik dengan grup G adalah grup $G' = \{\lambda_e, \lambda_a, \lambda_b\}$.

Teladan 5.13

Tunjukkan bahwa $R^{+} - \{0\} \simeq R$.

Solusi:

Berdasarkan teladan terdahulu telah dibahas bahwa terdapat fungsi $\theta: (R^{+} - \{0\}, x) \rightarrow (R, +)$ didefinisikan $\theta(x) = \log x$. Dimana $\theta(x) = \log x$ adalah isomorfisma. Sehingga $(R^{+} - \{0\}, x) \simeq (R, +)$.

SOAL-SOAL UNTUK LATIHAN

1. Diketahui G = { -1, 1, i, $-i$ } dimana $i = \sqrt{-1}$.
   a. Tunjukkan bahwa G grup dibawah operasi perkalian
   b. Jika f : Z → G didefinisikan $f(n) = i^n$, $\forall n \in Z$ maka: buktikan f adalah homomorfisma.

2. Diketahui G grup, pemetaan f : G → G didefinisikan sebagai $f(a) = a^{-1}$ $\forall a \in G$
   a. Buktikan f automorfisma jika dan hanya jika G komutatif.
      Solution: jika ab = ba maka $f(ab) = (ab)^{-1} = (ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
      Jadi $f(ab) = f(a)f(b)$
      $a \neq b$ maka $a^{-1} \neq b^{-1}$ atau $f(a) \neq f(b)$. Jadi f adalah 1-1
      untuk setiap $y \in G$, maka terdapat $y^{-1} \in G$, sehingga $f(y^{-1}) = (y^{-1})^{-1} = y$
      jadi f onto
   b. Carilah kernel f.
      Solusi: $\text{Ker } f = \{ x \in G : f(x) = e\}$
      $= \{ x \in G : x^{-1} = e\}$
      $= \{ x = e\}$
      $= \{ e \}$

3. Misalkan $C^* = C - \{(0,0)\}$ adalah gugus semua bilangan kompleks kecuali nol. Fungsi f : (C^*, x) → (R-{0}, x) didefinisikan $f(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$. Buktikan f *homomorfisma* dan carilah kernel f.
   Solusi:
   $f((a,b)(c,d)) = f(ac-bd, ad+bc) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2(abcd) + (ad)^2 + (bc)^2 + 2(abcd) = (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 = a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2) = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = f(a,b)f(c,d)$. Jadi f *Homomorfima.*

4. Diberikan grup G, $a \in G$ dan pemetaan Δ_a:G → G didefinisikan $\Delta_a(x) = axa^{-1}$, $\forall x \in G$. Buktikan Δ_a automorfisma (disebut automorfisma intern yang dihasilkan oleh a).

5. Misalkan G grup dan pemetaan f : G → G didefinisikan $f(x) = x^2$. Buktikan f *homomorfisma* jika dan hanya jika G grup komutatif.
6. Misalkan G grup dan θ *automorfisma* dari G. jika $a \in$ G dengan order a adalah O(a), maka buktikan $O(\theta(a)) = O(a)$.
7. Tentukan grup permutasi yang *isomorfik* dengan Z_5 berdasarkan bukti Teorema *Cayley*.
8. (G; o) dan (G'; *) masing-masing adalah grup ∅ adalah homomorpisma dari G ke G'. Buktikan bahwa himpunan semua peta (bayangan) G dalam G' oleh homomorpisma ∅ merupakan subgrup dari G'.
9. G adalah grup siklik dengan generator a dan n(G) = 7. B adalah grup bilangan bulat modulo 7 dengan operasi penjumlahan modulo 7. Tunjukkan bahwa G isomorpik dengan B.

SUBGRUP NORMAL DAN GRUP FAKTOR

Tujuan Umum Perkuliahan (TUP)

Setelah selesai perkuliahan ini diharapkan mahasiswa memahami konsep-konsep subgrup normal, grup faktor dan sifat-sifatnya beserta teorema-teoremanya.

Tujuan Khusus Perkuliahan (TKP)

Setelah selesai perkuliahan ini mahasiswa diharapkan mampu:

1. Mengidentifikasi subgrup dari suatu grup merupakan subgrup normal atau bukan;
2. Menentukan syarat-syarat suatu subgrup merupakan subgrup normal dari grup tertentu
3. Mengidentifikasi subgrup dari suatu grup merupakan grup faktor atau bukan;
4. Menentukan syarat-syarat suatu subgrup merupakan grup faktor dari grup tertentu;
5. Menentukan banyaknya elemen dari suatu grup faktor;

BAB VI
SUBGRUP NORMAL DAN GRUP FAKTOR

A. PENGERTIAN SUBGRUP NORMAL

Misalkan $\theta : G \to G'$ adalah homomorfisma grup, maka $Ker\theta$ merupakan subgrup dari G. Berdasakan teorema 5.4 menunjukkan bahwa koset kiri dari $Ker\ \theta$ adalah subgrup-subgrup yang mempunyai sifat bahwa semua koset-koset kirinya sama dengan koset-koset kanannya merupakan yang penting dalam teori grup, dan subgrup demikian subgrup normal.

Definisi 6.1 Subgrup Normal.[1]	Misalkan G grup dan N subgrup dari G. Maka N disebut subgrup normal dari G jika **untuk setiap** $g \in G, n \in N$ berakibat $gng^{-1} \in N$.
	Cara lain mengungkapkan definisi di atas adalah $\forall g \in G$, berakibat $gNg^{-1} \subseteq N$.

Teladan 6.1

Dalam setiap grup G, maka $\{e\}$ dan G sendiri merupakan subgrup normal dari G, silahkan tunjukkan !

---

[1] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra.* Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 82.

Solusi:

Misal E = { e } akan dibuktikan bahwa E subgrup normal G. Untuk setiap $g \in G$, $e \in E$, maka $geg^{-1} = gg^{-1} = e$ dimana $e \in E$. Berarti $geg^{-1} \in E$. Jadi menurut definisi E subgrup normal dari G.

Misal $g \in G$, $a \in G$, karena G Grup, maka $ga \in G$ juga (*sifat tertutup*). Karena G grup maka g^{-1} juga anggota G (*setiap unsur grup punya invers*). Selanjutnya $gag^{-1} \in G$. Jadi G subgrup normal dari G (menurut definisi 6.1).

Teladan 6.2

Buktikan *setiap* subgrup dari grup komutatif adalah normal.

Solusi:

Misalkan G suatu grup dan N subgrup G. Karena G kumutatif maka untuk setiap $g \in G$ dan $n \in N$ berlaku:

$$gn = ng \quad \text{(komutatif)}$$

$$\rightarrow \quad gng^{-1} = n \quad \text{(kedua ruas dikalikan } g^{-1}\text{)}$$

$$\rightarrow \quad gng^{-1}\, n \in N$$ Terbukti N Subgrup normal.

Teladan 6.3

Jika $\theta : G \rightarrow G'$ homomorfisma grup, maka $Ker\ \theta$ subgrup normal dari G. Buktikan !

Solusi:

Berdasarkan teorema 5.2 $Ker\ \theta$ adalah subgrup dari G. Misalkan kita ambil sebarang $g \in G$, $n \in Ker\ \theta$, maka:

$$\begin{aligned} 0(gng^{-1}) &= \theta(g)\ \theta(n)\ \theta(g^{-1}) \\ &= \theta(g)\ e'\ (\theta(g))^{-1} \\ &= e' \end{aligned}$$

Sehingga $gng^{-1} \in Ker\ \theta$, dan terbukti Ker θ subgrup normal.

Teladan 6.4

Dari Teladan 4.26 diperoleh bahwa $M_2^*(Z)$ subgrup dari $M_2(Z)$. Tunjukkan bahwa $M_2^*(Z)$ *subgrup normal*.

Solusi:

Misalkan $A \in M_2(Z)$ dan $B \in M_2^*(Z)$ sebarang, maka :

$|ABA^{-1}| = |A||B||A^{-1}| = |A|.\, 1 \frac{1}{|A|} = 1$

Sehingga $ABA^{-1} \in M_2^*(Z)$. Terbukti bahwa $M_2^*(Z)$ subgrup normal.

Teladan 6.5

Misalkan $S \neq \emptyset$ dan G grup tak komutatif dengan unsur identitas $e \in G$. Misalkan $a \in G$ dan himpunan $\prod(S, G)$ terdiri atas fungsi-fungsi dari S ke G.

Jadi $\prod(S, G) = \{f \mid f: S \to G\}$

Operasi biner pada $\prod(S, G)$ didefinisikan: $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
Selanjutnya bentuk himpunan bagian: $\prod_a(S, G) = \{\varepsilon \mid \varepsilon(a) = e\}$
Buktikan bahwa $(\prod(S, G), .)$ grup, dan $(\prod_a(S, G), .)$ subgrup normal dari $\prod(S, G)$!

Solusi :

1. Akan dibuktikan $(\prod(S, G), .)$ adalah suatu grup.

   Sifat Asosiatif terpenuhi.

$$\begin{aligned}((fg)h)(x) &= (fg)(x)h(x)\\ &= (f(x)g(x))\, h(x)\\ &= f(x)\,(g(x)h(x)\\ &= f(x)\,(gh(x)\\ &= (f(gh))\,(x)\end{aligned}$$

   Jadi $f(gh) = (fg)\, h$.

Ada Unsur identitasnya adalah fungsi i dengan $i(x)=e$, $\forall x \in S$ sedemikian sehingga

$$(fi)(x) = f(x)\, i(x)$$

$= f(x)\, e$

$= f(x)$

Analog untuk $if(x) = f(x)$, sehingga $fi = if = f$.

Invers dari fungsi f adalah f^{1} dengan $f^{1}(x) = (f(x))^{-1}$, $\forall x \in S$ sedemikian sehingga:

$$\begin{aligned} f^{1} f(x) &= f(x) f^{1}(x) \\ &= f(x)(f(x))^{-1} \\ &= e \\ &= i(x) \end{aligned}$$

Analaog untuk $(f^{1}f)(x) = i(x)$, sehingga $ff^{1} = f^{1}f = i$

Terbukti $\prod(S, G)$ adalah grup.

1. Akan dibuktikan $\prod_a(S, G)$ adalah subgrup normal dari $\prod(S, G)$.

   Misalkan kita ambil sebarang $f, g \in \prod_a(S, G)$ maka $f(a) = e$ dan $g(a) = e$. Sehingga:

   $$\begin{aligned} (fg^{-1})(x) &= f(a)\,(g^{-1}(a)) \\ &= f(a)\,(g(a))^{-1} \\ &= ee^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

   sehingga diperoleh $fg^{-1} \in \prod_a(S, G)$, sehingga syarat subgrup dipenuhi.

   Untuk membuktikan normalnya, ambil sebarang $f \in \prod_a(S, G)$, dan $h \in \prod_a(S, G)$, maka $h(a) = e$ dan berlaku

   $$\begin{aligned} (fhf^{1})(a) &= f\,a)\, h(a)\, f^{1}(a) \\ &= f(a)\, e(f(a))^{-1} \\ &= f(a)(f(a))^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

   Sehingga $fhf^{-1} \in \prod_a(S, G)$ dan terbukti $\prod_a(S, G)$ normal. ■

A. SIFAT-SIFAT SUBGRUP NORMAL

Teorema-teorema di bawah ini merupakan sifat-sifat dari subgrup normal dan sebelum membuktikannya perhatikan bahwa dalam grup G kondisi berikut berlaku.

Jika G grup dan himpunan A, B, C masing-masing subset dari G, maka $AB. C = A. BC$. Silahkan tunjukkan! (hal ini sebagai akibat dari sifat asosiatif dari grup G)

Teorema 6.1	Misalkan G grup dan N subgrup G. Maka N subgrup normal dari G jika dan hanya jika $gN = Ng$, $\forall g \in G$.[2]

Bukti :

Diketahui N subgrup normal dari G maka untuk setiap $g \in G$, maka berlaku $gNg^{-1} \subseteq N$

$gN \subseteq Ng$

juga berlaku :

$g^{-1}gNg^{-1} \subseteq g^{-1}N$

sehingga diperoleh $Ng^{-1} \subseteq g^{-1}N$

Karena hubungan ini berlaku untuk setiap $g \in G$ maka g^{-1} boleh kita ganti dengan $z = g^{-1} \in G$, sehingga mengakibatkan $N_z \subseteq {}_zN$, $\forall z \in N$ dan terbukti N subgrup normal dari G. ■

Teorema tersebut diatas menunjukkan bahwa koset-koset kiri dari subgrup normal sama dengan koset-koset kanannya. Contoh penggunaannya diberikan pada teladan di bawah ini, yaitu dalam membuktikan subgrup normal.

---

[2] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal 82

Teladan 6.6

Mengacu pada teladan 4.26 diperoleh $H = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ subgrup dari S_3. Buktikan H subgrup normal dari S_3.

Solusi:

Untuk membuktikan bahwa H subgrup normal maka diperiksa semua koset-koset dari H :

$$\pi_1 H = H\pi_1$$

$$\pi_2 H = \{\pi_2, \pi_3, \pi_1\} = H\pi_2$$

$$\pi_3 H = \{\pi_3, \pi_1, \pi_2\} = H\pi_3$$

$$\pi_4 H = \{\pi_4, \pi_6, \pi_5\} = H\pi_4$$

$$\pi_5 H = \{\pi_5, \pi_4, \pi_6\} = H\pi_5$$

$$\pi_6 H = \{\pi_6, \pi_5, \pi_4\} = H\pi_6$$

Karena koset-koset kiri sama dengan koset kanan maka menurut teorema 6.1, H adalah subgrup normal dari S_3.

Teorema 6.2	Jika $\theta : G \rightarrow G'$ homomorfisma grup, maka $Ker\ \theta$ merupakan subgrup normal dari G.[3]

Bukti :

Menurut teorema 5.2 $Ker\ \theta$ merupakan subgrup G. akan dibuktikan bahwa $Ker\ \theta$ adalah subgroup normal.

Misalkan $g \in G$, $n \in Ker\ \theta$ sebarang, maka

$$\begin{aligned} \theta(gng^{-1}) &= \theta(g)\,\theta(n)\,\theta(g^{-1}) \\ &= \theta(g)\,e'(\theta(g))^{-1} \\ &= e' \end{aligned}$$

Sehingga $gng^{-1} \in Ker\ \theta$ subgrup normal dari G.

■

[3] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 83.

Teorema 6.3	Irisan dua subgrup normal merupakan subgrup normal juga.

Bukti.

Menurut teorema 5.16, jika H dan K subgrup dari grup G, maka $H \cap K$ juga sebgrup dari G. Selanjutnya untuk membuktikan normalnya, ambil sebarang $g \in G$, dan $x \in H \cap K$, maka $x \in H$ dan $x \in K$. Karena H subgrup normal maka $gxg^{-1} \in H$, dan karena K subgrup normal maka $gxg^{-1} \in K$. Akibatnya $gxg^{-1} \in H \cap K$.

Jadi $H \cap K$. adalah subgrup normal.

■

Teorema 6.4	Misalkan $\theta: G \to G'$ epimorfisma grup, maka berlaku kondisi berikut.[4] 1. Jika N subgrup normal dari G, maka $\theta(N)$ juga subgrup normal dari G'. 2. Jika N' subgrup normal dari G', maka $\theta^{-1}(N')$ subgrup normal dari G.

Bukti :

1. Menurut teorema 5.1 point c, bahwa $\theta(N)$ merupakan subgrup dari G'. Untuk membuktikan kenormalannya. Misalkan $g' \in G'$ dan $n' \in \theta(N)$. Karena θ surjektif maka ada $g \in G$ sedemikian sehingga $\theta(g) = g'$. Juga ada $n \in N$ sedemikian sehingga $\theta(n) = n'$.

   selanjutnya diperoleh

$$
\begin{aligned}
g'n'(g')^{-1} &= \theta(g)\,\theta(n)\,\theta(g))^{-1} \\
&= \theta(g)\,\theta(n)\,\theta(g^{-1}) \\
&= \theta(gng^{-1})
\end{aligned}
$$

[4] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 72.

Karena N subgrup normal maka $gng^{-1} \in N$, maka $\theta(gng^{-1}) \in \theta(N)$.

Jadi $g'n'(g')^{-1} \in \theta(N)$, terbukti $\theta(N)$ normal.

■

2. Menurut teorema 5.1 point d, $\theta^{1}(N')$ adalah subgrup dari G. Untuk membuktikan normalnya, misalkan kita ambil sebarang $g \in G$, dan $n \in \theta^{-1}(N')$, maka $\theta(n) \in N'$ dan

$$\begin{aligned} \theta(gng^{-1}) &= \theta(g)\, \theta(n)\, \theta(g))^{-1} \\ &= \theta(g)\, \theta(n)\, \theta(g))^{-1} \\ &= g'n'(g')^{-1} \end{aligned}$$

Dengan $g' = \theta(g)$ dan $n' = \theta(n)$. Karena N' subgrup normal dari G' maka $g'n'(g')^{-1} \in N'$, sehingga diperoleh $\theta(gng^{-1}) \in N'$, berakibat $gng^{-1} \in \theta^{-1}(N')$. Jadi $\theta^{1}(N')$ subgrup normal dari G. ■

Teorema berikut ini menunjukkan bahwa hasil kali dari dua koset kiri dari subgrup normal merupakan koset kiri, begitu juga untuk koset kanan.

Teorema 6.5	Misalkan N subgrup normal dari grup G dan aN, bN koset-koset kiri dari N. Maka $aN.\ bN = (ab)N$.[5]

Bukti :

$$\begin{aligned} aN.\ bN &= a.\ Nb.\ N \\ &= a.\ bN.\ N \quad (\text{teorema } 5.1) \\ &= (ab).\ NN \\ &= (ab).\ N \quad (\text{teorema 4.18 nomor 1}). \end{aligned}$$

■

Analog untuk koset kanan.

[5] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal 80

B. GRUP FAKTOR

Berdasarkan sifat dari subgrup normal yaitu koset kiri sama dengan koset kanan, maka perkalian dua koset juga merupakan koset lagi. Sehingga dapat dibentuk struktur grup yang kenggotaannya berupa himpunan koset-koset dari subgrup normal di bawah operasi perkalian koset (operasi disini dalam bentuk abstrak).

Teorema 6.6	Misalkan G suatu grup, dan N subgrup normal dari G dan himpunan G/N beserta operasi perkalian pada G/N adalah sebagai berikut: $G/N = \{ aN \mid a \in G \}$ dan $aN.\, bN = abN$. Maka G/N merupakan grup dan disebut grup faktor dari G oleh N.[6]

Bukti.

Menurut teorema 6.5 maka G/N tertutup di bawah operasi perkalian.

1) Sifat Asosiatif terpenuhi.

$$\begin{aligned}(aN.\, bN)\, cN &= (ab)N.cN \\ &= ((ab)c)N \\ &= (a(bc))N \\ &= aN((bc)N) \\ &= aN(bN.\, cN)\end{aligned}$$

2) Ada Unsur identitas adalah koset N sebab

$$\begin{aligned}aN.N &= aN.eN \\ &= (ae)N \\ &= aN\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}N.aN &= eN.N \\ &= (ea)\, N \\ &= aN\end{aligned}$$

---

[6] *Ibid.*, hal. 81.

3) Setiap unsurnya mempunyai invers, yaitu invers dari aN adalah $a^{-1}N$, sebab:

$$aN.a^{-1}N = (aa^{-1})N$$
$$= eN$$
$$= N$$
$$a^{-1}N.aN = (a^{-1}a)N$$
$$= eN$$
$$= N$$

Terbukti bahwa G/N merupakan grup.

■

Jika G grup komutatif, maka G/N juga komutatif artinya $aN.\,bN = (ab)N = (ba)N = bN.aN$.

Jika G grup hingga maka G/N juga grup hingga akibatnya menurut teorema Lagrange $O(G/N) = \frac{O(G)}{O(N)}$

Teladan 6.7

Subgrup $3Z$ merupakan subgrup normal dari Z. sehingga Grup faktor dari Z oleh $Z/3Z = \{3Z, 1+3Z, 2+3Z\}$.

$Z_3 = \{0, 1, 2\}$

Amatilah Tabel Cayley 6.1 dan 6.2 berikut ini:

+	3Z	1+3Z	2+3Z
3Z	3Z	1+3Z	2+3Z
1+3Z	1+3Z	2+3Z	3Z
2+3Z	2+3Z	3Z	1+3Z

Tabel 6.1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tabel 6.2

Secara umum Z/nZ adalah subgrup faktor dari Z oleh $nZ=Z_n$

Teladan 6.8

$(R,+)$ subgrup normal dari $(C,+)$. Maka

$$C/R = \{ (a+bi) + R \mid a, b \in R \text{ dan } i = \sqrt{-1}\}$$
$$= \{bi + R \mid b \in R \text{ dan } i = \sqrt{-1}\}$$

adalah grup faktor dari C oleh R.

Teladan 6.9

Pada teladan 6.6, $H = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ adalah subgrup normal dari S_3. Maka $S_3/H = \{H, \pi_4 H\}$ adalah grup faktor dan silahkan buat tabel Cayleynya.

Perhatikan $\pi_4 H$. $\pi_4 H = (\pi_4\ \pi_4)\ H = \pi_1 H = H$

Homomorfisma natural dijelaskan dalam teorema berikut ini.

Teorema 6.7	Misalkan N subgrup normal grup G. Maka fungsi $\theta: G \to G/N$ yang didefinisikan oleh $\theta(x) = xN$ merupakan epimorfisma dengan $Ker\ \theta = N$. [7]

Bukti.

Misalkan Ambil sebarang $x, y \in G$, maka

$\theta(xy) = xyN = (xy)N = xN.yN = \theta(x)\theta(y)$

Sehingga θ homomorfisma dan sifat surjektif pada θ adalah

[7] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 83.

akibat dari definisi. Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
Ker\,\theta &= \{a \in G \mid \theta(a) = N\} \\
&= \{a \in G \mid aN = N\} \\
&= \{a \in G \mid a \in N\} \\
&= N
\end{aligned}
$$

Homomorfisma ini disebut homomorfisma Natural.

■

Berdasarkan teorema 6.7 di atas, homomorfisma natural $\theta: G \to G/N$ menunjukkan bahwa setiap grup faktor dari G merupakan bayangan homomorfik dari G. Teorema berikut ini menyatakan bahwa konversi dari pernyataan diatas juga berlaku, yaitu setiap bayangan homomorfik dari grup G adalah isomorfik dengan grup faktor dari G. Sehingga dapat dikatakan bahwa grup-grup faktor identik (dalam pengertian abstrak) dengan bayangan-bayangan homomorfiknya.

Teorema 6.8 Teorema Dasar Homomorfisma untuk Grup.[8]	Misalkan $\varphi : G \to G'$ isomorfisma grup dengan $Ker\,\varphi = H$, maka $G/H \simeq G'$

Bukti.

Untuk membuktikan teorema ini akan ditentukan isomorfisma dari G/H ke G'. Fungsi ω didefinisikan $\omega: G/H \to G'$ dengan $\omega(xH) = \varphi(x), \forall xH \in G/H$.
Diperoleh bahwa ω adalah fungsi injektif, sebab

$$
\begin{aligned}
& xH = yH \\
\leftrightarrow \quad & xy^{-1} \in H = Ker\,\mu
\end{aligned}
$$

[8] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 85.

$\leftrightarrow \quad \varphi(xy^{-1}) = e'$, dimana e' unsur identitas dari G'.

$\leftrightarrow \quad \varphi(x)\,\varphi(y^{-1})\ ) = e'$

$\leftrightarrow \quad \varphi(x)\varphi(y)^{-1} = e'$

$\leftrightarrow \quad \varphi(x) = \varphi(y)$

$\leftrightarrow \quad \omega(xH) = \omega(yH)$

$\leftrightarrow$

Diperoleh bahwa ω adalah fungsi surjektif, sebab untuk setiap $a \in G'$, karena φ surjektif maka ada $x \in G$ sehingga $\varphi(x) = a$ dengan $\omega\,(xH) = \varphi(x) = a$.

Juga didapat bahwa ω adalah homomorfisma sebab;

$$\begin{aligned}\omega\,(xH.yH) &= \omega\,(xyH)\\ &= \varphi(xy)\\ &= \varphi(x)\,\varphi(y)\\ &= \omega(xH)\omega(yH)\end{aligned}$$

Sehingga terdapat isomorfisma $\omega: G/H \to G'$.

Terbukti bahwa $G/II \simeq G'$.

■

Berikut ini dipaparkan beberapa teladan penggunaan teorema dasar homorfisma yaitu untuk menunjukkan ke-isomorfik-kan antara bayangan-bayangan homomorfisma grup dengan grup faktornya.

Teladan 6.10

Pada teladan 5.3, fungsi $\theta : A \times B \to A$, dengan A dan B masing-masing grup yang merupakan epimorfisma. Selanjutnya dari teladan 5.7 diperoleh bahwa $Ker\ \theta = \{e_A\} \times B$. Maka menurut Teorema homomorfisma berlaku $(AxB)/\{e\}xB \simeq A$.

Teladan 6.11

Dapat ditunjukkan bahwa fungsi $\mu : Z_{12} \to Z_4$ dengan $\mu(\bar{a}_{12}) = \bar{a}_4, \forall \bar{a}_{12} \in Z_{12}$ suatu epimorfisma dan $Ker\mu = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} = \langle \bar{4} \rangle$. Maka menurut teorema dasar homomorfisma berlaku

$Z_{12}/\langle\bar{4}\rangle \simeq Z_4$.

Teladan 6.12

Misalkan fungsi $\mu : Z \to Z_n$ dengan $\mu(a) = \bar{a}$, $\forall a \in Z$ merupakan epimorfisma dengan $Ker\ \mu = nZ$. Maka menurut teorema dasar homomorfisma berlaku $Z/nZ \simeq Z_n$.

Teladan 6.13

Silakan cari sendiri sebagai latihan bagi pembaca!

SOAL-SOAL UNTUK LATIHAN

1. Pandang G sebagai grup yang anggotanya terdiri atas matriks-matriks tak singular berordo 2 x 2 dengan elemen-elemennya bilangan real.

   Himpunan N adalah $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in R, a \neq 0 \right\}$. Tunjukkan bahwa N subgrup Normal G.

2. Diketahui homomorfisma $\theta : Z \to Z_6$, $\theta(a) = \bar{a}$, $\forall a \in Z$. Tentukan Ker θ dan grup faktor $Z/\ker \theta$.
3. Misalkan A grup, B subgrup A dan $N(B) = \{a \in A | aBa^{-1} = B\}$. Buktikan B subgrup normal $N(B)$.
4. Misalkan H, K masing-masing subgrup normal G dan $H \cap K = \{e\}$. Buktikan $hk = kh$, $\forall h \in H$, $\forall k \in K$.
5. Diberikan N subgrup normal dari grup G, H sub grup G, $HN = \{hn | h \in H, n \in N\}$. buktikan HN subgrup G dan merupakan sub grup terkecil yang memuat H dan N.
6. Buktikan grup faktor dari grup siklik adalah siklik.
7. Buktikan $(Z_4 \times Z_2)/(\{0\} \times Z_2)$, isomorfik dengan Z_4.

Solusi ini sebagai acuan untuk memunculkan jalan keluar dari soal yang diberikan:

1. Misalkan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R, ad - bc \neq 0 \right\}$ dan $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in R, a \neq 0 \right\}$ akan ditunjukkan bahwa jika $A \in G$ dan $B \in N, berlaku$ $ABA^{-1} \in N$

   Misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ maka AB = BA, sehingga $ABA^{-1} = BAA^{-1} = B.I = B \in N$. Jadi N subgrup normal G
2. Misalkan untuk setiap a $\in$N(B), b $\in$B. Karena a $\in$N(B) maka $aBa^{-1} = B$ *atau* $aba^{-1} = b \in B$. Jadi B subgrup normal N(B).
3. Silakan dilanjutkan!

Tujuan Umum Perkuliahan (TUP)

Setelah selesai perkuliahan diharapkan mahasiswa dapat memahami sifat-sifat, tipe-tipe dan karakteristik ring serta memahami konsep homomorpisma ring.

Tujuan Khusus Perkuliahan (TKP)

Setelah selesai perkuliahan diharapkan mahasiswa mampu :

a) Mengidentifikasi suatu ring;
b) Menunjukkan contoh suatu ring bilangan;
c) Menunjukkan suatu ring matriks/pasangan bilangan berurutan;
d) Menentukan sifat suatu ring;
e) Mengidentifikasi suatu ring komutatif, suaturing dengan elemen satuan;

BAB VII
RING, DAERAH INTEGRAL DAN LAPANGAN

Pada bab yang terdahulu dibicarakan struktur aljabar grup dengan satu operasi biner, misalnya Z dengan operasi + (operasi penjumlahan) atau R dengan operasi x (operasi perkalian) dan seterusnya. Dalam bab ini akan dibahas struktur aljabar dengan dua operasi biner yaitu operasi + dan ·. Operasi penjumlahan dan perkalian yang dimaksudkan adalah operasi dalam pengertian abstraks beserta hubungan antara kedua operasi tersebut, sehingga berlaku kombinasi: $a.(b+c) = a.b + a.c$ dan $(a+b).c = a.c + b.$. Konsep ring, daerah integral dan lapangan merupakan tipe struktur dalam bahasan ini.

(R, *,#) .... (R, #, *)..... (R, x, +)

A. PENGERTIAN RING

Struktur aljabar dengan dua operasi biner yang paling umum adalah ring, berikut ini diberikan definisinya.

Definisi 7.1	Struktur aljabar (R,+,·) dengan operasi + dan operasi . disebut disebut Ring jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini.[1] 1. (R, +) merupakan grup komutatif. 2. Bersifat asosiatif terhadap operasi perkalian (terhadap operasi kedua). 3. Berlaku hukum distributif kiri artinya $\forall x, y, z \in R$, maka $x(y + z) = xy + xz$ 4. Berlaku hukum distributif kanan artinya $\forall x, y. z \in R$, maka $(x + y)z = xz + yz$

Unsur identitas terhadap + (atau operasi pertama) dinotasikan dengan 0 dan disebut unsur nol.

1. Jika operasi perkalian bersifat komutatif, artinya $\forall x,y \in R$, $xy = yx$ maka R disebut ring komutatif
2. Jika ada unsur identitas dibawah operasi perkalian (unsur ini disebut unsur kesatuan, dinotasikan dengan 1 dan disingkat unkes), artinya $\forall x \in R, \exists 1 \in R$, sehingga $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, maka R disebut ring dengan unsur kesatuan.

Catatan :

Perhatikan bahwa operasi penjumlahan dan perkalian disini adalah operasi dalam pengertian abstrak artinya tergantung dari definisi operasi yang diberikan.

Teladan 7.1

Pada struktur-struktur $(Z,+,\cdot)$, $(Q\ +,\cdot)$, $(R,\ +,\ \cdot)$ dan $(C,\ +,\cdot)$, memenuhi aksioma 1, 2 dan 3, sehingga masing-masing merupakan ring komutatif dengan unkes 1.

[1] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition,* Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 126.

Teladan 7.2

$M_n(R)$ adalah himpunan matriks-matriks ordo *nxn* dengan entry-entry bilangan real, maka $(M_n(R), +, \cdot)$ adalah ring.

1. $(M_n(R), +)$ adalah grup komutatif
2. $\forall A, B, C \in M_n(R)$, berlaku $(AB)C = A(BC)$
3. Hukum distributif berlaku : $\forall A, B, C \in M_n(R)$
   (a) $A(B + C) = AB + AC$
   (b) $(A + B)C = AC + BC$

Ada matriks Identitas I, sedemikian sehingga I.A = A.I = A, untuk sebarang A di $M_n(R)$, maka $(M_n(R), +, \cdot)$ disebut ring dengan unkes.

Ring ini bukan ring komutatif, sebab ada matriks $A, B \in M_n(R)$, dengan $AB \neq BA$. Untuk lebih meyakinkan masalah tersebut silakan berikan contohnya.!

Teladan 7.3

Himpunan $(Z_n, \oplus, \odot)$yang elemen-elemennya terdiri dari bilangan-bilangan bulat modulo *n* merupakan ring.

1. $(Z_n, \odot)$ adalah grup komutatif
2. Terhadap Operasi $\odot$ bersifat asosiatif. Artinya $(\bar{a}\odot\bar{b})\odot\bar{c} = \bar{a}\odot(\bar{b}\odot\bar{c})$,
3. Sifat distributif berlaku :

$$\bar{a}\odot(b\oplus c) = \bar{a}\odot\left(\overline{b + c}\right) = \overline{a(b + c)} = \overline{ab + ac} = \overline{ab}\oplus\overline{ac}$$
$$= (\bar{a} \odot \bar{b})\oplus(\bar{a}\odot\bar{c})$$

Ring tersebut memiliki unkes yaitu $\bar{1}$ dan ring tersebut merupakan ring komutatif artinya untuk setiap $\bar{a}$, $\bar{b} \in Z_n$, berlaku:

$$\bar{a} \odot \bar{b} = \overline{ab} = \overline{ba} = \bar{b} \odot \bar{a}$$

Teladan 7.4

Himpunan F terdiri dari fungsi-fungsi $f : R \to R$ dibawah operasi $+$ dan $\cdot$ yang definisikan

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \qquad \forall x \in R$$

adalah merupakan ring.

1. $(F, +)$ grup komutatif
2. Asosiatif berlaku : $(fg)\,h = f\,(gh)$
3. Distributif kiri berlaku :

$$\begin{aligned}(f\,(g+h))\,(x) &= f(x)(g+h)(x)\\ &= f(x)(g\,(x) + h(x))\\ &= f(x)(g)(x) + f(x)h\,(x)\\ &= (fg)(x) + (fh)(x)\\ &= (fg + fh)(x)\end{aligned}$$

Untuk bukti distributif kanan adalah analog dengan distributif kiri.

$(F, +, .)$ merupakan ring dengan unkes yaitu $f_1(x) = 1$ dan juga merupakan ring komutatif :

$$\begin{aligned}(fg)\,(x) &= f(x)g(x)\\ &= g(x)\,f(x))\\ &= (gf)(x)\end{aligned}$$

Akan tetapi jika operasi perkalian didefiniskan sebagai komposisi fungsi $f \circ g$, maka $(F, +, \circ)$ bukan ring, kenapa ?

Teladan 7.5

Misalkan X himpunan tak kosong dan 2^X adalah himpunan kuasa dari X. Operasi penjumlahan dan perkalian didefinisikan $\forall A, B \in 2^X$

$$A + B = (A \cup B) - (A \cap B) \text{ dan } A.B = A \cap B$$

Maka $(2^X, +, .)$merupakan ring (tunjukkan!) dengan unsur nolnya himpunan kosong $\emptyset$ sebab

$$A + \emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A - \emptyset = A \text{ Begitu pula}$$

$$\emptyset + A = (\emptyset \cup A) - (\emptyset \cap A) = A - \emptyset = A$$

Merupakan ring dengan unkes himpunan X sebab untuk setiap $A \in 2^X$ berlaku:

$$A.X \quad = A \cap X = A$$

$$X.A \quad = X \cap A = A$$

Teladan 7.6

Misalkan $(G, +)$ grup komutatif dan didefinisikan untuk setiap $x, y \in G$, $xy = x$. Maka $(G, +, .)$ adalah struktur yang bukan ring sebab distributif tidak berlaku yaitu $x(y + z) = x$ sedangkan $xy + xz = x + x = 2x$

sebagai contoh misalkan $G = (Z, +, \cdot)$, maka berlaku:

$$4(2 + 5) = 4.7 = 4$$

$$4.2+4.5 = 4 + 4 = 8$$

B. SIFAT-SIFAT RING

Jika R ring maka (R, +) adalah grup komutatif sehingga berlaku kondisi-kondisi berikut ini:

1. Unsur nol adalah tunggal
2. Setiap unsur mempunyai invers aditif (terhadap operasi +) dan invers ini tunggal
3. Hukum pencoretan kiri dan kanan berlaku, artinya :

Jika $a + b = a + c$, maka $b = c$

Jika $b + a = c + a$, maka $b = c$

4. Persamaan $a + x = b$ dan $y + a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal
5. Berlaku $-(-a) = a$ dan $-(a + b) = -b + (-a) = -a + (-b)$
6. Jika m dan n bilangan-bilangan bulat maka berlaku :

$$(m + n)a = ma + na$$

$$m(a + b) = ma + mb$$

$$m(na) = (mn)a$$

Catatan : $x + (-y)$ dinotasikan dengan $x - y$

Berikut ini disajikan teorema-teorema yang berkaitan dengan sifat-sifat sederhana dari ring

Teorema 7.1	Misalkan R suatu ring dengan unsur nol adalah 0 dan $x, y, z \in R$. Maka memenuhi sifat-sifat berikut.[2] 1. $0.x = x.0 = 0$ 2. $x(-y) = (-x)y = -(xy)$ 3. $(-x)(-y) = xy$ 4. $x(y - z) = xy - xz$ $(x - y)z = xz - yz$

Bukti :

1. Dari sifat unsur nol distributif maka $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$

   Dilain pihak karena 0 unsur nol maka berlaku $0x = 0 + 0x$

   Selanjutnya dari kedua kondisi diatas diperoleh :

---

[2] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 202.

$$0x + 0x = 0 + 0x$$

$$0x = 0 \quad \text{(hukum pencoretan)}$$

Bukti untuk $x0 = 0$ adalah analog dengan bukti diatas.

■

2. Berdasarkan sifat distributif dan sifat 1 maka

$$x(y) + x(-y) = x(y - y)$$

$$= x0$$

$$= 0$$

dilain pihak juga berlaku : $-(xy) + xy = 0$, sehingga diperoleh

$$x(-y) + xy = -(xy) + xy \quad \text{(sifat 2)}$$

$$x(-y) = -(xy)$$

Bukti untuk $(-x)y = -(xy)$ adalah analog dengan bukti diatas. ■

3. $(-x)(-y) = -(x(-y)$ (menurut 2)

$= -(-(xy))$ (menurut 2)

$= xy$ (kondisi 5)

■

4. $x(y - z) = x(y + (-z))$

$= xy + x(-z)$

$= xy + (-xz)$

$= xy - xz$.

■

Teorema 7.2	Unsur kesatuan dari suatu ring R adalah tunggal.[3]

Bukti:

Misalkan 1 dan $1'$ keduanya unkes dari R, maka

$1 . 1' = 1'$ (karena 1 unkes dari R)

$1 . 1' = 1$ (karena 1' unkes dari R)

sehingga diperoleh $1 = 1'$.

■

Teorema 7.3	Misalkan R suatu ring, dan $R \neq \{0\}$ serta memiliki unkes 1, maka $0 \neq 1$.[4]

Bukti :

Misalkan ambil sebarang $x \in R, x \neq 0$. Andaikan $0 = 1$ maka $0x = 1x$, sehingga diperoleh $0 = x$, jadi kontradiksi dengan yang diketahui, yaitu $x \neq 0$. Jadi pengandaian salah. Jadi $0 \neq 1$. ■

C. DAERAH INTEGRAL (INTEGRAL DOMAIN)

Telah kita ketahui bahwa dalam ring $(Z, +, .)$ berlaku proposisi sebagai berikut :

Jika $ab = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$

Artinya jika hasil kali dua bilangan bulat sama dengan nol, maka salah satu faktornya harus sama nol. Sehingga jika akan menyelesaikan persamaan.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

---

[3] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 228.

[4] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 128.

maka $x - 1 = 0$ atau $x - 3 = 0$ merupakan syarat perlu bagi penyelesaian persamaan diatas. Jadi diperoleh penyelesaian $x = 1$ atau $x = 3$.

Mungkin timbul pertanyaan apakah kondisi diatas selalu berlaku dalam ring sebarang? Ternyata ada ring dimana kondisi tersebut diatas tidak berlaku. Misalnya ambil contoh dalam ring Z_{12} berlaku $\overline{3} \neq 0$dan $\overline{4} \neq 0$, tetapi $\overline{3} \otimes \overline{4} = 0$, demikian juga halnya $\overline{9} \otimes \overline{8} = 0$, padahal $\overline{9} \neq 0$ dan $\overline{8} \neq 0$ dan seterusnya.

Sehingga penyelesaian dari persamaan

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

di Z_{12} tidak hanya diperoleh dari $(x - 2) = 0$ atau $(x - 3) = 0$ sehingga diperoleh $x = 2$ atau $x = 3$, tetapi juga benar untuk $x = 6$ dan $x = 11$ sebab:

Jika $x = 6$, maka $(6 - 2)(6 - 3) = 4.3 = 12 = 0$
Jika $x = 11$, maka $(11-2)(11-3) = 9.8 = 72 = 0$

Berdasarkan dua kenyataan diatas, berikut ini akan didefinisikan suatu unsur pembagi nol dalam ring yang komutatif. Selanjutnya suatu ring yang komutatif, mempunyai unkes dan tidak mempunyai pembagi nol akan membentuk struktur yang disebut daerah integral. Sehingga daerah integral adalah suatu bentuk khusus dari ring.

Definisi 7.2 Pembagi Nol.[5]	Misalkan R ring komutatif, $a \in R, a \neq 0$. Unsur a disebut pembagi nol jika ada $b \neq 0$ sehingga $ab = 0$.

Teladan 7.7

Unsur-unsur pembagi nol pada Z_{12} adalah $\overline{٢}, \overline{٣}, \overline{٤}, \overline{٦}, \overline{٨}, \overline{٩}, \overline{١٠}$

Unsur $\overline{٢}$ pembagi nol sebab ada $\overline{٦} \neq \overline{٠}$ sehingga $\overline{٢} \oplus \overline{٦} = 0$, untuk yang lainnya silakan ditelaah dan dianalisis sendiri.

Teladan 7.8

Dalam ring terdiri dari matriks-matriks ordo 2 x 2 memiliki pembagi nol.

Misalnya matrik A, B berikut.

$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, dan $B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ sehingga didapat $AB = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

Dengan demikian A maupun B disebut sebagai pembagi nol

Catatan:

Suatu ring R tidak mempunyai pembagi nol jika memenuhi kondisi berikut ini :

Jika $ab = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$, $\forall a, b \in R$.

Kontraposisi dari pernyataan diatas adalah

Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, maka $ab \neq 0$

Ring Z dikatakan Ring komutatif yang tidak mempunyai pembagi nol.

Telah dijelaskan dimuka bahwa dalam sebarang ring R berlaku hukum pencoretan dibawah operasi penjumlahan, hal ini sebagai akibat dari $(R, +)$ adalah grup. Tetapi tidak demikian halnya jika dibawah operasi perkalian. Teorema dibawah ini

---

[5] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition,* Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 128.

menyatakan bahwa syarat perlu dan syarat cukup agar hukum pencoretan berlaku dibawah operasi perkalian adalah ring R tidak mempunyai pembagi nol.

Teorema 7.4	Hukum pencoretan berlaku dalam ring R, jika dan hanya jika R tidak mempunyai pembagi nol.[6]

Bukti :

Diketahui hukum pencoretan berlaku dalam ring R.

Misalkan sebarang $a, b, \in R, a \neq 0$, maka

$$ab = 0$$

$$\rightarrow \quad ab = a0$$

$$\rightarrow \quad b = 0 \quad \text{(hukum pencoretan berlaku)}$$

Dengan cara yang sama adakan diperoleh jika $b \neq 0$ dan $ab = 0$, maka haruslah $a = 0$.

Jadi terbukti R tidak mempunyai pembagi nol.

■

Sebaliknya, diketahui R merupakan ring tanpa pembagi nol. Misalkan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$, maka

$$ab = ac$$

$$\rightarrow \quad ab - ac = 0$$

$$\rightarrow \quad a(b - c) = 0$$

$$\rightarrow \quad b - c = 0 \quad \text{(karena R ring tanpa pembagi nol)}$$

$$\rightarrow \quad b = c$$

Dengan argumen yang sama dapat ditunjukkan bahwa $ba = ca$ dimana $a \neq 0$ maka $b = c$. Sehingga terbukti hukum pencoretan kiri/kanan berlaku .

■

[6] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 138.

Sebagai akibat dari teorema 6.4 adalah jika R ring tanpa pembagi nol maka persamaan $ax = b$ mempunyai penyelesaian tunggal. Sebab misalkan x_1 dan x_2 adalah penyelesaiannya maka:

$ax_1 = b$ dan $ax_2 = b$

$\rightarrow ax_1 = ax_2$

$\rightarrow x_1 = x_2$ (Hukum pencoretan berlaku)

Selanjutnya jika R dengan unkes 1 dan $a \neq 0$ mempunyai invers multiplikatif (a disebut unit), maka penyelesaiannya adalah $x = a^{-1}b$. Jika juga berlaku R adalah ring yang komutatif maka penyelesaian persamaan diatas adalah $x = a^{-1}b = ba^{-1}$.

Definisi daerah integral berikut ini adalah merupakan bentuk khusus dari ring.

Definisi 7.3 Darerah Integral.[7]	Suatu ring komutatif dengan unkes dan tidak mempunyai pembagi nol disebut daerah integral.

Berdasarkan definisi diatas maka persamaan polinomial dengan koefisien-koefisien dalam daerah integral yang dapat difaktorkan menjadi faktor-faktor linier, penyelesaiannya dapat dicari dengan cara menyamakan setiap faktornya dengan nol. Juga harus diperhatikan bahwa dalam daerah integral hukum pencoretan (dibawah operasi perkalian) berlaku. Dibawah ini diberikan contoh-contoh dari daerah integral.

Teladan 7.9

Tunjukkan bahwa (Z, +, .) adalah daerah integral. (Silakan dibuktikan sebagai latihan).

[7] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 202.

Teladan 7.10

$M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in R \right\}$ adalah ring yang komutatif, mempunyai unkes matriks $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solusi:

Untuk setiap matriks tak nol $A, B \in M$, dimana $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh $ab \neq 0$.

Jadi M adalah ring tanpa pembagi nol, sehingga M merupakan daerah integral.

Teladan 7.11

Buktikan Z_p daerah integral jika dan hanya jika p bilangan prima.

Solusi:

Misalkan Z_p daerah integral maka Z_p tidak memuat pembagi nol. Andaikan p bukan bilangan prima, maka terdapat $m, n \in Z$ dimana $1 < m, n < p$ sehingga $p = mn$. Selanjutnya berlaku $\overline{m} \neq \overline{0}$ dan $\overline{n} \neq \overline{0}$ dan $\overline{0} = \overline{p} = \overline{mn} = \overline{m} \otimes \overline{n}$. Hal ini menunjukkan bahwa $\overline{m}$ adalah pembagi nol. Jadi diperoleh kontrakdiksi dengan yang diketahui bahwa Z tidak memiliki pembagi nol, sehingga terbukti p prima.

Sebaliknya, misalkan p prima. Pada teladan 6.3 diperoleh bahwa Z_p merupakan ring komulatif dan mempunyai unkes. Akan dibuktikan Z_p tidak mempunyai pembagi nol. Misalkan untuk sebarang $\overline{a}, \overline{b} \in Z_p$ dengan $\overline{a} \neq \overline{0}, \overline{b} \neq \overline{0}$. Maka ab bukan kelipatan dari p yaitu :

$$\overline{ab} \neq kp \text{ dengan } k \in Z$$
$$\rightarrow \overline{ab} \neq \overline{0}$$
$$\rightarrow \overline{a} \odot \overline{b} \neq \overline{0}$$

Jadi terbukti Z_p tidak memuat pembagi nol.

Teladan 7.14

Pada teladan 6.4 $(F, +, .)$ adalah ring komutatif mempunyai unkes, tetapi tidak setiap unsur dari F mempunyai invers (kenapa? Jelaskan !), sehingga dengan demikian maka F bukan suatu field atau lapangan.

> ***Catatan:***
>
> Dalam suatu field atau lapangan penyelesaian dari persamaan $ax = b$ adalah $x = a^{-1}b$ dapat dipresentasikan sebagai pembagian $\frac{a}{b}$. Invers multiplikasi dari $a \neq 0$ yaitu a^{-1} dinotasikan dengan $\frac{1}{a}$.

Teorema dibawah ini menunjukkan bahwa field atau lapangan merupakan struktur ring yang lebih khusus dari daerah integral (integral domain).

Teorema 7.5	Setiap field atau lapangan merupakan daerah integral (integral domain).[9]

Bukti :

Misalkan F field atau lapangan, maka F adalah ring yang komutatif dan mempunyai unkes. Juga berlaku $(F-\{0\},.)$ adalah grup. Untuk selanjutnya akan dibuktikan bahwa F tidak mempunyai pembagi nol. Misalnya kita ambil $x, y, \in F$ sebarang dengan $x \neq 0$ dan $y \neq 0$, maka $x, y \in F-\{0\}$. Karena $(F-\{0\},.)$ grup maka bersifat tertutup sehingga xy

[9] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 233.

$\in F-\{0\}$. Ini menunjukkan $xy \neq 0$. Jadi terbukti bahwa syarat-syarat daerah integral dipenuhi.

■

Karena setiap field atau lapangan merupakan daerah integral (integral domain) maka setiap field/lapangan tidak mempunyai pembagi nol. Perhatikan bahwa $(Z, +, .)$ adalah daerah integral atau integral domain tetapi bukan field/lapangan. Hal ini menunjukkan bahwa konvers dari teorema 7.4 tidak berlaku. Tetapi jika D adalah daerah integral hingga (integral domain finite) maka D suatu field/lapangan.

Teorema 7.6	Setiap daerah integral hingga (integral domain finit) adalah merupakan field/lapangan.[10]

Bukti :

Misalkan D adalah daerah integral yang hingga dan $D = \{ 0, 1, a_1, a_2, ..., a_{n-1} \}$. Maka D adalah ring yang komutatif dan mempunyai unkes. Langkah selanjutnya akan membuktikan bahwa setiap unsur tak nol dari D mempunyai invers. Misalkan $a \in D$ sebarang dan $a \neq 0$. Konstruksi himpunan $D' = \{ a_1, aa_1, aa_2, ..., aa_{n-1} \}$.

Karena D daerah integral maka D tidak mempunyai pembagi nol sehingga unsur-unsur dari D' adalah unsur-unsur tak nol dari D. Unsur-unsur dari D' semuanya berbeda, sebab andaikan terdapat i, j dimana $i \neq j$ sehingga.

$$aa_i = aa_j$$
$$\rightarrow aa_i - aa_j = 0$$
$$\rightarrow a(a_i - a_j) = 0$$

[10] *Ibid.*, hal. 234.

$$\rightarrow \quad (a_i - a_j) = 0, \quad \text{karena D tanpa}$$

pembagi nol

$$\rightarrow \quad a_i = a_j$$

maka diperoleh kontradiksi. Jadi banyaknya unsur dari D' tidak kurang dari n. Akibatnya banyaknya unsur dari D' sama dengan n. Ini berarti bahwa unsur-unsur dari D' adalah unsur-unsur tak nol dari D, begitu juga sebaliknya. Sehingga terdapat a_k dengan $aa_k = 1$, dan karena D komutatif maka berlaku $aa_k = a_k a = 1$, ini artinya a_k invers dari a.

■

Selanjutnya karena $a \in D$, $a \neq 0$ sebarang, maka setiap unsur tak nol dari D mempunyai invers. Jadi terbukti syarat-syarat lapangan dipenuhi. ■

Contoh penggunaan teorema 7.4 diberikan dalam pembuktian berikut ini.

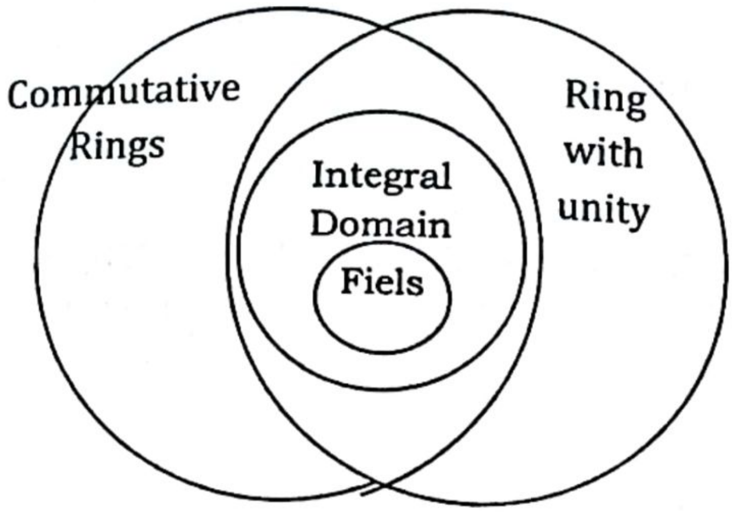
Teladan 7.15

Buktikan Z_p dengan p prima merupakan field atau lapangan.

Solusi :

Pada teladan 7.11 telah dibuktikan bahwa Z_p, dengan p prima adalah daerah integral. Selanjutnya menurut teorema 7.6 karena Z_p hingga maka Z_p lapangan.

Diagram dibawah ini menunjukkan hubungan antara bentuk-bentuk ring yang sudah dipelajari.



A Collection of Rings

E. KARAKTERISTIK RING

Pada ring Z_m, dimana m adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $m\bar{a} \in Z_m, \forall \bar{a} \in Z_m$. Bilangan yang seperti ini merupakan bilangan yang special dalam pembahasan mengenai ring karena tidak setiap ring mempunyai bilangan tersebut.

Definisi 7.5	Bilangan n disebut karakteristik dari ring R jika n adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $na = 0, \forall a \in R$. Jika tidak ada bilangan seperti ini maka dikatakan n berkarakteristik 0.[11]

Teladan 7.16

Ring Zn mempunyai karakteristik n.

Teladan 7.17

Ring Z berkarakteristik 0 sebab tidak ada bilangan bulat n sehingga $na = 0, \forall a \in Z$. Pada Z hanya untuk $n = 0$ sehingga $0a = 0, \forall a \in Z$

[11] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 255.

Teladan 7.18

Ring 2^x pada teladan 7.5 unsur nolnya adalah himpunan $\varnothing$ dan mempunyai karakteristik 2, sebab 2 adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $\forall A \in ٢^x$ berlaku :

$$\begin{aligned} 2A &= A + A \\ &= (A \cup A) - (A \cap A) \\ &= A - A \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

Jika ring R mempunyai unkes *1*, maka karakteristiknya akan lebih mudah dicari dengan menggunakan teorema berikut ini.

Teorema 7.7	Misalkan R ring dengan unkes 1. R mempunyai n jika dan hanya jika n bilangan bulat positif terkecil sehingga $n1 = 0$.[12]

Bukti :

R mempunyai karakteristik n, maka n bilangan positif terkecil sehingga $na = 0, \forall a \in R$. Dengan mengambil $a = 1$ maka diperoleh $n=0$, sehingga $n1 = 0$. Sebaliknya jika n adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $n1 = 0$.

$$\begin{aligned} \forall a \in R,\ na &= a + a + a + \cdots + a \\ &= a(1 + 1 + 1 + \cdots + 1) \\ &= a(n1) \\ &= a(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

[12] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition,* Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 138.

Selanjutnya andaikan n tidak minimal maka terdapat $m < n$ sedemikian sehingga $ma = 0, \quad \forall a \in R$, Akibatnya dengan mengambil $a = 1$ maka berlaku $m1 = 0$, hal ini berarti kontradiksi dengan hipotesis. Terbukti n karakteristik dari R. ■

Teorema 7.8	Jika suatu lapangan atau daerah integral berkarakteristik n, maka n adalah bilangan prima.[13]

Bukti :

Misalkan R adalah lapangan atau daerah integral yang berkarakteristik n, maka menurut teorema 7.7, berarti n adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $n1 = 0$. Andaikan n bukan bilangan prima, maka $n = rs$ dengan $1 < r, s < n$ dan r, s masing-masing bulat positif. Akibatnya:

$$(r1)\,(s1) = \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{r\ kali}\,\underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{s\ kali}$$

$$= \underbrace{(1 + 1 + 1 + \ldots + 1)}_{rs\ kali}$$

$$= (rs)\,1$$

$$= n1$$

$$= 0 \ \text{(menurut teorema 7.7)}$$

Selanjutnya karena R lapangan atau daerah integral maka tidak mempunyai pembagi nol, sehingga berlaku $r1 = 0$ atau $s1 = 0$. Ini kontradiksi dengan n minimal sehingga $n1 = 0$.

Jadi terbukti n bilangan prima.

■

---

[13] *Ibid.*, hal. 140.

F. SUBRING DAN IDEAL

Analog dengan subgrup, suatu subring dari ring R didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 7.6 Subring.[14]	Misalkan R ring dan S adalah himpunan bagian dari ring R, dan S disebut subring dari R jika S merupakan ring dibawah operasi dalam R.

Teladan 7.19

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ subring dari $(\mathbb{R},+,\cdot)$ dan $(\mathbb{R},+,\cdot)$ subring dari $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

Teorema 7.9	Misalkan R suatu ring, $S \subseteq R, S \neq \varnothing$. Himpunan S merupakan subring dari ring R jika dan hanya jika.[15] 1. $\forall x, y \in S \rightarrow x - y \in S$ 2. $\forall x, y \in S \rightarrow xy \in S$ Syarat pertama menunjukkan bahwa S subgrup aditif dari R. Bukti dari teorema diatas dimaksudkan sebagai latihan.

Peranan subgrup normal dalam grup analog dengan peranan ideal dalam ring. Adapun definisi ideal adalah sebagai berikut.

Definisi 7.7 Ideal.[16]	Misalkan R suatu ring, $I \subseteq R, I \neq \varnothing$. Himpunan bagian I disebut ideal jika memenuhi. 1. $x, y \in I \rightarrow x \pm y \in I$ 2. $\forall r \in R, \forall x \in I \rightarrow rx \in I$ dan $xr \in I$.

[14] William D.Blair & John A.Beachy. *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc, 1990, hal. 207.

[15] *Ibid.*, hal. 210.

[16] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 140.

Dapat ditunjukkan bahwa setiap ideal merupakan subring. Silahkan dicoba untuk dibuktikan!

Berikut ini diberikan beberapa contoh ideal.

Teladan 7.20

Misalkan F himpunan fungsi-fungsi dari R ke R. C adalah himpunan fungsi-fungsi konstan dan N himpunan fungsi-fungsi f dengan formula $f(2) = 0$, maka $(F, +, \cdot)$ adalah ring. Coba diperiksa apakah.

1. N ideal dari F
2. C ideal dari F

Solusi :

1. Jika $g, h \in N$, maka $g(2) = 0$ dan $h(2) = 0$, sehingga

$$\begin{aligned}(g-h)(2) &= g(2) - h(2)\\ &= 0 - 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Jika $f \in F, g \in N$ maka $g(2) = 0$ sehingga

$$\begin{aligned}(fg)(2) &= f(2)\,g(2)\\ &= f(2).\,0\\ &= 0\end{aligned}$$

sehingga $fg \in N$. Dengan cara yang sama diperoleh $gf \in N$

Jadi syarat-syarat ideal untuk N dipenuhi.

2. Jika $g, h \in C$ dengan $g(x) = c_1$ dan $h(x) = c_2$, maka

$$\begin{aligned}(g-h)(x) &= g(x) - h(x)\\ &= c_1 - c_2\end{aligned}$$

sehingga $g - h \in C$

Tetapi jika $f \in F, g \in C$ dengan $g(x) = c$

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$$
$$= c\,f(x)$$

Jika f bukan fungsi konstan, maka fg juga bukan fungsi konstan. Jadi C bukan ideal.

Teladan 7.21

Misalkan R adalah ring komulatif dengan unkes 1 dan $a \in R$. Himpunan $\langle a \rangle$ didefinisikan sebagai $\langle a \rangle = \{ra \mid r \in R\}$.

Tunjukkan bahwa $\langle a \rangle$ adalah ideal dari R (ideal ini disebut ideal utama yang dibangun oleh a).

Solusi:

Jika $ra,\ sa \in \langle a \rangle$ maka $ra - sa = (r-s)a$. Karena $r - s \in R$ maka $(r - s)a \in \langle a \rangle$, sehingga $ra - sa \in \langle a \rangle$.

Syarat *kedua* : jika $r \in R$, dan $sa \in \langle a \rangle$, maka $r(sa) = (rs)a$. Karena $rs \in R$ maka $(rs)a = r(sa) \in \langle a \rangle$. Selanjutnya,

$$(sa)\,r = s\,(ar) = s\,(ra) \quad (R \text{ komutatif})$$
$$= (sr)\,a$$

karena $sr \in R$ maka $(sr)a \in \langle a \rangle$ sehingga $(sa)r \in \langle a \rangle$.
Jadi syarat-syarat ideal untuk $\langle a \rangle$ dipenuhi.

Teorema 7.10	Irisan dua ideal merupakan ideal juga.[17]

[17] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 148.

Bukti :

Misalkan N dan M masing-masing ideal dari ring R. Maka N dan M masing-masing subgrup aditif dari R dan menurut teorema $N \cap M$ subgrup dari R. Selanjutnya, misalkan ambil sebarang $r \in R, x \in N \cap M$, maka $x \in N$ dan $x \in M$. Karena N dan M ideal, maka $rx \in N$ dan $xr \in N$, juga $rx \in M$ dan $xr \in M$ sehingga diperoleh $rx \in N \cap M$ dan $xr \in N \cap M$. Terbukti syarat-syarat ideal untuk $N \cap M$ dipenuhi.

■

Teorema 7.11	Misalkan R suatu ring dengan unkes 1 dan N ideal dari R. Jika N memuat unit, maka $N = R$.[18]

Bukti :

Misalkan $u \in N$ dan u adalah unit. Maka ada $u^{-1} \in N$, dan berlaku $u^{-1}u = uu^{-1} = 1$

Karena $u^{-1} \in R$, $u \in N$ dan N ideal maka $u^{-1}u = 1 \in N$. Selanjutnya misalkan kita ambil $r \in R$ sebarang, maka karena N ideal berlaku $r1 = r \in N$, dan ini berarti bahwa $R \subseteq N$. Jelaslah bahwa $N \subseteq R$. Jadi terbukti $N = R$.

■

Lemma 7.1 Setiap field atau lapangan tidak mempunyai ideal sejati.
Hal ini disebabkan oleh fakta bahwa dalam lapangan setiap unsurnya mempunyai invers.

[18] *Ibid.*, hal. 149.

G. HOMOMORFISMA RING

Dalam bab yang terdahulu pengertian homomorfisma dari grup ke grup yang mengawetkan operasinya. Dalam bab ini akan dibahas homomorfisma dari ring ke ring yang mengawetkan operasi penjumlahan dan perkalian.

Definisi 7.8	Fungsi φ dari ring R ke ring R' disebut homomorfisma jika untuk sebarang $a, b \in R$, memenuhi sifat berikut.[19] $$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$ $$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$
Kernel $\varphi = \{ x \in R \mid \varphi(x) = 0' \}$, dimana $0'$ adalah unsur nol dari R'. Jika ada isomorfisme dari R ke R', maka dikatakan R isomorfik dengan R', dinotasikan : $R \simeq R'$.	

Catatan: Bahwa syarat pertama menunjukkan bahwa φ adalah homomorfisma grup dari $(R,+)$ ke $(R',+)$. Sehingga menurut definisi homomorfisma grup kondisi-kondisi berikut ini berlaku :

1. $\varphi(0) = 0'$
2. $\varphi(-a) = -\varphi(a),\ \forall a \in R$
3. $\varphi(R)$ subgrup aditif dari R'
4. Jika Ker $\varphi = H$, maka $\varphi^{-1}(\varphi(a)H = a + H = H + a$
5. φ monomorfisma jika dan hanya jika Ker $\varphi = \{0\}$

Teladan 7.22

Diberikan fungsi $\varphi: Z \to Z_n$ dengan aturan $\varphi(a) = \bar{a},\ \forall a \in R$. Tunjukkan bahwa φ merupakan homomorfisma sebab :

$$\varphi(\bar{a} \oplus \bar{b}) = \overline{a+b} = \bar{a} \oplus \bar{b} = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$$

Selanjutnya diperoleh:

[19] Herstein, I.N. *Abstract Algebra*. *Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 142.

$$\varphi(a\odot b) = \overline{ab}$$
$$= (\bar{a}\odot\bar{b})$$
$$= \varphi(a)\odot\varphi(b)$$

Teladan 7.23

Fungsi $\varphi : (Z, +, \ .) \to (2Z, +, \ .)$ dengan $\varphi(n) = 2n, \forall n \in R$ merupakan homomorfisma grup sebab:

$$\varphi(n+m) = 2(m+n)$$
$$= 2m + 2n$$
$$= \varphi(m) + \varphi(n)$$

Tetapi φ bukan homomorfisma ring sebab:

$$\varphi(nm) = 2mn.$$

Sedangakan

$$\varphi(n)\ \varphi(m) = 2n.2m$$
$$= 4mn$$

jadi $\varphi(nm) \neq \varphi(n)\ \varphi(m)$

Juga φ suatu isomorfisma grup sehingga Z isomorfik dengan $2Z$, tetapi ring Z tidak isomorfik dengan ring $2Z$.

Teladan 7.24

Buktikan $Z_6 \simeq Z_2 \times Z_3$

Solusi:

Didefinisikan $\theta: Z_6 \to Z_2 \times Z_3$ didefinisikan $\theta(\bar{a}_6) = (\bar{a}_2, \bar{a}_3)$. Maka θ merupakan fungsi 1-1, sebab

$$\bar{a}_6 = \bar{b}_6 \leftrightarrow 6 \mid (a-b)$$
$$\leftrightarrow 2 \mid (a-b) \text{ dan } 3 \mid (a-b)$$
$$\leftrightarrow \bar{a}_2 = \bar{b}_2 \text{ dan } \bar{a}_3 = \bar{b}_3$$

$\leftrightarrow (\bar{a}_2, \bar{a}_3) = (\bar{b}_2, \bar{b}_3)$

$\leftrightarrow \theta(\bar{a}_6) = \theta(\bar{b}_6)$

Fungsi θ surjektif sebagai akibat dari definisi

Fungsi θ homomorfisma, sebagamana ekpresi berikut:

$$\begin{aligned}\theta(\bar{a}_6 \oplus \bar{b}_6) &= \theta((\overline{a+b})_6) \\ &= ((\overline{a+b})_2, (\overline{a+b})_3) \\ &= (\bar{a}_2 \oplus \bar{b}_2)(\bar{a}_3 \oplus \bar{b}_3) \\ &= (\bar{a}_2, \bar{a}_3) \oplus (\bar{b}_2, \bar{b}_3) \\ &= \theta(\bar{a}_6) \oplus \theta(\bar{b}_6)\end{aligned}$$

Analog untuk operasi perkalian

Jadi θ isomorfisma dan terbukti $Z_6 \simeq Z_2 \times Z_3$.

Secara umum $Z_{mn} \simeq Z_m \times Z_n$

Sifat-sifat homomorfisma berikut ini analog dengan teorema 5.1, Teorema 5.2 dan Teorema 5.4, dan buktinya sebagai latihan.

Teorema 7.12	Misalkan $\theta : R \rightarrow R'$ adalah homomorfisma ring. Maka memenuhi ketentuan berikut.[20] 1. $\theta(R)$ subring dari R' 2. Ker θ ideal dari R 3. Jika N ideal dari R, maka $\theta(N)$ juga ideal dari R'.

Teorema 7.13	Jika D adalah daerah itegral berkarakteristik θ, maka D memuat subring yang isommorfik dengan Z.[21]

---

[20] Herstein, I.N. *Abstract Algebra. Third Edition*, Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey, 1995, hal. 149.

[21] *Ibid.*, hal. 150.

Bukti :

Misalkan unkes dari D adalah 1. Definiskan $\theta : Z \rightarrow D$ dengan

$\theta(n) = n1, \ \forall n, b \in Z$

θ adalah fungsi yang injektif sebab

$$\begin{aligned}
& \theta(n) &&= \theta(m) \\
\leftrightarrow\ & n1 &&= m1 \\
\leftrightarrow\ & n1 - m1 &&= 0 \\
\leftrightarrow\ & (n-m)1 &&= 0 \\
\leftrightarrow\ & n - m &&= 0 \qquad \textit{(karena D berkarakteristik 0)} \\
\leftrightarrow\ & n &&= m
\end{aligned}$$

θ homomorfisma sebab

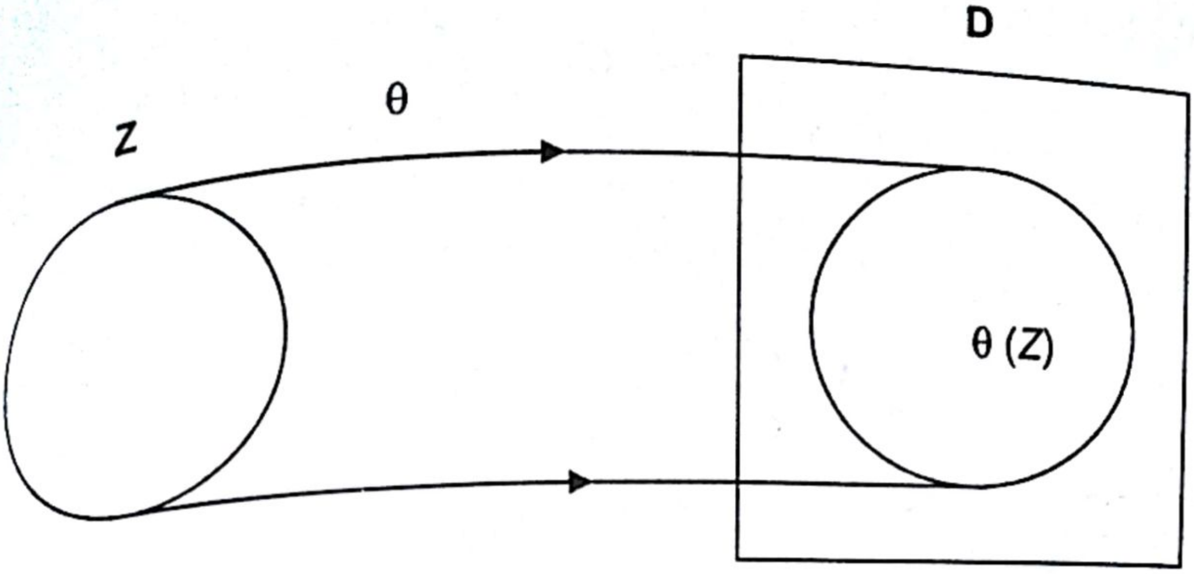
$$\begin{aligned}
\theta(n+m) &= (n+m)1 \\
&= \underbrace{1 + 1 + 1 \ldots + 1}_{(m+n)\ kali} \\
&= \underbrace{1 + 1 + 1 \ldots + 1 + 1}_{(m+n)\ kali} + \underbrace{1 + 1 \ldots + 1}_{(m+n)\ kali} \\
&= n1 + m1 \\
&= \theta(n) + \theta(m)
\end{aligned}$$

Selanjutnya menurut teorema 7.13 $\theta(Z)$ adalah subring dari D, sehingga diperoleh bahwa $\theta : Z \rightarrow \theta(Z) \subseteq D$ merupakan isomorfisma.

Jadi terbukti bahwa $Z \simeq \theta(Z) \subseteq D$.

■

Untuk lebih jelasnya teorema diatas dapat digambarkan pada diagram berikut ini.



Teorema berikut adalah akibat dari teorema diatas

Teorema 7.14	Jika D daerah ingral berkarakteristik p, dimana p bilangan prima, maka D memuat subring yang isomorfik dengan Z_p.[22]

Bukti.

Analog dengan bukti teorema 7.12 yaitu fungsi $\theta : Z_p \to D$ dengan $\theta(\bar{n}) = n1, \bar{n} \in Z_p$ adalah monomorfisma. Selanjutnya $\theta(Z_p) = \{ 2.1, 3.1, 5.1, ..., (p\text{-}1).1 \}$ adalah subring dari D yang isomorfik dengan Z_p.

■

Jika suatu ring R memuat subring yang isomorfik dengan ring S, maka dikatakan S dapat disisipkan dalam. Sehingga Teorema 7.12 diatas menyatakan bahwa ring Z dapat disisipkan dalam setiap daerah integral berkarakteristik nol. Teorema 7.13 menyatakan bahwa Z_p dapat disisipkan dalam daerah integral berkarakteristik bilangan prima p.

[22] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 254.

H. RING FAKTOR

Misalkan R ring, dan N ideal dari R, maka koset-koset aditif dari N adalah $a + N$ dengan $a \in R$. Definisikan $R/N = \{ a + N \mid a \in R \}$. Operasi penjumlahan dan perkalian didefiniskan :

$$(a + N) + (b + N) = (a + b) + N$$

$$(a + N)(b + N) = ab + N$$

Teorema 7.15	Misalkan (R/N, +, .) merupakan ring dan disebut ring faktor dari R oleh N. [23]

Bukti:

Teorema 7.14 ini analog dengan langkah pembuktikan teorema 6.6 dimana unsur nol adalah koset $0 + N = N$ dan bukti ditinggalkan sebagai latihan.

Jika R komutatif, maka R/N juga komutatif sebab

$$\begin{aligned}(a + N)(b + N) &= ab + N \\ &= ba + N \text{ (karena } R \text{ komutatif)} \\ &= (b + N)(a + N)\end{aligned}$$

Jika R mempunyai unkes 1, maka R/N juga mempunyai unkes $1 + N$. ■

Teorema 7.16	Jika R ring, dan N ideal dari R, maka fungsi $\theta: R \rightarrow R/N$ merupakan homomorfisma dengan Ker $\theta = N$

Teorema ini analog dengan langkah pembuktian teorema 6.7, dan buktinya disediakan sebagai latihan.

---

[23] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 162.

Berikut ini adalah teorema dasar homomorfisma untuk ring yang analog dengan langkah pembuktian teorema 6.8

Teorema 7.17	Misalkan R dan R' masing-masing ring dan $\mu: R \rightarrow R'$ epimorfisma dengan Ker $\mu = N$. maka $R/N \simeq R'$.[24]

Bukti analog dengan langkah pembuktian teorema 5.8 yaitu fungsi $\theta: R/N \rightarrow R'$ dengan $\theta(a + N) = \mu(a)$, $\forall a + N \in R/N$ adalah isomorfisma. Bukti disediakan sebagai latihan.

I. IDEAL PRIMA DAN IDEAL MAKSIMAL

Dalam sub bab ini akan dibahas kapan suatu ring faktor merupakan lapangan dan kapan suatu ring faktor merupakan daerah integral.

Definisi 7.9 Ideal Prima.[25]	Misalkan R ring komutatif, dan N ideal dari R. Ideal N disebut ideal prima jika memenuhi kondisi berikut ini. Jika $ab \in N$, maka $a \in N$ atau $b \in N$. Ini setara dengan: $ab + N = N$, maka $a + N = N$ atau $b + N = N$

Teladan 7.25

Jika R ring komutatif tidak memuat pembagi nol, maka

$$R/\{0\} = \{\{0\}, a + \{0\}, b + \{0\}, ...\}, \quad \text{dimana } a, b, ... \in R$$

$$= \{\{0\}, \{a\}, \{b\}, ...\}$$

[24] *Ibid.*, hal. 163.

[25] David S.Dummit & Richard M.Foote, *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc, 1991, hal. 255.

Pada $R/\{0\}$ berlaku :

$$ab + \{0\} = \{0\}$$

$$\rightarrow \quad ab = 0$$

$\rightarrow$ $a = 0$ atau $b = 0$ *(karena R ring tanpa pembagi nol)*

$$\rightarrow a + \{0\} = \{0\} \text{ atau } b + \{0\} = \{0\}$$

Jadi $\{0\}$ adalah ideal prima.

Teorema selanjutnya menyatakan bahwa syarat perlu cukup bahwa suatu ideal merupakan ideal prima adalah R/N daerah integral.

Teorema 7.18	Misalkan R ring komutatif dengan unkes dan $N \neq R$ adalah ideal dari R. Ring faktor R/N merupakan daerah integral jika dan hanya jika N ideal prima.[26]

Bukti :

Jika R/N adalah daerah integral, maka R/N tanpa pembagi nol, sehingga menurut teladan 7.24 berarti N adalah ideal prima. Sebaliknya, jika R ring komutatif dengan unkes 1, maka menurut teorema 7.11 berarti R/N ring komutatif dengan unkes $1 + N$. Selanjutnya karena N ideal prima, maka R/N tidak mempunyai pembagi nol.

Jadi syarat-syarat daerah integral untuk R/N dipenuhi. ■

Berikut ini diberikan definisi dari ideal maksimal dan teorema mengenai syarat perlu dan syarat cukup agar suatu ideal merupakan ideal maksimal.

[26] *Ibid.*, hal. 255.

Definisi 7.10 Ideal Maksimal.[27]	Ideal M dari ring R disebut ideal maksimal jika tidak ada ideal sejati dari R yang memuat M.

Teorema 7.19	Misalkan R ring dengan unkes 1 dan M ideal dari R. Ring faktor R/M adalah field atau lapangan jika dan hanya jika M ideal maksimal.[28]

Bukti :

Diketahui M ideal maksimal dan R ring komutatif dengan unkes 1. Maka R/M merupakan ring komutatif dengan unkes $1+M$. Untuk membuktikan bahwa R/M field/lapangan dengan cara membuktikan $\forall \bar{x} \in R/M$, untuk $\bar{x} \neq \bar{0}$ mempunyai invers. Misalkan ambil sebarang $\bar{a} \in R/M$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, maka $\bar{a} = a + M$ dengan $a \notin M$. Dengan himpunan $N = \{ ra+m / r \in R, m \in M \}$

Akan ditunjukkan bahwa $N = R$.

Himpunan $(N, +)$ adalah grup dengan unsur identitasnya $0 = 0a + 0$ dan invers dari $ra + m$ adalah $(-r)a + (-m)$. Juga N merupakan ideal sebab:

$$s(ra + m) = s(ra) + sm$$

$$= (sr)a + sm$$

Karena M ideal maka $sm \in M$, sehingga $(sr)a + sm \in N$, akibatnya $s(ra + m) \in N$. Karena R komutatif juga berlaku $(ra + m)s \in N$.

---

[27] Durbin, J.R. *Modern Algebra*. John Wiley & Sons, Inc, 1979, hal. 189.

[28] *Ibid.*, hal. 190.

Perhatikan bahwa N ideal yang memuat a, sebab $a = 1a + 0$ dan N memuat M sebab untuk setiap $m \in M$, $m = 0a + m$. Selanjutnya $a \in N$, tetapi $a \notin N$, ini berarti bahwa $M \subset N$. Berdasarkan hipotesis M adalah ideal maksimal maka $N=R$. Hal ini mengakibatkan $1 \in N$, sehingga terdapat $b \in R$, dan $m \in M$ sehingga

$$
\begin{aligned}
& 1 = ba + m \\
\rightarrow\ & 1 + M = (ba + m) + M \\
\rightarrow\ & 1 + M = (ba + M) + (m + M) \\
& \quad = (ba + M) + M \\
& \quad = ba + M \\
& \quad = (b + M)\,(a + M)
\end{aligned}
$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\bar{b} = b + M$ adalah invers dari $\bar{a} = a + M$. Karena $\bar{a} \in R/M$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ sebarang, maka terbukti setiap unsur tak nol dari R/M mempunyai invers.

Sebaliknya, diketahui R/M lapangan maka menurut akibat 6.1 R/M tidak memuat ideal sejati. Andaikan ideal M tidak maksimal maka ada ideal N sehingga $M \subset N \subset R$. Misalkan $\gamma : R \rightarrow R/M$ homomorfisma maka menurut teorema 6.12 $\gamma(N)$ ideal dari R/M dan berlaku $M \subset \gamma(N) \subset R/M$. Ini berarti bahwa R/M memuat ideal sejati $\gamma(N)$. Sehingga diperoleh kontradiksi dengan hipotesis dan Terbukti bahwa M ideal maksimal.

■

Lemma 7.2

Setiap ideal maksimal dalam ring komutatif dengan unkes merupakan ideal prima.[29]

---

[29] *Ibid.*, hal. 148.

Bukti :

Ideal M maksimal maka menurut teorema 7.19 R/M adalah field/lapangan, sehingga R/M juga merupakan daerah integral. Selanjutnya menurut teorema 7.18. Terbukti M ideal prima. ∎

Dari uraian diatas diperoleh bahwa jika R ring komutatif dengan unkes, maka berlaku kondisi-kondisi berikut ini :

1. Ideal N dari ring R merupakan ideal prima jika dan hanya jika R/N daerah integral.
2. Ideal M dari ring R merupakan ideal maksimal jika dan hanya jika R/M adalah lapangan
3. Setiap ideal maksimal dari ring R merupakan ideal prima.

SOAL-SOAL UNTUK LATIHAN

1. Tunjukkan (X^*, +, ∘) dengan X^* adalah himpunan matriks-matriks berbentuk. $a,b \in R$ suatu ring, tak komutatif dan tanpa unsur kesatuan.
2. Tunjukkan bahwa C = [0, 1] yang merupakan himpunan fungsi-fungsi kontinu pada interval tutup [0, 1] dan memiliki nilai fungsi real, dengan suatu ring komutatif yang memiliki unsur kesatuan dan pembagi nol. Operasi + dan didefinisikan sebagai berikut :
   $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
   $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
   apakah himpunan di atas merupakan daerah integral ? jelaskan
3. Jika setiap unsure dari ring R idempoten, yaitu $x^2 = x, \forall x \in R$ maka
   a. $x + x = 0$
   b. R komutatif
4. Buktikan jika e unsur idempoten tak nol dari daerah integral, maka e adalah unsur kesatuan.
5. Didefinisikan untuk setiap $a \in R$, dengan R ring disebut nilpotent jika terdapat bilangan bulat positif n sehingga $a^n = 0$. Buktikan 0 adalah satu-satunya unsur nilpoten dalam daerah integral.
6. Buktikan jika U koleksi dari semua unit di ring $(R,+,\cdot)$ dengan unsur kesatuan maka (U,+, ·) adalah grup.
7. Misalkan $(R,+)$ grup abelian. Buktikan jika $ab = 0, \forall ab \in R$ maka $(R,+,\cdot)$ adalah suatu ring.
8. Buktikan setiap dua unsur tak nol dari daerah integral D mempunyai order yang sama.
9. Jika m bilangan bulat kurang dari bilangan prima p, maka terdapat n bilangan bulat positif kurang dari p sehingga $mn = 1 = kp$, dimana k adalah bilangan bulat *non* negatif. Buktikan !
10. a. Cari ideal yang dibangun oleh 4 di Z

b. Cari ideal yang dibangun oleh -4 di Z

11. Diketahui S ideal dari ring R, T subring R. Buktikan S ideal dari $S + T$.
12. Buktikan $\{0\}$ adalah ideal maksimal dari f, jika F lapangan
13. Diketahui $(E,+,\cdot)$ adalah ring yang unsur-unsurnya terdiri dari bilangan-bilangan bulat genap. Buktikan $H_4=\{4n|n\in Z\}$ merupakan ideal maksimal dari E.

DAFTAR BACAAN

David S. Dummit & Richard M. Foote (1991) *Abstract Algebra*. Prentice Hall, Inc

Durbin, J. R. (1979). *Modern Algebra*. John Wiley & Sons, Inc

Herstein, I.N (1995). *Abstract Algebra. Third Edition*. Simon & Schutster A Viacom Company, New Jersey.

Herstein, I.N (1979). *Topics in Algebra*. John willey & Sons, Inc

Muhsetyo, G (1989) *Pengantar Struktur Aljabar*. IKIP Malang

Blair, William D. & Beachy, John A. (1990) *Abstract Algebra With a Concrete Introduction*. Prentice Hall, Inc

Biarkhoff, G & Mac Lane, S. (1965). A Survey of Modern Algebra 3nd. New York : Mac Millan.

RMJTT Soehakso, (1979). Pengantar Teori Group. Cetakan IV. Yogyakarta : FIPA UGM Yogyakarta.

TENTANG PENULIS

Muniri, lahir di desa Peltong Kecamatan Larangan Kabupaten Pamekasan Madura Provinsi Jawa Timur pada tanggal 30 November 1968. Penulis sebagai tenaga pengajar di Institut Agama Islam Negeri (IAIN) Tulungagung. Pendidikan sekolah dasar (SD) hingga sekolah menengah atas (SMA) ditempuh dan diselesaikan di kota kelahirannya, tepatnya di SDN Trasak kecamanatan larangan, SMPN Larangan, dan MAN Jungcangcang sekarang menjadi MAN 1 Pamekasan. Sarjana pendidikan Matematika diselesaikan di Universitas Islam Malang (UNISMA) dan S2 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang (UM) serta S3 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Surabaya (UNESA). Sebelum menjadi tenaga pengajar di Jurusan Tadris Matematika IAIN Tulungagung, penulis pernah mengajar di beberapa perguruan tinggi swasta, yaitu STAI Diponegoro Tulungagung, STKIP PGRI Tulungagung dan Universitas Islam Malang (UNISMA). Selain hal tersebut, penulis aktif mengikuti kegiatan-kegiatan ilmiah, seperti diskusi, seminar, kenferensi di bidang pendidikan dan pembelajaran terutama pendidikan dan pembelajaran matematika.