

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Hakekat Matematika

1. Definisi Matematika: Pijakan Awal dalam Pembelajaran Matematika

Apakah matematika itu? Hingga saat ini belum ada kesepakatan yang bulat di antara para matematikawan tentang apa yang disebut matematika itu. Untuk mendeskripsikan definisi *matematika*, para matematikawan belum pernah mencapai satu titik puncak kesepakatan yang sempurna. Banyaknya definisi dan beragamnya deskripsi yang berbeda dikemukakan oleh para ahli mungkin disebabkan oleh *pribadi* (ilmu) matematika itu sendiri, dimana matematika termasuk salah satu disiplin ilmu yang memiliki kajian sangat luas, sehingga masing-masing ahli bebas mengemukakan pendapatnya tentang matematika berdasarkan sudut pandang, kemampuan, pemahaman, dan pengalamannya masing-masing.

Beberapa definisi atau ungkapan pengertian matematika hanya dikemukakan terutama berfokus pada tinjauan pembuat definisi itu. Hal sedemikian dikemukakan dengan maksud agar pembaca dapat menangkap dengan mudah secara keseluruhan pandangan para ahli matematika. Ada tokoh yang sangat tertarik dengan perilaku bilangan, ia melihat matematika dari sudut pandang bilangan itu. Tokoh lain lebih mencurahkan perhatian kepada struktur-struktur, ia melihat matematika dari sudut pandang struktur-struktur itu. Tokoh

lain lagi lebih tertarik pada pola pikir ataupun sistematika, ia melihat matematika dari sudut pandang sistematika itu.¹⁹

Matematika adalah bahasa simbol; ilmu deduktif yang tidak menerima pembuktian secara induktif; ilmu tentang pola keteraturan, dan struktur yang terorganisasi, mulai dari unsur yang tidak didefinisikan, ke unsur yang didefinisikan, ke aksioma atau postulat, dan akhirnya ke dalil. Sedangkan hakekat matematika menurut Soedjadi, yaitu memiliki objek tujuan abstrak, bertumpu pada kesepakatan, dan pola pikir yang deduktif.²⁰

Salah seorang matematikawan bernama W. W. Sawyer mengatakan bahwa matematika adalah klasifikasi studi dari semua kemungkinan pola. Pola di sini dimaksudkan adalah dalam arti luas, mencakup hampir semua jenis keteraturan yang dapat dimengerti pikiran kita.²¹

Untuk melengkapi pengertian di atas, secara terperinci R. Soedjadi memberikan beberapa definisi atau pengertian tentang matematika sebagai berikut:

- a. Matematika adalah cabang ilmu pengetahuan eksak dan terorganisir secara sistematis.
- b. Matematika adalah pengetahuan tentang bilangan dan kalkulasi.
- c. Matematika adalah pengetahuan tentang penalaran logik dan berhubungan dengan bilangan

¹⁹ R. Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika Di Indonesia*, (Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi Departemen Pendidikan Nasional, 1999/2000), hal. 11.

²⁰ Heruman, *Model Pembelajaran Matematika Di Sekolah Dasar*, (Bandung: PT Remaja Rosdakarya, 2007), hal. 1.

²¹ Herman Hudojo, *Strategi mengajar belajar matematika*, (Malang: IKIP MALANG, 1990), hal. 62.

- d. Matematika adalah pengetahuan tentang fakta-fakta kuantitatif dan masalah tentang ruang dan bentuk.
- e. Matematika adalah pengetahuan tentang struktur-struktur yang logic.
- f. Matematika adalah pengetahuan tentang aturan-aturan yang ketat.²²

Selanjutnya, pendapat para ahli mengenai matematika yang lain, di antaranya telah muncul sejak kurang lebih 400 tahun sebelum masehi, dengan tokoh-tokoh utamanya adalah Plato (427-347 SM) dan seorang muridnya Aristoteles (348-322 SM). Mereka mempunyai pendapat yang berlainan.²³

Plato berpendapat bahwa matematika adalah identik dengan filsafat untuk ahli pikir. Objek matematika ada di dunia nyata, tetapi terpisah dari akal. Ia mengadakan perbedaan antara aritmetika (teori bilangan) dan logistic (teknik berhitung) yang diperlukan orang. Belajar aritmetika berpengaruh positif, karena memaksa yang belajar untuk belajar bilangan-bilangan abstrak. Dengan demikian, matematika ditingkatkan menjadi mental aktivitas dan mental abstrak pada objek-objek yang ada secara lahiriah, tetapi yang ada hanya mempunyai representasi yang bermakna. Plato dapat disebut sebagai orang yang rasionalis.

Aristoteles mempunyai pendapat yang lain. Ia memandang matematika sebagai salah satu dari tiga dasar yang membagi ilmu pengetahuan menjadi ilmu pengetahuan fisik, matematika, dan teologi. Matematika didasarkan atas kenyataan yang dialami, yaitu pengetahuan yang diperoleh dari eksperimen, observasi, dan abstraksi. Aristoteles dikenal sebagai seorang eksperimentalis.

²² R. Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika....*, hal. 11.

²³ Abdul Halim Fathani, *Matematika Hakikat Dan Logika*, (Jogjakarta: Arr-Ruzz Media, 2009), hal. 20.

Istilah matematika berasal dari kata Yunani, *mathein* atau *manthenein* yang berarti mempelajari. Kata ini memiliki hubungan yang erat dengan kata Sanskerta, *medha* atau *widya* yang memiliki arti kepandaian, ketahuan, atau inteligensia. Dalam bahasa Belanda, matematika disebut dengan kata *wiskunde* yang berarti ilmu tentang belajar (hal ini sesuai dengan arti kata *mathein* pada matematika).²⁴

Sedangkan orang Arab menyebut matematika dengan ‘ilmu al-hisab yang berarti ilmu berhitung. Di Indonesia, matematika disebut dengan ilmu pasti dan ilmu hitung. Sebagian orang Indonesia memberikan plesetan menyebut matematika dengan “mati-matian”, karena sulitnya mempelajari matematika.²⁵

Berpijak pada uraian-uraian di atas, secara umum definisi matematika dapat di deskripsikan sebagai berikut:

a. Matematika sebagai struktur yang terorganisasi

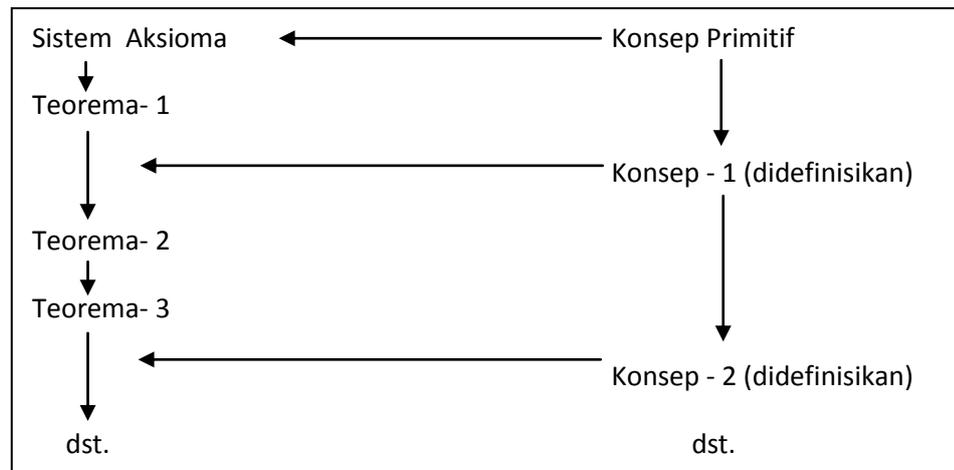
Agak berbeda dengan ilmu pengetahuan yang lain, matematika merupakan suatu bangunan struktur yang terorganisasi. Sebagai sebuah struktur, ia terdiri atas beberapa komponen, yang meliputi aksioma/postulat, pengertian pangkal/primitif, dan dalil/teorema.

Struktur matematika yang terorganisasi dengan sebuah skema “deduktif aksiomatik” dapat dilihat seperti di bawah ini:²⁶

²⁴ Andi Hakim Nasution, *Landasan Matematika*, (Bogor: Bhratara, 1982), hal. 12

²⁵ Abdusysykir, *Ketika Kyai Mengajar Matematika*, (Malang: UIN-Malang Press, 2007), hal. 5.

²⁶ R. Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika.....*, hal. 20.



Gambar 2.1

b. Matematika sebagai alat (tool)

WW Sawyer mengatakan:

*“Mathematical thinking is a tool. There is no point in acquiring it unless you mean to use it. It would be far better to spend time in physical exercise, which would at least promote health of body”.*²⁷

(Berpikir matematis merupakan sebuah alat. Tak ada gunanya memiliki alat itu jika kita tak berniat untuk menggunakannya. Jauh lebih baik jika kita menggunakan waktu kita untuk berolahraga karena setidaknya akan bisa menyehatkan tubuh kita daripada belajar matematika tapi tanpa berniat untuk menggunakannya dalam kehidupan).

Matematika juga sering dipandang sebagai alat dalam mencari solusi pelbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Ini sesuai dengan pendapat Schoenfeld yang mendefinisikan bahwa belajar matematika berkaitan dengan apa dan bagaimana menggunakannya dalam membuat keputusan untuk memecahkan masalah.²⁸

²⁷ EIVawati Alisah dan Eko Prasetyo Dharmawan, *Filsafat Dunia Matematika...*, hal. 145.

Dalam buku “Indahnya Matematika dalam Al-Qur’an” dimana disebutkan bahwa, matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung.²⁹

c. *Matematika sebagai pola pikir deduktif*

Matematika merupakan pengetahuan yang memiliki pola pikir deduktif. Artinya, suatu teori atau pernyataan dalam matematika dapat diterima kebenarannya apabila telah dibuktikan secara deduktif (umum).

Matematika seringkali dilukiskan sebagai suatu kumpulan sistem matematika, yang setiap dari sistem-sistem itu mempunyai struktur tersendiri yang sifatnya bersistem deduktif.³⁰

d. *Matematika sebagai cara bernalar (the way of thinking)*

Matematika dapat pula dipandang sebagai cara bernalar, paling tidak karena beberapa hal, seperti matematika memuat cara pembuktian yang sah (valid), rumus-rumus atau aturan yang umum, atau sifat penalaran matematika yang sistematis.

Sejalan dengan Sujono yang mengemukakan pengertian matematika sebagai ilmu pengetahuan tentang penalaran yang logik dan masalah yang berhubungan dengan bilangan.³¹

²⁸ Hamzah B. Uno, *Model Pembelajaran: Menciptakan Proses Belajar Mengajar yang Kreatif dan Efektif*, (Jakarta: PT Bumi Aksara, 2007), hal. 130.

²⁹ Hairur Rahman, *Indahnya Matematika dalam Al-Qur’an*, (Malang: UIN-Malang Press, 2007), hal. 1.

³⁰ Herman Hudojo, *Pengembangan Kurikulum Matematika dan pelaksanaannya di depan kelas*, (Surabaya: Usaha Nasional, 1979), hal. 95.

³¹ Sujono, *Pengajaran Matematika untuk Sekolah Menengah*, (Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, 1988), hal. 5.

e. *Matematika sebagai bahasa artifisial*

Simbol adalah ciri yang paling menonjol dalam matematika. Bahasa matematika adalah bahasa simbol yang bersifat artifisial, yang baru memiliki arti bila dikenakan pada suatu konteks.

Moch. Masykur Ag dan Abdul Halim Fathani mendeskripsikan matematika sebagai bahasa, karena dalam matematika terdapat sekumpulan lambang atau simbol dan kata (baik kata dalam bentuk lambing, misalnya “ \geq ” yang melambangkan kata “lebih besar atau sama dengan”, maupun kata yang diadopsi dari bahasa biasa seperti “fungsi”, yang dalam matematika menyatakan suatu hubungan dengan aturan tertentu, antara unsur-unsur dalam dua buah himpunan).³²

f. *Matematika sebagai seni yang kreatif*

Penalaran yang logis dan efisien serta perbendaharaan ide-ide dan pola-pola yang kreatif dan menakjubkan, maka matematika sering pula disebut sebagai seni, khususnya seni berpikir yang kreatif.

Dienes mengatakan bahwa matematika adalah ilmu seni kreatif. Oleh karena itu, matematika harus dipelajari dan diajarkan sebagai ilmu seni.³³

Definisi matematika tersebut di atas, bisa dijadikan landasan awal untuk belajar dan mengajar dalam proses pembelajaran matematika. Diharapkan, proses pembelajaran matematika juga dapat dilangsungkan secara manusiawi. Sehingga matematika tidak dianggap lagi menjadi momok yang menakutkan bagi siswa:

³² Moch. Masykur dan Abdul Halim Fathani, *Mathematical Intelligence: Cara Cerdas Melatih Otak Dan Menanggulangi Kesulitan Belajar*, (Jogjakarta: Arr-Ruzz Media, 2007), hal. 46

³³ E.T. Ruseffendi, *Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*, (Bandung: Tarsito, 1988), hal. 160.

sulit, kering, bikin pusing, dan anggapan-anggapan negatif lainnya. Sepintas, anggapan ini dapat dibenarkan, sebab mereka belum memahami hakekat matematika secara utuh dan informasi yang mereka peroleh hanya parsial. Hal ini sebenarnya bukan salah siswa itu sendiri, melainkan karena kesalahan para guru yang memang tidak utuh dalam memberikan informasi tentang matematika. Hal ini bisa jadi disebabkan minimnya kemampuan guru di bidang itu, atau mungkin juga kesalahan dosen-dosen yang telah mendidik guru tersebut sewaktu di perguruan tinggi atau memang belum ada media informasi yang menyuguhkan tentang hal tersebut.

Perlu diketahui, bahwa ilmu matematika itu berbeda dengan disiplin ilmu yang lain. Matematika memiliki bahasa sendiri, yakni bahasa yang terdiri atas simbol-simbol dan angka. Sehingga, jika kita ingin belajar matematika dengan baik, maka langkah yang harus ditempuh adalah kita harus menguasai bahasa pengantar dalam matematika, harus berusaha memahami makna-makna di balik lambang dan simbol tersebut. Sama halnya ketika kita membaca kitab kuning (*kitab yang terdiri dari tulisan arab tanpa harakat*). Bagi orang yang buta akan bahasa Arab, tentu dia akan mengalami kebingungan ketika disuruh membaca apalagi memberi makna atau menafsiri tulisannya. Sebaliknya, bagi yang mahir bahasa Arab dan didukung dengan kemampuan nahwu-sharaf (gramatika bahasa Arab) yang tinggi, dia dengan mudah dapat membaca dan memberi makna kitab kuning yang menggunakan pengantar bahasa Arab.

2. Bahasa Matematika: Alat Komunikasi dalam Pembelajaran Matematika

Bahasa merupakan suatu sistem yang terdiri dari lambang-lambang, kata-kata, dan kalimat-kalimat yang disusun menurut aturan tertentu dan digunakan sekelompok orang untuk berkomunikasi.

Bahasa tumbuh dan berkembang karena manusia, begitu pun sebaliknya, manusia berkembang karena bahasa. “Dimana ada manusia, di sana ada bahasa“, begitu ungkap Mudjia Rahardjo.³⁴ Keduanya tidak dapat dipisahkan. Keduanya menyatu dalam segala aktivitas kehidupan. Hubungan manusia dan bahasa merupakan dua hal yang tidak dapat dinafikan salah satunya. Bahasa pula yang membedakan manusia dengan makhluk ciptaan Tuhan yang lain.

Berkait dengan bahasa sebagai pembeda manusia dengan makhluk ciptaan Tuhan yang lain, Ernst Cassirer mengatakan bahwa manusia pada dasarnya adalah “makhluk yang bersimbol”. Hal ini merupakan kenyataan, karena dalam mengungkapkan isi hatinya manusia akan selalu menggunakan lambang (simbol) melalui kata-kata yang bersifat simbolis. Maka simbolisme itu boleh disebut sebagai ciri khas manusia yang dengan tegas membedakannya dengan hewan!³⁵

Dilihat dari segi fungsi, bahasa memiliki dua fungsi. Pertama, sebagai alat untuk menyatakan ide, pikiran, gagasan atau perasaan. Kedua, sebagai alat untuk melakukan komunikasi dalam berinteraksi dengan orang lain.³⁶ Apabila manusia dalam berinteraksi dan berkomunikasi tidak melibatkan peranan bahasa, maka itu tidak mungkin alias mustahil dilakukan. Komunikasi pada hakekatnya merupakan proses penyampaian pesan dari pengirim kepada penerima. Hubungan komunikasi

³⁴ Moch. Masykur dan Abdul Halim Fathani, *Mathematical Intelligence*....., hal. 45.

³⁵ Sutrisna Hari, *Humaniora*, (Jakarta: Yayasan Pendidikan Budi Luhur, 1996), hal. 36.

³⁶ Moch. Masykur dan Abdul Halim Fathani, *Mathematical Intelligence*....., hal. 45.

dan interaksi antara si pengirim dan penerima, dibangun berdasarkan penyusunan kode atau simbol bahasa oleh pengirim dan pembongkaran idea tau simbol bahasa oleh penerima.

Memang salah satu alasan perlunya matematika diajarkan kepada siswa adalah matematika merupakan sarana komunikasi yang kuat, singkat dan jelas. Seperti yang diungkapkan Cockroft bahwa, matematika perlu diajarkan kepada siswa karena, 1) selalu digunakan dalam segala segi kehidupan; 2) semua bidang studi memerlukan keterampilan matematika yang sesuai; 3) merupakan sarana komunikasi yang kuat, singkat, dan jelas; 4) dapat digunakan untuk menyajikan informasi dalam berbagai cara; 5) meningkatkan kemampuan berpikir logis, ketelitian, dan kesadaran keruangan; dan 6) memberikan kepuasan terhadap usaha memecahkan masalah yang menantang.³⁷

Josiah Willard Gibbs menambahkan bahwa “Mathematics is a language”. Matematika adalah sebuah bahasa.³⁸

Matematika adalah bahasa yang melambangkan serangkaian makna dari pernyataan yang ingin kita sampaikan. Simbol-simbol matematika bersifat “24riteria24l” yang baru memiliki arti setelah sebuah makna diberikan kepadanya. Tanpa itu, matematika hanya merupakan kumpulan simbol dan rumus yang kering akan makna. Sehingga, tak heran jika banyak orang yang berkata bahwa x , y , z itu sama sekali tidak memiliki arti.

³⁷ Mulyono Abdurrahman, *Pendidikan Bagi Anak Berkesulitan Belajar*, (Jakarta: Rineka Cipta, 1999), hal. 253

³⁸ EIVawati Alisah dan Eko Prasetyo Dharmawan, *Filsafat Dunia Matematika Pengantar untuk Memahami Konsep-konsep Matematika*, (Jakarta: Prestasi Pustaka, 2007), hal. 22.

Berikut adalah sebuah ilustrasi mengenai peranan “*matematika sebagai bahasa*” dalam memecahkan permasalahan:

Sebuah pasangan muda yang sedang berbulan madu, karena soal yang sepele, bertengkar dan tidak mau berbicara satu dengan yang lain. Setiap kali dilakukan usaha untuk berdamai maka usaha ini kandas disebabkan komunikasi yang selalu menjurus kepada emosi yang sedang peka, maklum telah tersinggung per-nya. Diam-diam kedua orang muda datang kepada orang tua, satu-satunya tamu yang lain di hotel tempat mereka berbulan madu, dan mengadakan halnya. Orang tua itu, yang kebetulan adalah dosen filsafat ilmu, membuka buku indeks diktat yang dikarangnya dan berfatwa, “*Bicaralah dengan bahasa matematika!*”

Syahdan, ketika malam pun tiba dan sang rembulan menampakkan rona, suami muda itu mulai membuka ofensif bulan purnama. Dengan mata yang menatap tajam-tajam mata hitam istrinya, mata itu mengatakan segalanya, dia mengacungkan telunjuknya yang membentuk angka satu. Sang Istri diam sejenak, terperangah dan terpana, perlahan-lahan menjawab dengan mengacungkan jari telunjuk dan jari tengahnya. Kini sang Suami, melihat angka satunya dijawab dengan dua, terbungkam seribu bahasa. Mukanya tampak mulai memerah, matanya makin bertambah nyalang, kelihatan dia ragu-ragu. Namun perlahan-lahan diangkatnya tangan kanannya yang membentuk angka tiga dengan telunjuk, jari tengah dan jari manisnya. Sang Istri berteriak, lari dan menyusup di pelukannya, kasih sayang telah kembali ke sarangnya.

Keesokan harinya sang istri datang pada orang tua yang bijak itu untuk mengucapkan terima kasih. Biasanya, begitu dia mulai bicara, sekiranya kami ingin berdamai maka kata-kata pertama selalu diartikan salah, yang menyebabkan kami kembali bertengkar. Kemarin dia tidak berkata apa-apa, sekadar menatap saya tajam-tajam dan berkata, “Dikaulah satu-satunya yang kucintai.” Hati saya tersentuh dan trenyuh, naluri kewanitaan saya luluh, jawab saya, “Kaupun satu-satunya yang kucintai, kita berdua adalah sepasang gunting, yang kalau sebelah tidak ada artinya.” Eh, mendengar jawaban saya itu, dia menjadi binal, muka saya merah mendengarnya, “Marilah kita bikin belahan ketiga.”

Sore harinya sang suami datang, membusungkan dada dan berseri-seri, menjabat tangan professor itu dan berkata, “Matematika memang bahasa yang eksak, cermat dan terbebas dari emosi. Sejak hari ini saya akan secara sungguh-sungguh mempelajari filsafat matematika.” Dia pun lalu menceritakan halnya, bagaimana perselisihan dengan istrinya diselesaikan dengan sempurna, berkat kemujaraban matematika. “Karena dia tidak mau mengerti saya, karena setiap kata-kata saya selalu disalahartikan olehnya, maka langsung saja saya beri ultimatum: satu!” “Lalu bagaimana jawabnya?” Tanya professor itu.

“Dia memang perempuan keras kepala. Dia tidak takut, atau pura-pura tidak takut, terhadap ultimatum saya, malahan menantang: Dua!”

“Hah?” desis professor itu sambil membuka kacamatanya.

“Ya, dua. Dia menantang dengan dua. Artinya, melakukan kontraofensif terhadap ultimatum saya. Saya jadi serba salah. Saya menjadi serba ragu.

Bagaimana kalau ultimatum-ultimatum ini berakhir dengan tragis? Tetapi, kelelakian saya tersinggung dengan tingkahnya itu, serta mungkin saja dia pun pura-pura berani, dalam hatinya siapa tahu. Benar juga, ketika ultimatum saya habis, bersama kesabaran dan harapan saya: Tiga! Dia pun menyerah dan memeluk saya. *Eureka! Semoga Tuhan memberkati matematika!*”³⁹

Bahasa verbal seperti ilustrasi di atas mempunyai beberapa kekurangan yang sangat mengganggu. Suami istri yang sedang berbulan madu itu mengalami sendiri betapa sengsara jadinya disebabkan komunikasi yang buntu. Perkataan “setan”, umpamanya, bisa kedengaran sangat “sip” bila ditafsirkan secara asyik, misalnya “*eh, Jasmine, ada setan naik becak, pakai jas, bawa ransel lagi!*”. Namun bagaimana kalau suasana sedang *out*, dunia lantas terbalik? (Tidak bisa kita marah kepada seseorang karena menyebut kita “babi”; kalau perkataan itu diucapkan penuh puisi: *babiku, my babi, oh babiku sayang!*)

Untuk mengatasi kekurangan yang terdapat pada bahasa maka kita berpaling kepada matematika. Dalam hal ini dapat kita katakan bahwa matematika adalah bahasa yang berusaha untuk menghilangkan sifat kabur, majemuk, dan emosional dari bahasa verbal. Lambang-lambang dari matematika dibuat secara artifisial dan individual yang merupakan perjanjian yang berlaku khusus terkait dengan suatu permasalahan yang sedang dikaji. Suatu obyek yang sedang dikaji dapat disimbolkan dengan apa saja sesuai dengan kesepakatan kita. Misalkan bila kita sedang mempelajari kecepatan jalan kaki seorang anak maka obyek

³⁹ Jujun S. Suriasumantri, *Filsafat Ilmu Sebuah Pengantar Populer*, (Jakarta: Pustaka Sinar Harapan, 2003), hal. 189-190.

“kecepatan jalan kaki seorang anak” tersebut dapat kita lambangkan dengan x . Dalam hal ini maka x hanya mempunyai satu arti yakni “kecepatan jalan kaki seorang anak”. Lambang matematika yang berupa x ini kiranya mempunyai arti yang jelas yakni “kecepatan jalan kaki seorang anak”. Di samping itu lambang x tidak bersifat majemuk sebab x hanya dan hanya melambangkan “kecepatan jalan kaki seorang anak” dan tidak mempunyai pengertian yang lain. Demikian juga jika kita hubungkan “kecepatan jalan kaki seorang anak” dengan obyek lain umpamanya “jarak yang ditempuh seorang anak” (yang kita lambangkan dengan y) maka kita dapat melambangkan hubungan tersebut sebagai $z = \frac{y}{x}$ dimana z melambangkan “waktu berjalan kaki seorang anak”. Pernyataan $z = \frac{y}{x}$ kiranya jelas tidak mempunyai konotasi emosional dan hanya mengemukakan informasi mengenai hubungan antara x , y , dan z . Secara ini maka pernyataan matematik mempunyai sifat yang jelas, spesifik dan informative dengan tidak menimbulkan konotasi yang bersifat emosional.

Sebagai bahasa, matematika memang memiliki kelebihan jika dibandingkan dengan bahasa-bahasa lainnya. Bahasa matematika memiliki makna yang “tunggal”, sehingga suatu kalimat matematika tidak dapat ditafsirkan bermacam-macam. Ketunggalan makna dalam bahasa matematika ini disebut sebagai bahasa “internasional”, karena komunitas pengguna bahasa matematika adalah bercorak global dan universal di semua negara yang tidak dibatasi oleh suku, agama, bangsa, negara, budaya, ataupun bahasa yang mereka gunakan sehari-hari.⁴⁰ Bahasa yang dipakai dalam pergaulan sehari-hari sering

⁴⁰ Moch. Masykur dan Abdul Halim Fathani, *Mathematical Intelligence.....*, hal. 47.

mengandung kerancuan makna di dalamnya, yang timbul karena tekanan dalam mengucapkannya, ataupun karena kata yang digunakan dapat ditafsirkan dalam berbagai arti.

Bahasa matematika berusaha dan berhasil menghindari kerancuan arti, karena setiap kalimat (istilah atau variabel) dalam matematika sudah memiliki arti yang tertentu. Ketunggalan arti itu mungkin karena adanya kesepakatan matematikawan atau ditentukan sendiri oleh penulis di awal tulisannya. Dalam hal ini, orang dibebaskan untuk menggunakan istilah atau variabel matematika yang mengandung arti berlainan. Namun, dia harus menjelaskan terlebih dahulu di awal pembicaraannya atau tulisannya bagaimana tafsiran yang diinginkan tentang istilah matematika tersebut. Selanjutnya, dia harus taat dan tunduk menafsirkannya selama pembicaraan atau tulisan tersebut.

Bagi dunia keilmuan, matematika memiliki peran sebagai bahasa simbolik yang memungkinkan terwujudnya komunikasi yang cermat dan tepat. Matematika dalam hubungannya dengan komunikasi ilmiah mempunyai peran ganda, yakni sebagai ratu dan sekaligus sebagai pelayan ilmu.

Matematika sebagai ratu sesuai dengan pendapat Sutrisman dan G. Tambunan dalam bukunya “Pengajaran Matematika” yang dikutip oleh Abdul Halim Fathani dalam “Matematika Hakekat dan Logika”, dimana Sutrisman dan G. Tambunan mengungkapkan bahwa matematika adalah queen of science (ratunya ilmu).⁴¹ Sebagai ratu, matematika merupakan bentuk tertinggi dari logika. Hal ini juga diperkuat oleh pendapat Bertrand Russell, “Matematika

⁴¹ Abdul Halim Fathani, *Matematika Hakikat Dan Logika.....*, hal. 25.

adalah masa kedewasaan logika, sedangkan logika adalah masa kecil matematika”.⁴² Berdasarkan perkembangannya, masalah yang dihadapi logika makin lama makin rumit dan membutuhkan struktur analisis yang lebih sempurna. Dalam perspektif inilah, logika berkembang menjadi matematika.

Sedangkan di sisi lain, matematika sebagai pelayan ilmu, matematika memberikan bukan saja sistem pengorganisasian ilmu yang bersifat logis, tapi juga pernyataan-pernyataan dalam model matematik. Matematika bukan saja menyampaikan informasi secara jelas dan tepat, melainkan juga singkat. Suatu rumus yang jika ditulis dengan bahasa verbal membutuhkan rentetan kalimat yang banyak sekali, dimana makin banyak kata-kata yang dipergunakan makin besar pula peluang untuk terjadinya salah informasi dan salah interpretasi, maka dalam bahasa matematika cukup ditulis dengan model yang sederhana sekali. Dengan kata lain, ciri bahasa matematika adalah bersifat ekonomis.⁴³

Komunikasi yang terjadi dalam matematika dapat terjadi, antara lain, dalam:

- a. Dunia nyata, ukuran dan bentuk lahan dalam dunia pertanian (*geometri*), banyaknya barang dan nilai uang logam dalam dunia bisnis dan perdagangan (*bilangan*), ketinggian pohon dan bukit (*trigonometri*), kecepatan gerak benda angkasa (*kalkulus*), peluang dalam perjudian (*probabilitas*), sensus dan data kependudukan (*statistika*), dan sebagainya;

⁴² Jujun S. Suriasumantri, *Filsafat Ilmu Sebuah Pengantar Populer...*, hal. 199.

⁴³ Moch. Masykur dan Abdul Halim Fathani, *Mathematical Intelligence.....*, hal. 49.

- b. Struktur abstrak dari suatu sistem, antara lain struktur sistem bilangan (grup, ring), struktur penalaran (logika matematika), struktur berbagai gejala dalam kehidupan manusia (pemodelan matematika), dan sebagainya;
- c. Matematika sendiri, yaitu bentuk komunikasi yang digunakan untuk pengembangan diri matematika. Bidang ini disebut “metamatematika”.⁴⁴

Jadi, sejak awal kehidupan manusia matematika itu merupakan alat bantu untuk mengatasi berbagai macam permasalahan yang terjadi dalam kehidupan masyarakat. Baik itu permasalahan yang masih memiliki hubungan erat dalam kaitannya dengan ilmu eksak ataupun permasalahan-permasalahan yang bersifat sosial. Peranan matematika terhadap perkembangan sains dan teknologi sudah jelas, bahkan bisa dikatakan bahwa tanpa matematika sains dan teknologi tidak akan dapat berkembang.

Untuk dapat mendukung pelaksanaan pembelajaran matematika di sekolah, harus disusun konsep kurikulum matematika yang digunakan secara jelas dan terarah. Sehingga proses pembelajaran matematika dapat berjalan sesuai dengan yang diharapkan, dan yang lebih penting, pembelajaran matematika dapat digunakan untuk mendukung perkembangan sains dan teknologi, dan bidang-bidang lainnya.

3. Aliran-aliran Filsafat Matematika

Pada masa silam, para ahli telah banyak menghasilkan ide dan pemikirannya tentang filsafat dan matematika. Antara pemikiran ahli yang satu dengan lainnya sering diwarnai perdebatan sengit untuk mendapatkan satu

⁴⁴ Ibid., hal. 51.

gagasan yang benar-benar dapat mencapai “kebenaran”. Karena terjadinya perdebatan itulah, seolah-olah para ahli tersebut terkotak-kotak menurut kelompoknya masing-masing yang berdasarkan sudut pandang dalam mengeluarkan idenya.

Dari permulaan ide para ahli tersebut, Sumardyono menjelaskan bahwa secara umum terdapat tiga aliran besar yang memengaruhi perkembangan matematika, termasuk perkembangan pendidikan matematika, yakni: *aliran formalisme, aliran logikalisme atau logisme, dan aliran intuisiisme*.⁴⁵

a. Aliran Formalisme

Aliran formalisme dipelopori oleh ahli matematika dari Jerman, David Hilbert. Menurut aliran ini sifat alamiah dari matematika adalah sebagai sistem lambang yang formal sebab matematika bersangkutan paut dengan sifat-sifat struktural dari simbol-simbol melalui pelbagai sasaran yang menjadi obyek matematika. Bilangan-bilangan misalnya, dipandang sebagai sifat-sifat struktural paling abstrak yang dilepaskan dari suatu arti tertentu dan hanya menunjukkan bentuknya saja.⁴⁶

Bagi kaum formalis, matematika itu sesungguhnya dikembangkan melalui suatu sistem aksioma.⁴⁷ Aksioma adalah suatu kesepakatan yang amat mendasar yang tidak perlu dibuktikan kebenarannya. Aksioma dapat diklasifikasikan menjadi dua jenis: 1) aksioma yang bersifat self evident truth, yaitu bila kebenarannya langsung terlihat dari pernyataannya; dan 2) aksioma

⁴⁵ Sumardyono, *Karakteristik Matematika dan Implikasinya terhadap Pembelajaran Matematika*, (Yogyakarta: Depdiknas, 2004), hal. 23.

⁴⁶ Hamzah B. Uno, *Model Pembelajaran....*, hal. 127.

⁴⁷ Sumardyono, *Karakteristik Matematika dan Implikasinya....*, hal. 38.

yang bersifat non-self evident truth, yaitu pernyataan yang mengaitkan fakta dan konsep melalui suatu relasi tertentu. Hal ini lebih terlihat sebagai sebuah kesepakatan saja. Beberapa aksioma dapat membentuk suatu sistem aksioma, yang selanjutnya dapat menurunkan beberapa teorema. Teorema inilah yang perlu untuk dibuktikan kebenarannya.⁴⁸

Kaum formalis percaya bahwa obyek-obyek matematika itu tidak ada hingga diciptakan oleh manusia melalui sistem aksioma. Mereka mencoba membuktikan bahwa seluruh bangunan matematika yang disusun dari sistem aksioma itu adalah konsisten.

Walaupun semua sistem matematika masih menggunakan sistem aksioma, tetapi menganggap bahwa formalisme menjadi landasan matematika tidak diterima oleh beberapa ahli. Keberatan bermula ketika Godel membuktikan bahwa kita tidak mungkin dapat membuat suatu sistem lengkap yang konsisten dalam dirinya sendiri. Pernyataan ini terkenal dengan sebutan Teorema Ketidaklengkapan Godel (Godel's Incompleteness Theorem).⁴⁹

Contoh:

Guru memulai mengajarkan topik persamaan kuadrat sebagai pokok bahasan baru bagi siswa dengan menulis rumus persamaan kuadrat di papan tulis. "Ini yang disebut persamaan kuadrat, anak-anak...", demikian kata guru memulai pengajarannya. Setelah memberi penjelasan seperlunya, guru memberi sekian soal untuk mendrill keterampilan siswa dalam topik persamaan kuadrat tersebut tanpa memberi kesempatan

⁴⁸ Abdul Halim Fathani, *Matematika Hakikat Dan Logika.....*, hal. 54.

⁴⁹ Ibid., hal. 54.

kepada siswa untuk memahami sendiri mengapa dan bagaimana persamaan kuadrat ada dan perlu dipelajari. Biasanya, siswa yang mendapat pengajaran model guru formalis akan terampil mengolah simbol-simbol tanpa memahami maknanya, bahkan bisa lebih buruk lagi; tidak mengerti apa pun tentang apa yang dipelajari.

Guru yang menganggap matematika hanya merupakan kumpulan angka-angka dan rumus-rumus belaka, sadar atau tidak ia telah menjadi pendukung kaum formalisme (yang ekstrem). Guru tipe ini sering kali hanya mengajarkan matematika bukannya membelajarkan matematika.

b. Aliran Logikalisme atau Logisme

Dua ahli matematika sekaligus ahli filsafat dari Inggris menjadi pioner aliran atau landasan matematika ini, yaitu Bertrand Russell (1872-1970) dan Alfred North Whitehead (1867-1947). Menurut mereka, matematika dapat diturunkan dari prinsip-prinsip logika. Kebanyakan ide-ide logika juga diterima oleh kaum formalis, tetapi mereka tidak percaya bahwa matematika dapat diturunkan dari logika saja. Sementara menurut kaum logisme, matematika itu tidak lain adalah logika. Menurut istilah mereka, matematika itu masa dewasa dari logika.⁵⁰

Secara umum, ilmu merupakan pengetahuan yang mendasarkan kepada analisis dalam menarik kesimpulan menurut suatu pola pikir tertentu. Matematika, menurut Wittgenstein, tak lain adalah metode berpikir yang logis. Berdasarkan perkembangannya, masalah yang dihadapi logika makin lama

⁵⁰ Ibid., hal. 55.

semakin rumit dan membutuhkan struktur analisis yang lebih sempurna. Dalam perspektif inilah, logika berkembang menjadi matematika, sebagaimana yang disimpulkan Bertrand Russell, bahwa “matematika merupakan masa kedewasaan logika, sedangkan logika adalah masa kecil dari matematika”.⁵¹

Contoh:

Perhatikan barisan pernyataan matematis di bawah ini:

$$6 : 12 = 0,5$$

$$6 : 6 = 1$$

$$6 : 2 = 3$$

$$6 : 0,1 = 60$$

$$6 : 0,001 = 6.000$$

$$6 : 0,000.000.001 = 6.000.000.000$$

demikian seterusnya

Kesimpulan: Jika dibagi dengan bilangan yang makin kecil hasilnya semakin besar. Maka seharusnya (logisnya), $6 : 0 = \infty$, (lambang ∞ berarti tak berhingga (*infinite*)). Guru yang berpikir logis seperti ini sukar menerima kenyataan bahwa di dalam matematika, misal: bilangan real berapa pun jika dibagi dengan nol tidak mempunyai hasil/jawaban atau sering disebut pembagian dengan nol *tidak terdefinisi*. Lebih gawat lagi, bila miskonsepsi tersebut ditularkan kepada siswa. Sebagai perbandingan,

⁵¹ Jujun S. Suriasumantri, *Filsafat Ilmu Sebuah Pengantar Populer...*, hal. 199.

sebuah buku panduan matematika sekolah di Amerika Serikat pernah memuat kesalahan serupa dengan menulis $1 : 0 = \infty$.⁵²

Guru seperti di atas yang hanya mengandalkan logika atau akal sehat belaka, tergolong guru logikalis. Biasanya, guru tipe ini sulit memahami atau menerima kebenaran-kebenaran matematika yang kelihatannya sulit diterima akal sehat atau mungkin bertentangan dengan akal sehat, seperti orang yang tidak dapat memahami mengapa pensil yang dicelupkan ke dalam gelas berair bisa tampak terbelah dua. Bila guru tersebut tidak memahami struktur matematika, bisa jadi ia akan terjexrumus ke dalam miskonsepsi-miskonsepsi (kesalahan konsep) yang diajarkan kepada siswa.

c. Aliran Intuisionisme

Adapun aliran intuisionisme dipelopori oleh ahli matematika Belanda, Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Aliran ini sejalan dengan filsafat umum Immanuel Kant (1724-1804). Immanuel Kant berpendapat bahwa matematika merupakan *sintetik a priori* dimana eksistensi matematika tergantung kepada dunia pengalaman manusia.⁵³

Menurut Luitzen Egbertus Jan Brouwer bahwa matematika adalah sama dengan bagian dari eksakta dari pemikiran manusia, matematika berasal dan berkembang di dalam pikiran manusia. Ketepatan dalil-dalil matematika terletak pada akal manusia (human intellect) dan tidak pada simbol-simbol di atas kertas seperti yang diyakini oleh aliran formalisme. Hukum-hukum

⁵² Abdul Halim Fathani, *Matematika Hakikat Dan Logika.....*, hal. 56.

⁵³ Jujun S. Suriasumantri, *Filsafat Ilmu Sebuah Pengantar Populer....*, hal. 206.

matematika tidak ditemukan melalui pengamatan terhadap alam, tetapi mereka ditemukan dalam pikiran manusia.⁵⁴

Memang, menurut akal sehari-hari, kebenaran matematika tidak ditentukan oleh pembuktian secara empiris, melainkan kepada proses penalaran deduktif. Jika seseorang memasukkan bebek dua ekor pada pagi hari, kemudian dia memasukkan bebek dua ekor lagi pada siang hari, maka pada malam hari dia akan mengharapkan jumlah bebek semuanya menjadi empat ekor. Sekiranya pada malam hari dia melakukan verifikasi dan jumlahnya hanya tiga ekor, segera dia menyimpulkan ada sesuatu yang salah secara empiris dibandingkan dengan penalaran rasionalnya. Sebab apapun yang terjadi, jumlahnya harus tetap empat ekor. Kecuali, bebeknya ada yang lari lewat kolong rumah, ada pencuri yang datang ketika ia tidur, atau ada bebek yang ngumpet dan belum ketemu. Demikian juga jika bebek-bebek tersebut beberapa bulan kemudian bukan lagi empat ekor, melainkan lima ekor, maka masalah yang terjadi tersebut bukan lagi termasuk masalah matematika melainkan teknik ilmu beternak bebek dan sebangsanya.⁵⁵

Pemikiran aliran intuisiisme matematika berdasarkan suatu ilham dasar (basic intuition) mengenai kemungkinan untuk membangun suatu seri bilangan yang tak terbatas. Ilham ini pada hakekatnya merupakan suatu aktivitas berpikir yang tergantung pada pengalaman, bahasa dan simbolisme serta bersifat objektif.⁵⁶

⁵⁴ Abdul Halim Fathani, *Matematika Hakikat Dan Logika.....*, hal. 57.

⁵⁵ Jujun S. Suriasumantri, *Filsafat Ilmu Sebuah Pengantar Populer....*, hal. 201.

⁵⁶ Hamzah B. Uno, *Model Pembelajaran.....*, hal. 127.

Keberatan terhadap aliran ini adalah bahwa pandangan kaum intuisisionis tidak memberikan gambaran yang jelas tentang bagaimana matematika bekerja dalam pikiran. Konsep-konsep mental seperti cinta dan benci berbeda-beda antara manusia yang satu dengan yang lain. Apakah realistis bila menganggap bahwa manusia dapat berbagi pandangan intuitif tentang matematika secara persis sama? Lalu, mengapa kita mengajarkannya bila semua matematika adalah intuitif?

Contoh:

Ketika seorang guru mengajarkan pokok bahasan urutan, ada siswa yang menulis lambang “lebih kecil” dengan: “ \subset ” (seharusnya ditulis $<$). Setelah melihat bahwa siswa sebenarnya telah memahami tentang sifat urutan, ia tidak mempersalahkan kesalahan simbol tersebut. Ini tidak dapat dibenarkan dalam proses pembelajaran. Penggunaan simbol-simbol matematika secara tepat juga merupakan tujuan pembelajaran matematika dalam rangka mengomunikasikan masalah secara lebih efisien dan tepat dalam bahasa matematika. Juga bila kesalahan penulisan simbol dibiarkan akan mengganggu siswa untuk mempelajari matematika lebih lanjut (apalagi bila simbol yang sama akan dijumpai berbeda makna, seperti contoh di atas: lambang “ \subset ” seharusnya berlaku untuk himpunan).

Lalu, dimana implikasi teori-teori landasan matematika itu bagi pembelajaran matematika? Implikasi langsung memang kelihatannya tidak ada, tetapi ia akan mempengaruhi pola pikir seseorang (guru) dalam memandang matematika sehingga mempengaruhi cara guru membelajarkan matematika.

Lalu, aliran atau landasan matematika mana yang benar? Atau bagaimana guru harus bersikap? Pertanyaan pertama bukanlah otoritas bagi guru selaku pendidik, tetapi perlu diketahui sejauh ini pun tidak ada aliran yang diterima secara bulat. Apa yang dapat kita lakukan adalah menjaga keseimbangan dalam rangka pembelajaran matematika secara optimal dan bermakna. Kita harus menghindari pola-pola pikir yang terlalu ekstrem. Dengan adanya paradigma konstruktivisme dalam pembelajaran dewasa ini, tidak berarti bahwa siswa tidak difasilitasi guru sama sekali, juga tidak berarti lambang-lambang formal tidak dibutuhkan, juga tidak berarti logika dikesampingkan.

4. Karakteristik Umum Matematika

Setelah membaca dan memahami uraian tentang definisi matematika dan aliran-aliran filsafat matematika di atas, seolah-olah tampak bahwa matematika merupakan pribadi yang mempunyai beragam corak penafsiran dan pandangan, yang mana antara matematikawan yang satu dengan lainnya memiliki pemahaman dan argumen yang berbeda untuk mendeskripsikan apa dan bagaimana sebenarnya matematika itu. Begitu juga dalam aliran filsafat matematika, ditemukan terdapat tiga aliran besar yang memengaruhi perkembangan matematika yang sampai sekarang pun belum ditemukan pengerucutan tentang pendeskripsian matematika.

Tetapi, dibalik keragaman itu semua, dalam setiap pandangan matematika terdapat beberapa ciri matematika yang secara umum disepakati bersama. Diantaranya adalah sebagai berikut:⁵⁷

⁵⁷ Abdul Halim Fathani, *Matematika Hakikat Dan Logika.....*, hal. 59-74.

a. Memiliki Objek Kajian yang Abstrak

Matematika mempunyai objek kajian yang bersifat abstrak, walaupun tidak setiap yang abstrak adalah matematika. Sementara beberapa matematikawan menganggap objek matematika itu “konkret” dalam pikiran mereka, maka kita dapat menyebut objek matematika secara lebih tepat sebagai objek mental atau pikiran. Ada empat objek kajian matematika, yaitu *fakta*, *operasi* atau *relasi*, *konsep*, dan *prinsip*.

1) Fakta

Fakta adalah pemufakatan atau konvensi dalam matematika yang biasanya diungkapkan melalui simbol-simbol tertentu.⁵⁸

Contoh:

Simbol “2” secara umum telah dipahami sebagai simbol untuk bilangan “dua”. Sebaliknya, bila kita menghendaki bilangan dua, maka cukup dengan menggunakan simbol “2”. Fakta lain dapat terdiri atas rangkaian simbol, misalnya “3 + 4” yang dipahami sebagai “tiga tambah empat”. Demikian juga “3 x 5 = 15” adalah fakta yang dipahami sebagai “tiga kali lima adalah limabelas”. Fakta yang agak lebih kompleks adalah “3 x 5 = 5 + 5 + 5 = 15”. Dalam geometri, terdapat simbol-simbol tertentu, seperti “⊥” yang berarti “tegak lurus”. Simbol “||” yang berarti sejajar. Dalam trigonometri, dikenal simbol “∠” yang berarti “sudut”, simbol “Δ” yang menunjukkan segitiga. Dalam aljabar, simbol “(a,b)”

⁵⁸ R. Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika Di Indonesia...*, hal. 13

menunjukkan “pasangan berurutan”, simbol “f” yang dipahami sebagai “fungsi”, dan lainnya.

Rubenstein dan Thompson (2000) mengingatkan bahwa”:

In general, teachers must be aware of the difficulties that symbolism creates for students. Symbolism is a form of mathematical language that is compact, abstract, specific, and formal... Therefore, opportunities to us that language should be regular, rich, meaningful, and rewarding. (Secara umum, guru harus menyadari kesulitan-kesulitan tentang symbol bagi siswa. Simbolisme merupakan bentuk bahasa matematika yang rapi, abstrak, khusus, dan formal... Dengan demikian, kesempatan menggunakan bahasa tersebut seharusnya secara bertahap, kaya, penuh arti, dan bermanfaat).⁵⁹

Maka dalam memperkenalkan simbol atau fakta matematika kepada siswa, guru seharusnya melalui beberapa tahap yang memungkinkan siswa dapat menyerap makna dari simbol-simbol tersebut. Dalam hal ini, pendekatan *enaktif-ikonik-simbolik* dari Jerome Bruner dapat diterapkan. Mereka bahkan dapat menggunakan simbol-simbol pilihan mereka sendiri. Hal ini dipikirkan sebagai suatu cara untuk menjaga partisipasinya dalam proses penemuan dan formalisasi pengalaman matematika. Hal tersebut juga untuk menjaga pengalaman belajar dari sekadar hanya latihan mengingat.

⁵⁹ Abdul Halim Fathani, *Matematika Hakikat Dan Logika.....*, hal. 60

Penggunaan fakta yang berupa simbol bila terlalu cepat diberikan kepada siswa, dapat menyebabkan salah pengertian atau miskonsepsi terhadap simbol tersebut. Selain itu, penekanan pada aspek teknis berupa perhitungan belaka, juga dapat menimbulkan miskonsepsi tersebut.

Contoh (miskonsepsi):

Miskonsepsi yang sering terjadi pada siswa SD adalah penggunaan yang kurang tepat terhadap simbol “=”. Siswa sering kali memahami simbol “=” tidak hanya berarti “sama dengan” tetapi juga “memberi hasil”. Bila pengertian yang terakhir ini melekat pada pikiran siswa, mungkin ia akan menulis seperti kalimat berikut: $3 + 6 = 9 + 2 = 11 + 7 = 18$. Kalimat matematika ini jelas-jelas merupakan kalimat yang salah. Dalam kasus lainnya, banyak siswa yang keliru dalam pemahaman terhadap bilangan phi (π). Ada siswa yang memiliki anggapan phi (π) bernilai sama dengan **3, 14** atau $\frac{22}{7}$, padahal nilai tersebut pada hakekatnya adalah sebuah nilai pendekatan.

2) Konsep

Konsep adalah ide abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan atau mengklasifikasikan sekumpulan objek, apakah objek tertentu merupakan contoh konsep atau bukan.⁶⁰

Contoh:

“Segitiga” adalah nama suatu konsep. Dengan konsep itu, kita dapat membedakan mana yang merupakan contoh segitiga dan mana yang

⁶⁰ http://tatagyey.files.wordpress.com/2007/11/aksiomatik_pdm01.pdf, diakses tanggal 5 Agustus 2013

bukan contoh segitiga. “Bilangan prima” juga nama suatu konsep, yang dengan konsep itu kita dapat membedakan mana yang merupakan bilangan prima dan mana yang bukan. Konsep “bilangan prima” lebih kompleks dari konsep “segitiga”, oleh karena di dalam konsep “bilangan prima” memuat konsep-konsep lain seperti “faktorisasi”, “bilangan”, “satu”, dan lain-lain. Di samping itu, dalam matematika terdapat konsep-konsep yang penting, seperti “fungsi” dan “variabel”. Selain itu, terdapat pula konsep-konsep yang lebih kompleks, seperti “matriks”, “determinan”, “periodik”, “gradien”, “vektor”, “group”, dan “bilangan phi”.

Konsep dapat dipelajari lewat definisi atau observasi langsung. Seseorang dianggap telah memahami suatu konsep, jika ia dapat memisahkan contoh konsep dari yang bukan contoh konsep.

a) Definisi

Konsep berhubungan dengan definisi. Definisi adalah ungkapan yang membatasi konsep.⁶¹ Dengan adanya definisi, orang dapat membuat ilustrasi, gambar, skema, atau simbol dari konsep yang didefinisikan.

Contoh:

Konsep “lingkaran” dapat didefinisikan sebagai “kumpulan titik-titik pada bidang datar yang memiliki jarak yang sama terhadap titik tertentu”. Dengan definisi tersebut pula, orang dapat membuat sketsa dari lingkaran, dan pada kasus ini orang sepakat memilih

⁶¹ R. Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika Di Indonesia...*, hal. 14

simbol “O” untuk menunjukkan lingkaran. Apakah definisi lingkaran di atas merupakan satu-satunya definisi untuk lingkaran? Tentu tidak! Di bangku SMA, siswa telah mengenal pendefinisian lingkaran dengan cara analitik, yaitu menggunakan koordinat titik (x,y) dalam bidang datar (koordinat kartesian).

Adapun Tan Malaka dalam *Madilog* menerjemahkan “definisi” dengan sebuah penetapan, pembatasan, pemastian. Artinya ialah buat menentukan tepat batasnya sesuatu perkataan atau hukum atau paham.⁶²

Tan Malaka juga berpendapat, suatu definisi dapat dikatakan benar (sahih) jika lolos uji beberapa hal sebagai berikut: (1). Kalau semua $A = B$, maka sebaliknya haruslah $B = A$ (**$A = B$ dan $B = A$**), (2). Definisi itu sedapat-dapatnya pendek, tetapi jangan melebar atau kesempitan, (3). Definisi itu tak boleh circular atau berputar-putar, (4). Definisi itu mesti general atau umum, (5). Definisi tak boleh memakai metafor, ibarat, kata figuratif dan kata yang abstrak atau gaib, (6). Definisi tak boleh negatif.⁶³

(1). Definisi haruslah $A = B$ dan $B = A$

Menurut Tan Malaka, misalnya ada suatu definisi “A adalah B”, haruslah ada pertanyaan apakah semua $A = B$ dan sebaliknya harus ada pertanyaan apakah semua $B = A$? Kalau jawabannya, ya, maka benarlah itu definisi, kalau tidak, gagallah itu diartikan sebagai definisi. “Segitiga sama sisi, adalah satu gambar datar tertutup dibatasi oleh 3 garis lurus yang sama panjang”. Uji pertama, apakah semua segitiga sama sisi

⁶² Tan Malaka, *Madilog*, (Jakarta:TePLOK PRESS, 2000), hal. 55

⁶³ *Ibid.*, hal. 59-63

berupa gambar datar tertutup dan dibatasi oleh 3 garis lurus (tidak bengkok) sama panjang? Uji kedua, apakah semua gambar datar tertutup dan dibatasi oleh 3 garis lurus (tidak bengkok) sama panjang dinamakan segitiga sama sisi? Ternyata uji pertama dan uji kedua jawabannya, ya. Sehingga definisi tersebut benar-benar sah.

(2). Definisi itu sedapat-dapatnya pendek

Maksud sedapat-dapatnya ialah ada kalanya tidak boleh dipendekkan. Kalau dipendekkan, maka artinya menjadi sempit. Definisi tidak boleh sempit dan tidak boleh melebar. Misalnya definisi “manusia itu hewan”, maka betul definisi ini pendek, tetapi artinya melampaui batas atau melebar. Karena bukan saja manusia, tetapi juga monyet dan ular termasuk hewan. Jadi kalau definisi ini dibalikkan akan didapat “hewan itu manusia”, tegasnya, ular, kerbau, monyet itu manusia. Dan ini semua tidaklah dapat diterima.

Definisi juga tidak boleh sempit, artinya harus punya “essential attributes”: segala sifat yang penting tidak boleh lupa dan harus ada. Misalnya definisi “kuda itu binatang berkaki empat”, maka definisi itu terlalu melebar sebab kerbau juga binatang berkaki empat. Tetapi jika “kuda itu binatang berkaki empat yang ditunggangi Pangeran Diponegoro”, maka artinya terlalu sempit. Sebab, selain ditunggangi Pangeran Diponegoro, dia juga dipakai untuk menarik kereta delman, bajak, gerobak, dsb.

Jadi semua sifat yang penting haruslah termasuk. Dalam matematika lebih mudah mencari contoh, sebab matematika umumnya buah pikiran yang pasti berdasar bukti yang ditetapkan, didefinisikan lebih dahulu.

Demikianlah “square atau segi empat siku, adalah satu gambar datar tertutup dibatasi oleh 4 garis lurus yang sama panjang dan mempunyai 4 sudut siku-siku”. Disini bukan satu saja sifat yang penting. Pertama dia harus “gambar datar tertutup”, bukan gambar pada tempat bertinggi rendah dan bukan terbuka, melainkan semua sisinya bertemu (tertutup). Disini saja sudah bertemu dengan beberapa, bukan satu sifat yang penting. Kedua, dia harus dibatasi oleh 4 garis lurus yang sama panjang (jadi, 4 garis, bukan 3 atau 5 dsb), garisnya lurus tidak boleh bengkok, panjang garisnya harus sama pula. Ketiga, 4 sudut harus siku-siku, yakni 90° . Ketiga sifat diatas satupun tidak boleh ketinggalan. Kalau ketinggalan, bukan square yang diperoleh.

Memang definisi sedapat-dapatnya pendek, tetapi harus mengandung semua sifat penting. Kalau tidak pastinya suatu definisi akan melebar atau menyempit.

(3). Definisi itu tidak boleh circular atau berputar-putar

Kesalahan dapat terjadi jika suatu definisi memakai berlainan perkataan yang bersamaan artinya. Contoh dari Aristoteles: “Tumbuhan yaitu barang hidup yang mempunyai jiwa vegetable”. Sedangkan vegetable itu artinya tumbuhan juga. Jadi sebenarnya definisi ini: “Tumbuhan yaitu barang hidup yang mempunyai jiwa tumbuhan”. Disini

nyata, tumbuhan berbalik artinya pada tumbuhan atau sama arti. Dengan begitu, kepastian keterangan tentang tumbuhan tidak diperoleh.

Demikian juga Mahatma Gandhi mendefinisikan “ahimsa itu soul-force”, kekuatan jiwa yang berdasar kasih, seperti pati atau rohani. Apakah “kekuatan jiwa” itu? Itulah yang perlu lagi dibuktikan atau ditunjukkan. Jika suatu barang yang harus dibuktikan dengan mengganti nama baru, yang harus diterangkan pula, maka definisi itu berputar-putar. Seharusnya satu definisi adalah satu ketentuan yang pasti, yang ditentukan oleh ketentuan yang tentu. Sehingga memberikan satu kepastian keterangan.

(4). Definisi itu harus bersifat general atau umum

Definisi harus umum, biasa, lebih diketahui dari pada barang yang dipastikan. Seperti “satu jam ialah satu chronometer buat pengukur waktu dengan tepat”. Cukuplah dibilang “satu jam ialah buat pengukur waktu”. Tidak perlu pergi ke kapal, dimana orang memakai semacam jam istimewa yang bernama chronometer buat pekerjaan yang kurang diketahui orang secara umum. Kecuali kalau tidak ada jalan lain dari pada jalan istimewa tadi.

(5). Definisi tidak boleh memakai metafor, ibarat, kata figuratif dan kata yang abstrak atau gaib

Dengan definisi bertujuan untuk memastikan, membuktikan dan menerangkan sesuatu. Dengan memakai ibarat, memakai gambar saja,

perkataan gaib yang tidak dapat dikenal panca indera, barang yang akan di definisikan itu tidak akan bertambah pasti. Malah sebaliknya.

Seperti definisi yang diungkapkan Tan Malaka, “rohani itu ialah satu kodrat, laksana Sang Garuda Rajawali yang mengendarai bulan dan matahari, dan menerbitkan bintang dan bumi yang bisa menjelma sebagai Kuman Pasupati memasuki pagar jasmani”. Definisi diatas sangatlah sulit untuk diterima atau dipahami, sebab kata-kata ibarat, metafor bahkan kata yang bersifat abstrak atau gaib masuk di dalamnya.

(6). Definisi tidak boleh negatif

Kalau orang kaya didefinisikan sebagai orang yang tidak miskin, maka definisi itu negatif. Sehingga sifatnya tidak nyata. Jika dibandingkan dengan, orang kaya itu punya harta yang banyak, maka akan lebih meyakinkan definisi yang kedua.

Tetapi kadang-kadang dalam matematika definisi bisa berupa negatif, tetapi sebetulnya ia positif. Umpamanya: satu garis lurus itu, tidak mengubah tujuannya. Tidak mengubah berarti menetapkan. Jadi definisi itu boleh ditukar menjadi: satu garis lurus menetapkan tujuannya. Kadang-kadang tidak ada akal selain member definisi yang sifatnya negatif, seperti “Gelap itu ialah tidak terang”.

Dalam bidang matematika ada tiga macam definisi yang sering dikenal, yakni:

a) Definisi analitik

Suatu definisi disebut analitik apabila definisi tersebut dibentuk dengan *genus proksimum* dan *diferensia speksifika* (*genus proksimum*: keluarga terdekat, *diferensia speksifika*: pembeda khusus).

Contoh:

Perhatikan dua definisi belah ketupat berikut ini:

1. Belah ketupat adalah jajaran genjang yang....
2. Belah ketupat adalah segi empat yang....

Definisi pertama menyebutkan *genus proksimum* jajaran genjang, sedang definisi kedua menyebutkan segi empat sebagai *genus proksimum* atau keluarga terdekatnya. *Diferensia speksifikanya* adalah sifat yang disebutkan setelah kata “yang”.

b) Definisi genetik

Suatu definisi dikatakan bersifat genetik apabila pada definisi tersebut terdapat ungkapan tentang cara terjadinya konsep yang didefinisikan.

Contoh:

Definisi-definisi berikut ini bersifat genetik:

1. Segitiga siku-siku adalah segitiga yang terjadi bila suatu persegi panjang dipotong menurut salah satu garis diagonalnya.
2. Jaring-jaring limas adalah bangun yang terjadi bila sisi-sisi limas direbahkan dengan poros rusuk alas hingga sampai ke bidang pemuat alasnya.

c) Definisi dengan rumus

Definisi dengan rumus adalah definisi yang dinyatakan dengan menggunakan kalimat matematika.

Contoh:

Berikut ini contoh definisi dengan rumus:

1. Dalam ilmu bilangan (*aritmetika*): $a - b = a + (-b)$

2. Dalam aljabar: $n! = 1.2.3.4. \dots (n - 2)(n - 1)n$ dengan

$0! = 1 = 1$ (bentuk definisi ini disebut pula bentuk induksi).

b) Intensi dan Ekstensi suatu Definisi

Dalam suatu definisi terdapat 2 hal yang disebut *intensi* atau hal yang menjadi fokus dalam pernyataan dan ekstensi atau hal yang menjadi jangkauan dari pernyataan. Dapat terjadi dua definisi dengan intensi berbeda, tetapi dengan ekstensi yang sama.

Contoh:

- (1) Segitiga sama sisi adalah segitiga yang sama sisinya.
- (2) Segitiga sama sisi adalah segitiga yang sudutnya sama.
- (3) Segitiga sama sudut adalah segitiga yang ketiga sudutnya sama.
- (4) Segitiga sama sudut adalah segitiga yang ketiga sisinya sama.

Dalam contoh di atas, atributnya berbeda, yang satu mengutamakan sisi, sedang yang lain mengatakan sudut. Ini dikatakan bahwa definisi (1) dan (2) memiliki ekstensi (atau jangkauan) yang sama, sedang intensinya berbeda.

Demikian juga terhadap definisi (3) dan (4), yang memiliki ekstensi sama, tetapi intensi berbeda. Bahkan lebih jauh, keempat definisi tersebut juga memiliki ekstensi yang sama. Adakah segitiga sama sisi yang bukan segitiga sama sudut, dan sebaliknya? Tentu jawabnya tidak ada. Keempat definisi tersebut sama atau disebut ekuivalen.

Berkaitan dengan intensi dan ekstensi suatu definisi, maka definisi suatu konsep matematika dapat berbagai macam bentuknya. Karena itu, definisi yang mungkin dikemukakan siswa dapat saja berbeda dengan definisi formal yang biasa digunakan dalam matematika. Dalam hal ini, guru harus jeli melihat kemungkinan kesamaan dari definisi tersebut. Guru tidak boleh menyalahkan definisi yang diberikan siswa bila memang ternyata memiliki pengertian yang sama. Bila pun salah, guru harus memfasilitasi pikiran siswa menuju definisi yang tepat.

3) Operasi atau Relasi

Operasi adalah pengerjaan hitung, pengertian aljabar, dan pengerjaan matematika lainnya. Sementara relasi adalah hubungan antara dua atau lebih elemen.

Contoh operasi antara lain: “penjumlahan”, “perpangkatan”, “gabungan”, “irisan”, dan lain-lain. Sedang relasi antara lain: “sama dengan”, “lebih kecil”, dan lain-lain.

4) Prinsip

Prinsip adalah objek matematika, yang terdiri atas beberapa fakta, beberapa konsep yang dikaitkan oleh suatu relasi ataupun operasi. Secara

sederhana, dapatlah dikatakan bahwa prinsip adalah hubungan di antara berbagai objek dasar matematika. Prinsip dapat berupa “aksioma”, “teorema” atau “dalil”, “corollary” atau sifat, dan sebagainya.⁶⁴

Contoh:

Sifat komutatif dan sifat asosiatif dalam aritmetika merupakan suatu prinsip. Begitu pula dengan Teorema Pythagoras. Contoh sebuah aksioma antara lain “melalui satu titik A di luar sebuah garis g dapat dibuat tepat sebuah garis yang sejajar garis g ”.

Siswa dapat dianggap telah memenuhi suatu prinsip bila ia memahami bagaimana prinsip tersebut dibentuk dan dapat menggunakannya dalam situasi yang cocok. Bila demikian, berarti ia telah memahami fakta, konsep, atau definisi serta operasi atau relasi yang termuat dalam prinsip tersebut.

b. Bertumpu pada Kesepakatan

Simbol-simbol dan istilah-istilah dalam matematika merupakan kesepakatan atau konvensi yang penting. Dengan simbol dan istilah yang telah disepakati dalam matematika, maka pembahasan selanjutnya akan menjadi mudah dilakukan dan dikomunikasikan.

Contoh:

- 1) Lambang bilangan yang digunakan sekarang: 1, 2, 3, dan seterusnya merupakan contoh sederhana dari sebuah kesepakatan dalam matematika. Siswa secara tidak sadar menerima kesepakatan itu ketika mulai mempelajari tentang angka atau bilangan. Termasuk pula

⁶⁴ R. Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika Di Indonesia...*, hal. 14

penggunaan kata “satu” untuk lambang “1”, atau “sama dengan” untuk lambang “=” juga merupakan kesepakatan.

- 2) Istilah “fungsi” kita batasi pengertiannya sebagai pemetaan yang mengawankan setiap elemen dari himpunan yang tepat satu ke sebuah elemen dari himpunan yang lain. Mengapa harus menggunakan kata “tepat satu”? Penggunaan kata “tepat satu” merupakan contoh kesepakatan dalam matematika. Bila ada pemetaan yang bernilai ganda, berarti bukan termasuk fungsi.

Dalam matematika, kesepakatan atau konvensi merupakan tumpuan yang amat penting. Kesepakatan atau konvensi merupakan tumpuan yang amat penting. Kesepakatan yang amat mendasar adalah aksioma (postulat, pernyataan pangkal yang tidak perlu pembuktian) dan konsep primitif (pengertian pangkal yang tidak perlu didefinisikan, undefined term). Aksioma yang diperlukan untuk menghindari proses berputar-putar dalam pembuktian (*circulus in probando*). Sedangkan konsep primitif diperlukan untuk menghindari proses berputar-putar dalam pendefinisian (*circulus in defieniendo*).

Aksioma dapat diklasifikasikan menjadi 2 jenis: 1) aksioma yang bersifat “*self evident truth*”, yaitu bila kebenarannya langsung terlihat dari pernyataannya, dan 2) aksioma yang bersifat “*non-self evident truth*”, yaitu pernyataan yang mengaitkan fakta dan konsep lewat suatu relasi tertentu. Bentuk terakhir ini lebih terlihat sebagai sebuah kesepakatan saja.

Beberapa aksioma dapat membentuk suatu sistem aksioma, yang selanjutnya dapat menurunkan beberapa teorema. Dari satu atau lebih konsep primitif, dapat dibentuk konsep baru melalui pendefinisian.

Contoh:

- 1) Titik, garis, dan bidang merupakan unsur-unsur primitif atau pengertian pangkal dalam geometri Euclid. Sementara salah satu aksioma di dalamnya adalah: “Melalui dua buah titik ada tepat satu garis lurus yang dapat dibuat”.
- 2) Group didefinisikan lewat sistem aksioma. Suatu himpunan G dengan operasi biner $*$ yang memenuhi sifat-sifat: 1) tertutup; 2) asosiatif; 3) mempunyai unsur identitas; dan 4) setiap elemen memiliki invers, maka disebut suatu group, dan ditulis dengan $(G, *)$. Aksioma tersebut bersifat *non-self evident truth*.

c. Berpola Pikir Deduktif

Dalam matematika, hanya diterima pola pikir yang bersifat deduktif. Pola pikir deduktif secara sederhana dapat dikatakan pemikiran yang berpangkal dari hal yang bersifat umum diterapkan atau diarahkan kepada hal yang bersifat khusus.

Pola pikir deduktif ini dapat terwujud dalam bentuk yang amat sederhana, tetapi juga dapat terwujud dalam bentuk yang tidak sederhana.

Contoh:

- 1) Seorang siswa telah memahami konsep dari “lingkaran”. Ketika berada di dapur, ia dapat menggolongkan mana peralatan dapur yang berbentuk

lingkaran dan mana yang bukan lingkaran. Dalam hal ini, siswa tersebut telah menggunakan pola pikir deduktif secara sederhana ketika menunjukkan suatu peralatan yang berbentuk lingkaran.

2) Perhatikan pola jumlah bilangan-bilangan ganjil berikut ini.

$$1 = 1 \times 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2 \times 2 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3 \times 3 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4 = 4^2$$

... dan seterusnya

Dari pola yang terlihat kemudian disimpulkan bahwa:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, n \text{ adalah bilangan ganjil.}$$

Penarikan kesimpulan dengan pola pikir induktif di atas tidak dapat dibenarkan dalam matematika. Pendekatan induktif tersebut tidaklah salah, tetapi untuk dapat diterima sebagai suatu kebenaran harus dapat dibuktikan secara umum (deduktif).

Salah satu bukti deduktif dapat ditempuh dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{array}{r} 1 \quad + \quad 3 \quad + \quad 5 \quad + \quad \dots \quad + \quad (2n - 5) \quad + \quad (2n - 3) \quad + \quad (2n - 1) = S \\ (2n - 1) \quad + \quad (2n - 3) \quad + \quad (2n - 5) \quad + \quad \dots \quad + \quad 5 \quad + \quad 3 \quad + \quad 1 = S \\ \hline 2n \quad + \quad 2n \quad + \quad 2n \quad + \quad \dots \quad + \quad 2n \quad + \quad 2n \quad + \quad 2n = 2S \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Sebanyak } n \text{ suku}} \end{array}$$

$$n \cdot 2n = 2S$$

$$\text{sehingga } S = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2n = n^2$$

d. Konsisten dalam Sistemnya

Dalam matematika, terdapat berbagai macam sistem yang dibentuk dari beberapa aksioma dan memuat beberapa teorema. Ada sistem-sistem yang berkaitan, ada pula sistem-sistem yang dapat dipandang lepas satu dengan yang lainnya. Sistem-sistem aljabar dengan sistem-sistem geometri dapat dipandang lepas satu dengan lainnya. Di dalam sistem aljabar, terdapat pula beberapa sistem lain yang lebih “kecil” yang berkaitan satu dengan yang lainnya. Demikian pula di dalam sistem geometri.

Contoh:

Di dalam aljabar terdapat sistem aksioma dalam group, sistem aksioma dalam ring, sistem aksioma dalam lapangan (*field*), dan lain-lain. Di dalam geometri insidensi, sistem geometri Euclid, sistem geometri Lobachevski, dan lain-lain.

Di dalam masing-masing sistem, berlaku ketaatasan atau konsistensi. Artinya, dalam setiap sistem tidak boleh terdapat kontradiksi. Suatu teorema ataupun definisi harus menggunakan istilah atau konsep yang telah ditetapkan terlebih dahulu. Konsistensi itu baik dalam makna maupun dalam hal nilai kebenarannya. Antara sistem atau struktur yang satu dengan sistem atau struktur yang lain tidak mustahil terdapat pernyataan yang saling kontradiksi.

e. Memiliki Simbol yang Kosong Arti

Di dalam matematika, banyak sekali simbol baik yang berupa huruf latin, huruf Yunani, maupun simbol-simbol khusus lainnya. Simbol-simbol

tersebut membentuk kalimat dalam matematika yang biasa disebut model matematika. Model matematika dapat berupa persamaan, pertidaksamaan, maupun fungsi. Selain itu, ada pula model matematika yang berupa gambar seperti bangun-bangun geometrik, grafik, maupun diagram.

Contoh:

Model matematika, seperti $x + y = z$ tidak selalu berarti bahwa x , y , dan z berarti bilangan. Secara sederhana, bilangan-bilangan yang biasa digunakan dalam pembelajaran pun bebas dari arti atau makna real. Bilangan tersebut dapat berarti panjang, jumlah barang, volume, nilai uang, dan lain-lain tergantung pada konteks penerapan bilangan tersebut.

Secara umum model atau simbol matematika sesungguhnya kosong dari arti. Ia akan bermakna sesuatu bila kita mengaitkannya dengan konteks tertentu. Dan hal ini pula yang membedakan simbol matematika dengan simbol bukan matematika. Kosongnya arti dari model-model matematika itu merupakan “kekuatan” matematika, yang dengan sifat tersebut, ia bisa masuk pada berbagai macam bidang kehidupan, dari masalah teknis, ekonomi, hingga ke bidang psikologi.

Walaupun demikian, kebanyakan siswa masih cukup kuat terikat dengan makna yang pertama kali atau yang biasa diajarkan oleh gurunya. Hal ini seperti yang pernah dikeluhkan oleh matematikawan Whitehead, “Yang paling sukar untuk menjelaskan kepada seseorang yang baru belajar matematika ialah bahwa x itu sama sekali tidak berarti.” Maka dari itu, guru

harus senantiasa waspada pada pengertian yang dipakai oleh siswa dalam mempelajari suatu topik bahasan matematika.

f. Memerhatikan Semesta Pembicaraan

Sehubungan dengan kosongnya arti dari simbol-simbol matematika, bila digunakan haruslah memerhatikan lingkup pembicaraan. Lingkup atau sering disebut semesta pembicaraan bisa sempit bisa pula luas. Bila berbicara tentang bilangan-bilangan, maka simbol-simbol tersebut menunjukkan bilangan-bilangan pula. Begitu pula jika berbicara tentang transformasi geometris (seperti translasi, rotasi, dan lain-lain), maka simbol-simbol matematikanya menunjukkan suatu transformasi pula. Benar salahnya atau ada tidaknya penyelesaiannya suatu soal atau masalah, juga ditentukan oleh semesta pembicaraan yang digunakan.

Contoh:

Dalam semesta himpunan bilangan bulat, terdapat model $2x = 3$. Adakah penyelesaiannya? Apabila diselesaikan dengan menggunakan cara biasa tanpa menghiraukan semesta pembicaraannya, maka diperoleh $x = 1,5$. Tetapi 1,5 bukan termasuk bilangan bulat. Jadi, dalam hal ini dapat dikatakan bahwa model tersebut tidak memiliki penyelesaian dalam semesta pembicaraan bilangan bulat. Atau dengan kata lain dapat dinyatakan sebagai “himpunan kosong”.

g. Karakteristik Matematika Sekolah

Sehubungan dengan karakteristik umum matematika di atas, dalam pelaksanaan pembelajaran matematika di sekolah harus memerhatikan ruang

lingkup matematika sekolah. Ada sedikit perbedaan antara matematika sebagai “ilmu” dengan matematika sekolah, perbedaan itu dalam hal: 1) penyajian, 2) pola pikir, 3) keterbatasan semesta, 4) tingkat keabstrakan.

1) Penyajian

Penyajian matematika tidak harus diawali dengan teorema maupun definisi, tetapi haruslah disesuaikan dengan perkembangan intelektual siswa. Pembelajaran matematika di sekolah yang dilakukan dengan pendekatan secara induktif atau konkret sudah harus dikurangi, kecuali pada topik-topik yang memerlukan bantuan yang agak konkret, seperti teori peluang.

Contoh:

Pengertian perkalian seharusnya tidak langsung menyajikan bentuk matematika, misalnya $3 \times 4 = 12$. Penyajiannya hendaknya didahului dengan melakukan penjumlahan berulang dengan memanfaatkan alat peraga, seperti kelereng. Dengan peragaan itu, siswa akan memperoleh pemahaman bahwa walaupun 3×4 dan 4×3 bernilai sama-sama 12, tetapi makna perkaliannya berbeda. Setelah siswa memahami makna perkalian, barulah diminta menghafalkan fakta dasar perkalian.

2) Pola pikir

Pembelajaran matematika sekolah dapat menggunakan pola piker deduktif maupun pola piker induktif. Hal ini harus disesuaikan dengan topik bahasan dan tingkat intelektual siswa. Sebagai kriteria umum,

biasanya di SD menggunakan pendekatan induktif lebih dulu, karena hal ini lebih memungkinkan siswa menangkap pengertian yang dimaksud. Sementara untuk SMP dan SMA, pola pikir deduktif sudah semakin ditekankan. Contoh-contoh yang disajikan sebelumnya juga menunjukkan pola pikir yang digunakan di sekolah.

3) Semesta pembicaraan

Sesuai dengan tingkat perkembangan intelektual siswa, matematika yang disajikan dalam jenjang pendidikan juga menyesuaikan dalam kekomplekan semestanya; semakin meningkat tahap perkembangan intelektual siswa, semesta matematikanya pun semakin diperluas.

Contoh:

- a) Operasi bilangan bulat pada kurikulum 2004 di SD dibatasi pada operasi penjumlahan dan pengurangan saja. Operasi yang berlaku pada bilangan bulat lainnya, seperti perkalian, pembagian, dan perpangkatan tidak diberikan di SD.
- b) Sehubungan dengan keterbatasan semesta bilangan, di SMP belum diperkenalkan tentang bilangan imajiner atau kompleks. Hal ini juga berimplikasi pada penyelesaian soal matematika yang dibatasi pada himpunan bilangan real.
- c) Di sekolah, bilangan prima dibatasi pengertiannya hanya pada bilangan asli. Siswa belum diperkenalkan pada perluasan semesta

kepada bilangan prima negatif. Begitu pula topik geometri masih dibatasi pada geometri Euclid.

4) Tingkat keabstrakan

Seperti pada poin sebelumnya, tingkat keabstrakan matematika juga harus menyesuaikan dengan tingkat perkembangan intelektual siswa. Di SD, dimungkinkan untuk mengkonkretkan objek-objek matematika agar siswa lebih memahami pelajaran. Namun, semakin tinggi jenjang sekolah, tingkat keabstrakan objek semakin diperjelas.

Contoh:

- a) Dalam pembelajaran fakta mengenai bilangan di SD, siswa tidak langsung diperkenalkan simbol, “1”, “2”, “3”, “4”, ... beserta sifat urutannya, tetapi dimulai dengan menggunakan benda-benda konkret dan menyuguhkan sifat urutan/relasi sebagai sifat “lebih banyak” atau “kurang banyak”.
- b) Dalam membuktikan teorema Pythagoras, siswa tidak langsung diarahkan pada bukti deduktif yang bersifat abstrak/formal dengan menggunakan lambang-lambang aljabar. Bukti secara geometris akan sangat membantu siswa untuk memahami Teorema Pythagoras dan kebenarannya. Banyak sekali bukti Teorema Pythagoras secara geometri yang cukup menarik dan mudah dimengerti siswa.
- c) Pembelajaran topik irisan bangun ruang semisal kubus atau piramida, maka penggunaan benda konkret yang berbentuk kubus

atau piramida akan sangat membantu siswa memahami bagaimana terjadinya suatu irisan dan sifat-sifat spasial (keruangan)nya.

B. Hakekat Belajar

Belajar dimulai sejak manusia lahir sampai akhir hayat. Pada waktu bayi, seorang bayi menguasai keterampilan-keterampilan yang sederhana, seperti memegang botol dan mengenal orang-orang di sekelilingnya. Ketika menginjak masa anak-anak dan remaja, sejumlah sikap, nilai, dan keterampilan berinteraksi sosial dicapai sebagai kompetensi. Pada saat dewasa, individu diharapkan telah mahir dengan tugas-tugas kerja tertentu dan keterampilan-keterampilan fungsional lainnya, seperti mengendarai mobil, berwiraswasta, dan menjalin kerja sama dengan orang lain.

Kemampuan manusia untuk belajar merupakan karakteristik penting yang membedakan manusia dengan makhluk hidup lainnya. Belajar merupakan aktivitas yang selalu dilakukan sepanjang hayat manusia, bahkan tiada hari tanpa belajar. Dengan demikian, belajar tidak hanya dipahami sebagai aktivitas yang dilakukan oleh pelajar saja. Baik mereka yang sedang belajar di tingkat sekolah dasar, sekolah tingkat pertama, sekolah tingkat atas, perguruan tinggi, maupun mereka yang sedang mengikuti kursus, pelatihan, dan kegiatan pendidikan lainnya. Tapi lebih dari itu, pengertian belajar itu sangat luas dan tidak hanya sebagai kegiatan di bangku sekolah saja.

Belajar merupakan aktivitas yang dilakukan seseorang untuk mendapatkan perubahan dalam dirinya melalui pelatihan-pelatihan atau pengalaman-pengalaman. Seorang ibu yang mengikuti seminar tentang pengaturan uang

keluarga akan mendapatkan pengetahuan tentang bagaimana mengelola uang keluarga yang kemudian memengaruhi caranya mengelola uang keluarga. Sebelum seseorang bias mengendarai sepeda, ia belajar lebih dahulu bagaimana caranya mengendarai sepeda. Dari contoh tersebut, jelaslah bahwa belajar bukan hanya aktivitas yang dilakukan oleh pelajar saja, melainkan juga ibu rumah tangga dan yang lainnya.

Dengan demikian, belajar dapat membawa perubahan bagi si pelaku, baik perubahan pengetahuan, sikap, maupun keterampilan. Dengan perubahan-perubahan tersebut, tentunya si pelaku juga akan membantu dalam memecahkan permasalahan hidup dan bisa menyesuaikan diri dengan lingkungan.

1. Pengertian Belajar

Belajar merupakan kegiatan bagi setiap orang. Pengetahuan, keterampilan, kebiasaan, kegemaran dan sikap seseorang terbentuk, dimodifikasi dan berkembang disebabkan belajar. Karena itu seseorang dikatakan belajar, bila dapat diasumsikan dalam diri orang itu menjadi suatu proses kegiatan yang mengakibatkan suatu perubahan tingkah laku. Perubahan tingkah laku itu memang dapat diamati dan berlaku dalam waktu relatif lama. Perubahan tingkah laku yang berlaku dalam waktu relatif lama itu disertai usaha orang tersebut, sehingga orang itu dari tidak mampu mengerjakan sesuatu menjadi mampu mengerjakannya. Tanpa usaha, walaupun terjadi perubahan tingkah laku, bukanlah belajar. Kegiatan dan usaha untuk mencapai perubahan tingkah laku itu merupakan proses belajar sedang perubahan tingkah laku itu sendiri merupakan hasil belajar. Misalnya, setelah belajar matematika

seorang siswa mampu mendemonstrasikan pengetahuan dan keterampilan matematikanya dimana sebelumnya ia tidak dapat melakukannya.

Pemaparan diatas mendapat dukungan dari para tokoh pendidikan. Seperti Hilgard dan Bower yang mengartikan belajar (*to learn*): 1) to gain knowledge, comprehension, or mastery of trough experience or study; 2) to fix in the mind or memory memorize; 3) to acquire trough experience; 4) to become in forme of to find out.⁶⁵ Belajar memiliki pengertian memperoleh pengetahuan atau menguasai pengetahuan melalui pengalaman, mengingat, menguasai pengalaman, dan mendapatkan informasi atau menemukan. Dengan demikian, belajar memiliki arti dasar adanya aktivitas atau kegiatan dan penguasaan tentang sesuatu.

Chaplin menerangkan bahwa perubahan tingkah laku dalam belajar terdiri dari dua macam rumusan. Rumusan pertama berbunyi: “... *acquisition of any relatively permanent change in behavior as a result of practice and experience*” (Belajar adalah perolehan perubahan tingkah laku yang relatif menetap sebagai akibat latihan dan pengalaman). Rumusan keduanya adalah “*process of acquiring responses as a result of special practice*” (Belajar ialah proses memperoleh respons-respons sebagai akibat adanya latihan khusus).⁶⁶ Pernyataan Chaplin ini senada dengan apa yang dikemukakan oleh Soekamto dan Winataputra yang menyatakan bahwa belajar merupakan proses yang dapat menyebabkan perubahan tingkah laku disebabkan adanya reaksi terhadap suatu situasi tertentu atau adanya proses internal yang terjadi di dalam diri seseorang.

⁶⁵Baharuddin dan Esa Nur Wahyuni, *Teori Belajar & Pembelajaran*, (Jogjakarta: Ar-Ruzz Media, 2007), hal. 13

⁶⁶Muhibbin Syah, *Psikologi Belajar*, (Jakarta: PT RajaGrafindo Persada, 2006), hal. 65

Perubahan ini tidak terjadi karena adanya warisan genetik atau respons secara alamiah, kedewasaan, atau keadaan organisme yang bersifat temporer, seperti kelelahan, pengaruh obat-obatan, rasa takut, dan sebagainya. Melainkan perubahan dalam pemahaman, perilaku, persepsi, motivasi, atau gabungan dari semuanya.⁶⁷

Dalyono dalam bukunya Psikologi Pendidikan mengemukakan ada beberapa elemen penting yang mencirikan pengertian tentang belajar, yaitu bahwa:⁶⁸

- a. Belajar merupakan suatu perubahan dalam tingkah laku, dimana perubahan itu dapat mengarah kepada tingkah laku yang lebih baik, tetapi juga ada kemungkinan mengarah kepada tingkah laku yang lebih buruk. Perubahan tingkah laku tersebut biasanya tergantung bagaimana interaksi yang terjadi dari individu dengan lingkungannya. Hal ini senada dengan Oemar Hamalik yang menyatakan “belajar adalah suatu proses perubahan tingkah laku individu melalui interaksi dengan lingkungannya”.⁶⁹
- b. Belajar merupakan suatu perubahan yang terjadi melalui latihan atau pengalaman. Sesuai dengan pengungkapan Nana Sudjana bahwa, “belajar adalah proses perubahan tingkah laku berkat adanya pengalaman”.⁷⁰ Dalam hal ini perubahan-perubahan yang disebabkan oleh pertumbuhan atau kematangan tidak dianggap sebagai hasil belajar; seperti perubahan-perubahan yang terjadi pada diri seorang bayi.

⁶⁷ Baharuddin dan Esa Nur Wahyuni, *Teori Belajar & Pembelajaran...*, hal. 14

⁶⁸ M. Dalyono, *Psikologi Pendidikan*, (Jakarta: Rineka Cipta, 2007), hal. 212-213

⁶⁹ Oemar Hamalik, *Proses Belajar Mengajar*, (Jakarta: Bumi Aksara, 2001), hal. 28

⁷⁰ Nana Sudjana, *Cara Belajar Siswa Aktif dalam Proses Belajar Mengajar*, (Bandung: Sinar Baru Algesindo, 1989), hal. 5

- c. Untuk dapat disebut belajar, maka perubahan itu harus relatif mantap; harus merupakan akhir dari suatu periode waktu yang cukup panjang. Berapa lama periode waktu itu berlangsung sulit ditentukan dengan pasti, tetapi perubahan itu hendaknya merupakan akhir dari suatu periode yang mungkin berlangsung sehari-hari, berbulan-bulan ataupun bertahun-tahun. Ini berarti kita harus mengenyampingkan perubahan-perubahan tingkah laku yang disebabkan oleh motivasi, kelelahan, adaptasi, ketajaman perhatian atau kepekaan seseorang, yang biasanya hanya berlangsung sementara.
- d. Tingkah laku yang mengalami perubahan karena belajar menyangkut berbagai aspek kepribadian, baik fisik maupun psikis, seperti: perubahan dalam pengertian, pemecahan suatu masalah/berpikir, keterampilan, kecakapan, kebiasaan, ataupun sikap. Lester D. Crow dan Alice Crow pernah mengungkapkan bahwa belajar adalah perbuatan untuk memperoleh kebiasaan, ilmu pengetahuan dan berbagai sikap.⁷¹

Berbeda halnya dengan Bruner yang tidak mengungkapkan definisi belajar secara sistematis, yang penting baginya inti dari belajar adalah cara-cara bagaimana manusia memilih, mempertahankan, mentransformasikan informasi secara efektif. Karena Bruner memandang manusia sebagai pemroses, pemikir, dan pencipta informasi.⁷²

⁷¹ Lester D Crow dan Alice Crow, *Psikologi Pendidikan*, (Surabaya: Bina Ilmu, 1984), hal. 321

⁷² Syaiful Sagala, *Konsep dan Makna Pembelajaran: Untuk Membantu Memecahkan Problematika Belajar dan Mengajar*, (Bandung: CIV Alfabeta, 2005), hal. 34-35

2. Ciri-Ciri Belajar

Dari pendapat beberapa ahli tentang definisi belajar, Bahruddin dan Esa Nur Wahyuni menyimpulkan ada beberapa ciri belajar, yaitu:

- a. Belajar ditandai dengan adanya perubahan tingkah laku (*change behavior*). Ini berarti, bahwa hasil dari belajar hanya dapat diamati dari tingkah laku, yaitu adanya perubahan tingkah laku, dari tidak tahu menjadi tahu, dari tidak terampil menjadi terampil. Tanpa mengamati tingkah laku hasil belajar, maka tidak akan dapat mengetahui ada tidaknya hasil belajar;
- b. Perubahan perilaku relative permanent. Ini berarti, bahwa perubahan tingkah laku yang terjadi karena belajar untuk waktu tertentu akan tetap atau tidak berubah-ubah. Tetapi perubahan tingkah laku tersebut tidak akan terpancang seumur hidup;
- c. Perubahan tingkah laku tidak harus segera dapat diamati pada saat proses belajar sedang berlangsung, perubahan perilaku tersebut bersifat potensial;
- d. Perubahan tingkah laku merupakan hasil latihan atau pengalaman;
- e. Pengalaman atau latihan itu dapat member penguatan. Sesuatu yang memperkuat itu akan memberikan semangat atau dorongan untuk mengubah tingkah laku.⁷³

Senada dengan pernyataan Ngalim Purwanto, bahwa ada beberapa elemen penting yang mencirikan pengertian tentang belajar, antara lain:

⁷³ Baharuddin dan Esa Nur Wahyuni, *Teori Belajar & Pembelajaran...*, hal. 15-16

- a. Belajar merupakan suatu perubahan dalam tingkah laku, dimana perubahan itu dapat mengarah kepada tingkah laku yang lebih baik, tetapi juga ada kemungkinan mengarah kepada tingkah laku yang lebih buruk.
- b. Belajar merupakan suatu perubahan yang terjadi melalui latihan atau pengalaman; dalam arti perubahan-perubahan yang disebabkan oleh pertumbuhan atau kematangan tidak dianggap sebagai hasil belajar; seperti perubahan-perubahan yang terjadi pada seorang bayi.
- c. Untuk dapat disebut belajar, maka perubahan itu harus relatif mantap; harus merupakan akhir daripada suatu periode waktu yang cukup panjang. Berapa lama periode waktu itu berlangsung sulit ditentukan dengan pasti, tetapi perubahan itu hendaknya merupakan akhir dari suatu periode yang mungkin berlangsung sehari-hari, berbulan-bulan ataupun bertahun-tahun. Ini berarti kita harus mengenyampingkan perubahan-perubahan tingkah laku yang disebabkan oleh motivasi, kelelahan adaptasi, ketajaman perhatian atau kepekaan seseorang, yang biasanya hanya berlangsung sementara.
- d. Tingkah laku yang mengalami perubahan karena belajar menyangkut berbagai aspek kepribadian, baik fisik maupun psikis, seperti: perubahan dalam pengertian, pemecahan suatu masalah/berpikir, keterampilan, kecakapan, kebiasaan, ataupun sikap.⁷⁴

Sedangkan Noehi Nasution mengungkapkan bahwa ciri-ciri kegiatan belajar dapat diidentifikasi sebagai berikut:

⁷⁴ M. Ngalim Purwanto, *Psikologi Pendidikan*, (Bandung: PT Remaja Rosdakarya, 2004), hal. 85

- a. Belajar adalah aktivitas yang menghasilkan perubahan pada diri individu yang belajar, baik aktual maupun potensial.
- b. Perubahan itu pada dasarnya berupa didapatkannya kemampuan baru, yang berlaku dalam waktu yang relatif lama.
- c. Perubahan itu terjadi karena usaha.⁷⁵

Berkaitan dengan konsep belajar, pentingnya berusaha demi tercapainya perubahan juga diajarkan dalam islam, seperti yang terdapat dalam Al-Qur'an Surat Ar-Ra'du [13] ayat 11.

لَهُ مُعَقَّبَاتٌ مِنْ بَيْنِ يَدَيْهِ وَمِنْ خَلْفِهِ يَحْفَظُونَهُ مِنْ أَمْرِ اللَّهِ
 إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّى يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ وَإِذَا أَرَادَ اللَّهُ
 بِقَوْمٍ سُوءًا فَلَا مَرَدَّ لَهُ وَمَا لَهُمْ مِنْ دُونِهِ مِنْ وَالٍ ○

Artinya:

Bagi manusia ada malaikat-malaikat yang selalu mengikutinya bergiliran, di muka dan di belakangnya, mereka menjaganya atas perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidak merubah Keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri. dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap sesuatu kaum, Maka tak ada yang dapat menolaknya; dan sekali-kali tak ada pelindung bagi mereka selain Dia.⁷⁶

Dalam ayat diatas terlihat jelas bahwa jika ditarik pada konsep belajar sangat penting adanya suatu usaha sehingga mendorong terhadap perubahan. Perubahan yang dimaksud adalah perubahan tingkah laku. Jika seseorang

⁷⁵ Noehi Nasutiaon, *Materi Pokok Psikologi Pendidikan*, (Jakarta: Ditjen Pembinaan Kelembagaan Agama Islam, Departemen Agama, 1991), hal. 3

⁷⁶ Departemen Agama RI, *Al-Qur'an dan Terjemahnya*, (Semarang: CV Asy-Syifa', 1993), hal.226

menginginkan perubahan dalam dirinya maka seseorang itu haruslah berusaha, dan aktivitas berusaha inilah yang dimaksud dengan belajar.

3. Prinsip-Prinsip Belajar

Prinsip belajar adalah konsep-konsep yang harus diterapkan di dalam proses belajar mengajar. Seorang guru akan dapat melaksanakan tugasnya dengan baik apabila ia dapat menerapkan cara mengajar sesuai dengan prinsip-prinsip belajar.⁷⁷

Menurut Soekamto dan Winataputra ada beberapa prinsip dalam belajar, yaitu:

- a. Apapun yang dipelajari siswa, dialah yang harus belajar, bukan orang lain. Untuk itu, siswalah yang harus bertindak aktif.
- b. Setiap siswa belajar sesuai dengan tingkat kemampuannya.
- c. Siswa akan dapat belajar dengan baik bila mendapat penguatan langsung pada setiap langkah yang dilakukan selama proses belajar.
- d. Penguasaan yang sempurna dari setiap langkah yang dilakukan siswa akan membuat proses belajar lebih berarti.
- e. Motivasi belajar siswa akan lebih meningkat apabila ia diberi tanggung jawab dan kepercayaan penuh atas belajarnya.⁷⁸

Jerome Bruner menekankan bahwa dalam belajar siswalah yang harus bertindak aktif dan guru hendaknya memberikan situasi masalah yang menstimulasi siswa untuk menemukan struktur masalah subyek untuk diri

⁷⁷ Sofa, *Prinsip-prinsip Belajar*, dalam <http://massofa.wordpress.com/2012/01/30/prinsip-prinsip-belajar/>, diakses tanggal 2 Agustus 2013

⁷⁸ Baharuddin dan Esa Nur Wahyuni, *Teori Belajar & Pembelajaran...*, hal. 16

mereka sendiri.⁷⁹ Ketika siswa benar-benar memahami struktur dasar, maka mereka akan mampu untuk mengungkapkan banyak ide-ide dari pengertian mereka sendiri.

Memang dalam belajar, siswa harus disesuaikan dengan tingkat kemampuannya. Guru perlu memahami dan menghayati kemampuan siswa. Nabi Isa berkata “*Janganlah kalian mengalungkan berlian di leher babi hutan*”.⁸⁰ Dari sini dapat diambil kesimpulan bahwa, mengajar yang tidak memperhatikan batas kemampuan siswa pada hakekatnya apa yang diajarkan itu tidak akan diterima oleh siswa. Akibatnya diajar atau tidak sedikit sekali perbedaannya.

Menurut Piaget belajar harus disesuaikan dengan tahap perkembangan kognitif yang dilalui siswa, yang dalam hal ini Piaget membaginya menjadi empat tahap, yaitu tahap sensori motor (ketika anak berumur 1,5 sampai 2 tahun), tahap pra-operasional (2/3 sampai 7/8 tahun), tahap operasional konkret (7/8 sampai 12/14 tahun), dan tahap operasional formal (14 tahun atau lebih).⁸¹ Dengan adanya tahapan ini diharapkan guru dalam mengajar memberikan materi pelajar sesuai dengan kemampuannya atau porsinya. Misalnya, mengajarkan konsep-konsep abstrak tentang operasi bilangan bulat kepada siswa kelas dua SD, tanpa adanya usaha untuk mengkonkretkan konsep-konsep

⁷⁹ Anita E. Woolfolk & Lorraine McCune-Nicolich, *Mengembangkan Kepribadian & Kecerdasan (Psikologi Pembelajaran I)*, (Jakarta: Inisiasi Press, 2004), hal. 309

⁸⁰ Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan Malang, *Wahana Pendidikan Dasar*, (Blitar: PGSD FIP IKIP Malang, edisi 2 Juli 1993), hal. 71

⁸¹ Prasetya Irawan, dkk., *Teori Belajar, Motivasi, dan Keterampilan Mengajar*, (Jakarta: PAU-PPAI, 1996), hal. 9

tersebut. Tidak hanya percuma, tetapi justru akan lebih membingungkan para siswa itu.

4. Arti Penting Belajar

Belajar adalah *key term* (istilah kunci) yang paling vital dalam setiap usaha pendidikan, sehingga tanpa belajar sesungguhnya tak pernah ada pendidikan. Belajar adalah kegiatan yang berproses dan merupakan unsur yang sangat fundamental dalam penyelenggaraan setiap jenis dan jenjang pendidikan. Ini berarti, bahwa berhasil atau gagalnya pencapaian tujuan pendidikan itu amat tergantung pada proses belajar yang dialami siswa baik ketika ia berada di sekolah maupun lingkungan rumah atau keluarganya sendiri.

Agama islam sangat menganjurkan kepada manusia untuk selalu belajar. Bahkan, islam mewajibkan kepada setiap orang yang beriman untuk belajar. Perlu diketahui bahwa setiap apa yang diperintahkan Allah untuk dikerjakan, pasti dibalikinya terkandung hikmah atau sesuatu yang penting bagi manusia. Demikian juga dengan perintah untuk belajar. Beberapa hal penting yang berkaitan dengan belajar, antara lain adalah:⁸²

- a. Bahwa orang yang belajar akan dapat memiliki ilmu pengetahuan yang akan berguna untuk memecahkan masalah-masalah yang dihadapi oleh manusia dalam kehidupan. Sehingga dengan ilmu pengetahuan yang didupakannya itu manusia akan dapat mempertahankan kehidupan. Dengan demikian, orang yang tidak pernah belajar mungkin tidak akan memiliki ilmu

⁸² Baharuddin dan Esa Nur Wahyuni, *Teori Belajar & Pembelajaran...*, hal. 32-34

pengetahuan atau mungkin ilmu pengetahuan yang dimilikinya sangat terbatas, sehingga ia akan kesulitan ketika harus memecahkan persoalan-persoalan kehidupan yang dihadapinya. Karena itu, kita diajak oleh Allah untuk merenungkan, mengamati, dan membandingkan antara orang-orang yang mengetahui dan yang tidak, sebagaimana firman Allah (QS Al-Zumar [39]: 9) berikut.

أَمَّنْ هُوَ قَانِتٌ آنَاءَ اللَّيْلِ سَاجِدًا وَقَائِمًا يَحْذَرُ الْآخِرَةَ وَيَرْجُو
رَحْمَةَ رَبِّهِ قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ إِنَّمَا
يَتَذَكَّرُ أُولُو الْأَلْبَابِ ○

Artinya:

(Apakah kamu Hai orang musyrik yang lebih beruntung) ataukah orang yang beribadat di waktu-waktu malam dengan sujud dan berdiri, sedang ia takut kepada (azab) akhirat dan mengharapkan rahmat Tuhannya? Katakanlah: "Adakah sama orang-orang yang mengetahui dengan orang-orang yang tidak mengetahui?" Sesungguhnya orang yang berakallah yang dapat menerima pelajaran.⁸³

- b. Allah melarang manusia untuk tidak mengetahui segala sesuatu yang manusia lakukan. Apa pun yang dilakukan, manusia harus mengetahui kenapa mereka melakukannya. Dengan belajar manusia dapat mengetahui apa yang dilakukan dan memahami tujuan dari segala perbuatannya. Selain itu, dengan belajar pula manusia akan memiliki ilmu pengetahuan dan terhindar dari taqlid buta (meniru tanpa dasar yang jelas), karena setiap apa

⁸³ Departemen Agama RI, *Al-Qur'an dan Terjemahnya*, (Semarang: CV Asy-Syifa', 1993), hal.415

yang kita perbuat akan dimintai pertanggung jawaban oleh Allah (QS Al-Isra' [17]: 36):

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِ عِلْمٌ إِنَّ السَّمْعَ وَالْبَصَرَ وَالْفُؤَادَ كُلُّ
أُولَئِكَ كَانَ عَنْهُ مَسْئُولًا ○

Artinya:

*Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggung jawabnya.*⁸⁴

Aktivitas mengetahui adalah hasil dari belajar. Hanya orang-orang yang belajarlah yang mampu memahami (QS Al-‘Ankabut [29]: 43):

○ وَتِلْكَ الْأَمْثَالُ نَضْرِبُهَا لِلنَّاسِ وَمَا يَعْقِلُهَا إِلَّا الْعَالِمُونَ

Artinya:

*Dan perumpamaan-perumpamaan ini Kami buat untuk manusia; dan tiada yang memahaminya kecuali orang-orang yang berilmu.*⁸⁵

Dan hanya orang-orang yang berilmulah yang takut kepada Allah (QS Fathir [35]: 28):

وَمِنَ النَّاسِ وَالْدَّوَابِّ وَالْأَنْعَامِ مُخْتَلِفٌ أَلْوَانُهُ كَذَلِكَ إِنَّمَا يَخْشَى
اللَّهَ مِنْ عِبَادِهِ الْعُلَمَاءُ إِنَّ اللَّهَ عَزِيزٌ غَفُورٌ ○

Artinya:

Dan demikian (pula) di antara manusia, binatang-binatang melata dan binatang-binatang ternak ada yang bermacam-macam warnanya (dan jenisnya). Sesungguhnya yang takut kepada Allah di antara hamba-hamba-

⁸⁴ Ibid. hal.258

⁸⁵ Ibid. hal.362

Nya, hanyalah ulama. Sesungguhnya Allah Maha Perkasa lagi Maha Pengampun.⁸⁶

- c. Dengan ilmu yang dimiliki manusia melalui proses belajar, maka Allah akan memberikan derajat yang lebih tinggi kepada hambanya (QS Mujadalah [58]: 11):

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَافْسَحُوا
يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ انشُرُوا فَانشُرُوا يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ
وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ۝

Artinya

Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan.⁸⁷

Ilmu dalam hal ini bukan hanya pengetahuan tentang agama saja, tetapi juga ilmu non-agama yang relevan dengan tuntutan kemajuan zaman. Selain itu, ilmu tersebut juga harus bermanfaat bagi kehidupan orang banyak dan diri orang yang menuntut ilmu.

C. Teori Belajar Bruner

Bruner yang memiliki nama lengkap Jerome S Bruner adalah seorang ahli psikologi dari Universitas Harvard, Amerika Serikat, telah memelopori aliran psikologi kognitif yang memberi dorongan agar pendidikan memberikan perhatian pada pentingnya pengembangan berfikir. Bruner banyak memberikan pandangan

⁸⁶ Ibid. hal.395

⁸⁷ Ibid. hal.490

mengenai perkembangan kognitif manusia, bagaimana manusia belajar, atau memperoleh pengetahuan dan mentransformasi pengetahuan. Dasar pemikiran teorinya memandang bahwa manusia sebagai pemroses, pemikir dan pencipta informasi. Bruner menyatakan belajar merupakan suatu proses aktif yang memungkinkan manusia untuk menemukan hal-hal baru di luar informasi yang diberikan kepada dirinya.⁸⁸

Menurut Bruner, ada tiga proses kognitif yang terjadi dalam belajar, yakni 1) proses perolehan informasi baru (informasi), 2) proses mentransformasikan informasi yang diterima (transformasi), 3) menguji relevansi dan ketepatan pengetahuan (evaluasi).⁸⁹ Perolehan informasi baru dapat terjadi melalui kegiatan membaca, mendengarkan penjelasan guru mengenai materi yang diajarkan atau mendengarkan audiovisual dan lain-lain. Proses transformasi pengetahuan merupakan suatu proses bagaimana kita memperlakukan pengetahuan yang sudah diterima agar sesuai dengan kebutuhan. Informasi yang diterima dianalisis, diproses atau diubah menjadi konsep yang lebih abstrak agar suatu saat dapat dimanfaatkan.

Bruner berpendapat bahwa belajar matematika adalah belajar tentang konsep-konsep dan struktur-struktur matematika yang terdapat di dalam materi yang dipelajari serta mencari hubungan-hubungan antara konsep-konsep dan struktur-struktur matematika itu.⁹⁰ Pemahaman terhadap konsep dan struktur sesuatu materi itu dipahami secara lebih komprehensif. Lain dari itu peserta didik

⁸⁸ Nely Machmud, *Perbandingan Teori Bruner dan Teori Belajar Gagne*, <http://www.manmodelgorontalo.com>, (diakses tanggal 2 Agustus 2013)

⁸⁹ S. Nasution, *Berbagai Pendekatan dalam Proses Belajar dan Mengajar*, (Jakarta: Bumi Aksara, 1997), hal. 9

⁹⁰ Herman Hudojo, *Strategi mengajar Belajar Matematika...*, hal. 48

lebih mudah mengingat materi itu bila yang dipelajari itu merupakan pola yang terstruktur. Dengan memahami konsep dan struktur akan mempermudah terjadinya internalisasi pengetahuan (transfer informasi) ke dalam jaringan kognitif siswa.

Menurut Bruner, proses internalisasi akan terjadi secara sungguh-sungguh (yang berarti proses belajar secara optimal) jika suatu pengetahuan dipelajari melalui tiga tahapan, (1) Tahap Enaktif atau Tahap Kegiatan (*Enactive*), (2) Tahap Ikonik atau Tahap Gambar Bayangan (*Iconic*), (3) Tahap Simbolik (*Symbolic*).⁹¹

1. Tahap Enaktif atau Tahap Kegiatan (*Enactive*)

Tahap pertama anak belajar konsep adalah berhubungan dengan benda-benda real atau mengalami peristiwa di dunia sekitarnya secara langsung. Pada tahap ini anak masih dalam gerak reflex dan coba-coba, belum harmonis. Ia memanipulasikan, menyusun, menjejerkan, mengutak-atik, dan bentuk-bentuk gerak lainnya. Di dalam belajarnya, siswa pada tahap ini menggunakan atau memanipulasi obyek-obyek konkret secara langsung.

2. Tahap Ikonik atau Tahap Gambar Bayangan (*Iconic*)

Pada tahap ini, anak telah mengubah, menandai, dan menyimpan peristiwa atau benda dalam bentuk bayangan mental. Dengan kata lain anak dapat membayangkan kembali atau memberikan gambaran dalam pikirannya tentang benda atau peristiwa yang dialami atau dikenalnya pada tahap enaktif, walaupun peristiwa itu berlalu atau benda real itu tidak lagi berada di hadapannya. Maksudnya, dalam belajar siswa tidak lagi secara langsung

⁹¹ E.T. Ruseffendi, *Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*, (Bandung: Tarsito, 1988), hal. 150-151

memanipulasi obyek seperti pada tahap enaktif, melainkan sudah dapat memanipulasi dengan menggunakan gambar dari obyek.

3. Tahap Simbolik (*Symbolic*)

Pada tahap terakhir ini anak dapat mengutarakan bayangan mental tersebut dalam bentuk simbol dan bahasa. Apabila ia berjumpa dengan suatu simbol, maka bayangan mental yang di tandai oleh simbol itu akan dapat dikenalnya kembali. Pada tahap ini anak sudah mampu memahami simbol-simbol dan menjelaskan dengan bahasanya. Dalam belajar, pada tahap ini siswa memanipulasi simbol-simbol secara langsung dan tidak lagi ada kaitannya dengan obyek-obyek konkret maupun gambar.

Ketiga tahapan belajar di atas memperjelas bahwa untuk memudahkan pemahaman dan keberhasilan anak dalam pembelajaran matematika, haruslah pembelajaran tersebut dilakukan secara bertahap. Sebenarnya ketiga tahapan belajar dari Bruner ini sudah sejak lama diterapkan dalam pembelajaran matematika di Sekolah Dasar, misalnya seperti berikut ini.

1. Tahap Enaktif. Setiap kita melakukan pembelajaran tentang konsep, fakta atau prosedur dalam matematika yang bersifat abstrak biasanya diawali dari persoalan sehari-hari yang sederhana (peristiwa di dunia sekitarnya), atau menggunakan benda-benda real/nyata/fisik (model konkret).
2. Tahap Ikonik. Setelah memanipulasi benda secara nyata melalui persoalan keseharian dari dunia sekitarnya, dilanjutkan dengan membentuk modelnya sebagai bayangan mental dari benda atau peristiwa keseharian tersebut.

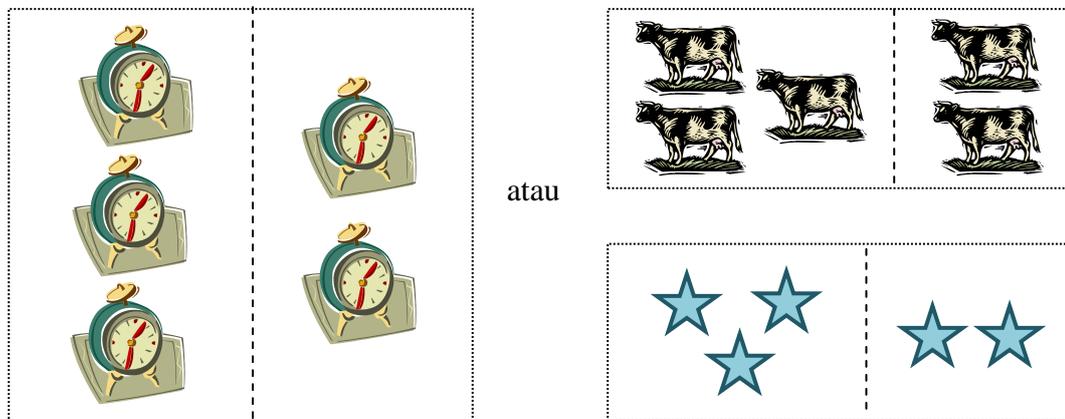
Model (model matematika) disini berupa gambaran dari bayangan (model semi konkret atau model semi abstrak).

3. Tahap Simbolik. Pada tahap ini menggunakan simbol-simbol (lambang-lambang) yang bersifat abstrak sebagai wujud dari bahasa matematika (model abstrak).

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh pembelajaran matematika di Sekolah Dasar yang melalui tiga tahapan tersebut di atas. Misalnya dalam pengerjaan penjumlahan bilangan cacah pada siswa Sekolah Dasar kelas 1 semester 1.

Tahap 1, dimulai dari model konkret, yaitu menggunakan benda-benda nyata dalam hal ini “jam” seperti berikut: “Farid mempunyai 3 jam, diberi lagi 2 jam oleh Kakaknya, berapa banyaknya jam Farid sekarang?”

Tahap 2, yang merupakan tahap berikutnya dibuatkan modelnya, yaitu model semi konkret (model gambar) yang tidak menggunakan benda-benda nyata seperti jam-jam sebenarnya, tetapi cukup dengan gambar jam atau model semi abstrak (model diagram), yang tidak lagi dengan gambar tetapi cukup menggunakan tanda-tanda tertentu seperti sapi atau bintang dan sebagainya.



Gambar 2.2

Tahap 3, bisa digunakan simbol secara abstrak dan mereka akan dapat mengerti arti tiga dan arti dua tanpa bantuan apa-apa. Tahap terakhir ini merupakan wujud dari pembelajaran matematika sebagai bahasa simbol yang padat arti dan bersifat abstrak.

$$3 \text{ jam} + 2 \text{ jam} = \dots \text{ jam}$$

$$3 + 2 = n$$

Bruner dan Kenney telah merumuskan 4 teorema (dalil / kaidah) dalam pembelajaran matematika, yaitu sebagai berikut:⁹²

1. *Teorema Penyusunan (Teorema Konstruksi)*

Menurut teorema penyusunan, bahwa cara yang terbaik memulai belajar suatu konsep matematika, dalil atau aturan dan semacamnya adalah dengan cara menyusun penyajiannya. Bruner percaya adalah baik untuk siswa memulai dengan penyajian konkret, kemudian mencoba untuk menyusunnya sendiri mengenai ide itu, di sini guru sifatnya hanyalah membantu. Dengan cara itu siswa akan lebih mudah mengingat ide yang sudah dipelajari itu dan lebih mampu dalam menerapkan pada suasana lain. Jika guru yang menyusun dan merumuskan sedangkan siswa menerima dalam bentuk jadi, maka cenderung mengurangi motivasi untuk belajar.

Siswa yang mempelajari penjumlahan bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif, akan lebih memahami konsep tersebut jika ia mencoba sendiri menggunakan garis bilangan untuk memperlihatkan konsep penjumlahan tersebut. Misalnya, untuk memahami konsep penjumlahan

⁹² Endyah Murniati, *Kesiapan Belajar Matematika di Sekolah Dasar...*, hal. 23-26

tersebut kita tentukan $4 + (-3) = \dots$. Siswa diminta untuk mencobanya sendiri bahwa pada garis bilangan mulai dari titik 0 bergeser ke kanan sejauh 4 satuan, dilanjutkan dengan bergeser ke kiri sejauh 3 satuan dan berakhir di titik -1. Dengan mencoba menjumlahkan untuk berbagai bilangan bulat positif dengan bilangan bulat negatif lainnya siswa dapat diharapkan betul-betul memahami konsep tersebut.

2. *Teorema Notasi*

Teorema Notasi menyatakan bahwa dalam pengajaran suatu konsep, penggunaan notasi-notasi matematika harus diberikan secara bertahap, dimulai dari yang sederhana yang secara kognitif dapat lebih dipahami oleh para siswa sampai kepada yang makin kompleks notasinya.

Implikasi teorema ini pada pembelajaran konsep operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat misalnya, pada tahap awal operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat dengan pendekatan garis bilangan menggunakan kesepakatan “*maju*” untuk bilangan positif, “*mundur*” untuk bilangan negatif, “*terus melangkah berikutnya*” untuk operasi penjumlahan dan “*balik kanan*” untuk operasi pengurangan. Maka pada tahap selanjutnya siswa cukup menggunakan notasi matematika (simbolik), misalnya “5” untuk bilangan positif lima, “-5” untuk bilangan negatif lima, “+” untuk operasi penjumlahan dan “-” untuk operasi pengurangan.

Urutan pembelajaran matematika tentang penggunaan notasi ini merupakan gambaran pendekatan spiral yang merupakan konsekuensi dari teorema Bruner ini. Pada dasarnya pembelajaran dengan pendekatan spiral

cara memperkenalkan suatu konsep matematika dengan secara intuisi dengan menggunakan notasi yang telah dikenal dan konkret. Kemudian bulan demi bulan, tahun demi tahun, waktu demi waktu, sesudah siswa matang secara intelektual, konsep yang sama diajarkan lagi pada tingkat abstraksi yang lebih tinggi dengan menggunakan notasi yang kurang dikenal, yang lebih abstrak untuk pengembangan pembelajaran matematika.

3. *Teorema Pengkontrasan Keanekaragaman (Teorema Kontras dan Variasi)*

Teorema ini menyatakan bahwa prosedur belajar gagasan-gagasan matematika yang berjalan dari konkret ke abstrak harus disertakan pengkontrasan dan variasinya. Pengkontrasan dan variasi sangat penting dalam melakukan perubahan dari konsep konkret ke konsep yang lebih abstrak, diperlukan contoh-contoh yang banyak sehingga siswa mampu mengetahui karakteristik konsep tersebut. Contoh yang diberikan harus sesuai dengan rumusan atau teorema konsep itu, tetapi perlu juga diberikan contoh yang tidak memenuhi rumusan dengan harapan agar siswa tidak mengalami salah pengertian terhadap konsep yang sedang dipelajarinya.

Implikasi teorema ini pada pembelajaran konsep operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat, misalnya pengajaran materi operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat dengan pendekatan garis bilangan dibuatkan alat peraganya (garis bilangan terbuat dari kertas karton dan mainan kuda terbuat dari gabus). Dimana mainan kuda akan mengkontraskan lambang (simbol) bilangan positif dan negatif dengan langkah “*maju*” dan “*mundur*”nya, sedangkan konsep penjumlahan dan

pengurangan dengan langkah mainan kuda yang “*terus melangkah berikutnya*” dan “*berbalik kanan*”. Sehingga teorema ini pada implikasinya memberikan suatu pengertian yang berbeda tentang konsep simbol “+ dan -“, yaitu bisa berarti lambang bilangan positif dan negatif serta bisa berarti sebuah operasi hitung penjumlahan dan pengurangan.

Sedangkan untuk variasinya bisa diimplementasikan dengan mengganti mainan kuda dengan mainan lainnya seperti mobil-mobilan, atau bahkan individu siswa tersebut langsung sebagai model atau peraga menggantikan mainan kuda, yang tentunya peraga garis bilangan dari kertas karton bisa diganti gambar garis bilangan di lantai kelas.

4. *Teorema Pengaitan (Teorema Konektivitas)*

Menurut teorema ini bahwa setiap konsep, struktur, dan keterampilan dihubungkan dengan konsep, struktur, dan keterampilan yang lain. Hal ini penting dalam belajar matematika, karena materi yang satu mungkin merupakan prasyarat bagi yang lainnya, atau suatu konsep tertentu diperlukan untuk menjelaskan konsep yang lainnya.

Salah satu implikasi teorema ini pada pembelajaran konsep operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat, misalnya untuk menentukan hasil operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat (tahap simbolik) perlu dikaitkan dengan konsep sifat-sifat operasi hitung bilangan bulat. Sehingga nantinya siswa akan menemukan sebuah kesamaan dalam konsep operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat,

misalkan $3 - (-6) = 3 + 6$ sebab keduanya hasilnya sama yaitu (9), dan $3 + (-6) = 3 - 6$ sebab keduanya hasilnya sama yaitu (-3).

Pada penelitian ini akan diimplementasikan konsep pembelajaran Bruner pada materi operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat, yang mana akan disajikan melalui 3 tahap yaitu enaktif, ikonik, dan simbolik. Melalui 3 tahap penyajian tersebut secara tidak langsung 4 teorema pembelajaran matematika di atas akan dialami siswa, sehingga siswa akan terarahkan untuk memperoleh pengetahuan konseptual dan pengetahuan prosedural. Dengan demikian siswa akan memiliki pemahaman yang baik tentang konsep yang dipelajarinya.

D. Belajar Matematika dengan Pemahaman

Matematika merupakan suatu ilmu yang berhubungan dengan penelaahan bentuk-bentuk atau struktur-struktur yang abstrak dan hubungan di antara hal-hal itu. Untuk dapat memahami struktur serta hubungan-hubungannya diperlukan penguasaan tentang konsep-konsep yang terdapat dalam matematika. Sehingga belajar matematika adalah belajar konsep dan struktur yang terdapat dalam bahan-bahan yang sedang dipelajari, serta mencari hubungan di antara konsep dan struktur tersebut.⁹³

Belajar matematika berkenaan dengan ide-ide (gagasan-gagasan), aturan-aturan, dan hubungan-hubungan yang diatur secara logis sehingga pengkajian berkaitan dengan konsep-konsep abstrak.⁹⁴ Sedangkan Jerome Bruner mengatakan

⁹³ Endyah Murniati, *Kesiapan Belajar Matematika di Sekolah Dasar*, (Surabaya: SIC, 2007), hal. 46

⁹⁴ Herman Hudojo, *Pengembangan Kurikulum Matematika dan pelaksanaannya...*, hal.

bahwa belajar matematika adalah belajar tentang konsep-konsep dan struktur-struktur matematika yang terdapat di dalam materi yang dipelajari serta mencari hubungan-hubungan antara konsep-konsep dan struktur-struktur matematika itu.⁹⁵

Karena matematika berkaitan dengan ide-ide, gagasan, aturan dan hubungan yang diatur secara logis, maka seseorang yang belajar matematika harus mencapai pemahaman agar dirasakan manfaatnya dalam kehidupan sehari-hari. Pemahaman merupakan suatu proses pengetahuan atau informasi yang baru diterima oleh seseorang dan dapat dihubungkan dengan pengetahuan yang telah dimiliki atau pada diri orang tersebut. Hiebert dan Carpenter berpendapat bahwa pemahaman merupakan aspek yang fundamental dalam belajar dan setiap pembelajaran matematika seharusnya fokus utamanya adalah bagaimana menanamkan konsep matematika berdasarkan pemahaman.⁹⁶

Hiebert dan Carpenter menyatakan bahwa pemahaman matematika memerlukan suatu proses untuk menempatkan secara tepat informasi atau pengetahuan yang sedang dipelajari ke dalam jaringan internal dari representasi pengetahuan yang sudah dimiliki sebelumnya di dalam struktur kognitif siswa.⁹⁷ Agar proses internalisasi terjadi secara sungguh-sungguh (yang berarti proses belajar secara optimal), dilakukan dengan memperhatikan tahap-tahap enaktif, ikonik dan simbolik.⁹⁸ Misalnya untuk memberikan pemahaman kepada siswa tentang konsep penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat, maka perlu benda konkret (alat peraga garis bilangan dan mainan kuda) pada tahapan enaktif, tahap

⁹⁵ Herman Hudojo, *Strategi mengajar belajar matematika...*, hal. 48

⁹⁶ <http://semfirdauz.wordpress.com/2007/11/14/skrip/>, diakses tanggal 3 Agustus 2013

⁹⁷ <http://abdussakir.wordpress.com>, diakses tanggal 3 Agustus 2013

⁹⁸ Nely Machmud, *Perbandingan Teori Bruner dan Teori Belajar Gagne*, www.manmodelgorontalo.com, diakses tanggal 2 Agustus 2013

ikonik dengan menggunakan gambar atau grafik (alat peraga digambarkan), dan tahap simbolik dengan menggunakan simbol-simbol matematika (tanpa alat peraga maupun gambar). Diantara jenis pengetahuan yang dipelajari dalam matematika meliputi, 1) pengetahuan konseptual, dan 2) pengetahuan prosedural. Pengetahuan konseptual mengacu pada pemahaman, sedangkan pengetahuan prosedural mengacu pada keterampilan melakukan sesuatu prosedur pengajaran.⁹⁹

Hiebert dan Lavefer mendefinisikan pengetahuan konseptual sebagai pengetahuan yang kaya hubungan-hubungan. Hubungan tersebut mencakup proposisi dan fakta yang terkait dalam satu jaringan. Dengan demikian pengetahuan konseptual adalah pengetahuan yang dibentuk oleh hubungan informasi diskrit yang meliputi proposisi dan fakta sehingga semua informasi terkait dalam satu jaringan. Sedangkan pengetahuan prosedural terdiri dari pengetahuan (1) sistem simbol formal dari matematika, (2) aturan-aturan, algoritma, atau prosedur yang digunakan untuk memecahkan masalah-masalah (tugas-tugas) matematika. Ini berarti bahwa pengetahuan prosedural adalah pengetahuan tentang urutan kaidah-kaidah, algoritma-algoritma atau prosedur-prosedur yang digunakan untuk menyelesaikan soal-soal matematika dengan menggunakan sistem simbol matematika.¹⁰⁰

Hubungan antara pengetahuan konseptual dan pengetahuan prosedural sangat penting. Untuk itu kedua macam pengetahuan tersebut perlu dikuasai oleh anak SD, karena pengetahuan konseptual mengacu pada penanaman konsep, sedangkan pengetahuan prosedural mengacu pada keterampilan melakukan suatu

⁹⁹ <http://waraskamdi.com>, diakses tanggal 3 Agustus 2013

¹⁰⁰ <http://www.infoskripsi.com>, diakses tanggal 3 Agustus 2013

algoritma atau prosedur menyelesaikan soal-soal matematika. Menurut Sutawidjaja, memahami konsep saja tidak cukup, karena dalam praktek kehidupan sehari-hari siswa memerlukan keterampilan matematika, sedangkan dengan menguasai keterampilannya saja, siswa tidak mungkin memahami konsepnya.¹⁰¹ Oleh sebab itu tugas guru yang sangat utama adalah menanamkan konsep terlebih dahulu kemudian melatih keterampilannya.

Pengajaran yang menekankan kepada pemahaman mempunyai sedikitnya lima keuntungan:

1. Pemahaman bersifat generatif, artinya bila seseorang telah memahami suatu konsep, maka pengetahuan itu akan mengakibatkan pemahaman yang lain karena adanya jalinan antar pengetahuan yang dimiliki siswa. Pemahaman menyebabkan setiap penemuan atau pengetahuan baru senantiasa dikaitkan dengan pengetahuan yang sudah ada sebelumnya.
2. Pemahaman memacu ingatan, artinya suatu pengetahuan yang telah dipahami dengan baik akan diatur dan dihubungkan secara efektif dengan pengetahuan-pengetahuan yang lain sehingga menjadi lebih mudah diingat. Pengorganisasian skema atau pengetahuan secara lebih efisien di dalam struktur kognitif membantu seseorang untuk dapat mengingat lebih baik pengetahuan yang sudah dipahaminya.
3. Pemahaman mengurangi banyaknya hal yang harus diingat, artinya jalinan yang terbentuk antara pengetahuan yang satu dengan yang lain dalam struktur kognitif siswa yang mempelajarinya dengan penuh pemahaman merupakan

¹⁰¹ <http://abdussakir.wordpress.com>, diakses tanggal 3 Agustus 2013

jalinan yang sangat baik. Dengan memahami salah satu dari pengetahuan tersebut, maka segala pengetahuan yang terkait dapat diturunkan dari padanya. Hal ini mengakibatkan siswa tidak perlu menghafalkan semuanya.

4. Pemahaman meningkatkan transfer belajar, artinya pemahaman suatu konsep matematika akan diperoleh oleh siswa yang aktif menemukan keserupaan dari berbagai konteks konsep tersebut. Hal ini akan membantu siswa untuk menganalisis apakah suatu konsep tertentu dapat diterapkan untuk suatu kondisi tertentu.
5. Pemahaman mempengaruhi keyakinan siswa, artinya siswa yang memahami matematika dengan baik akan mempunyai keyakinan yang positif, yang selanjutnya akan membantu perkembangan pengetahuan matematikanya.¹⁰²

Untuk membuat siswa belajar matematika dengan pemahaman, guru hendaknya merencanakan dan melaksanakan pembelajaran matematika yang melibatkan siswa aktif dalam belajar, baik secara mental, fisik, maupun social. Kemampuan guru dalam merencanakan dan melaksanakan pembelajaran yang sesuai dengan perkembangan intelektual siswa sangat menentukan untuk dapat tidaknya suatu konsep yang dipelajari dan dipahami oleh siswa.

Konsep operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat perlu dipelajari siswa secara konseptual maupun secara prosedural. Dalam implementasi Teori Bruner, secara konseptual siswa mampu memahami konsep operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat melalui tahap enaktif dan ikoniknya. Sedangkan secara prosedural siswa mampu menggunakan simbol-

¹⁰² <http://abdussakir.wordpress.com>, diakses tanggal 3 Agustus 2013

simbol matematika tanpa bantuan benda konkrit maupun gambar dalam menyelesaikan operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat (tahap simbolik Teori Bruner).

E. Konsep Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Bulat di Sekolah Dasar

Konsep adalah suatu kelas atau kategori objek-objek yang memiliki ciri-ciri umum.¹⁰³ Soedjadi mengungkapkan bahwa konsep dalam matematika adalah ide abstrak yang memungkinkan seseorang dapat mengklasifikasikan objek-objek atau kejadian-kejadian tertentu, apakah objek-objek atau kejadian-kejadian itu merupakan contoh atau bukan contoh.¹⁰⁴

Penjumlahan dan pengurangan adalah salah satu bentuk pengerjaan atau operasi hitung. Penjumlahan adalah operasi hitung jumlah atau pengerjaan hitung jumlah (menambahkan), sedangkan pengurangan adalah operasi hitung kurang atau pengerjaan hitung kurang.¹⁰⁵

Pada penjumlahan, yang akan dicari adalah jumlahnya. Misalkan, $4 + 3 = \square$, simbol “4 dan 3” merupakan objek-objek yang dijumlah dan simbol “ \square ” merupakan jumlahnya. Sedangkan pada pengurangan, yang akan dicari adalah selisihnya. Misalkan, $5 - 3 = \diamond$, simbol “5” merupakan objek yang dikurangi, simbol “3” merupakan objek pengurang, dan simbol “ \diamond ” merupakan selisihnya.¹⁰⁶

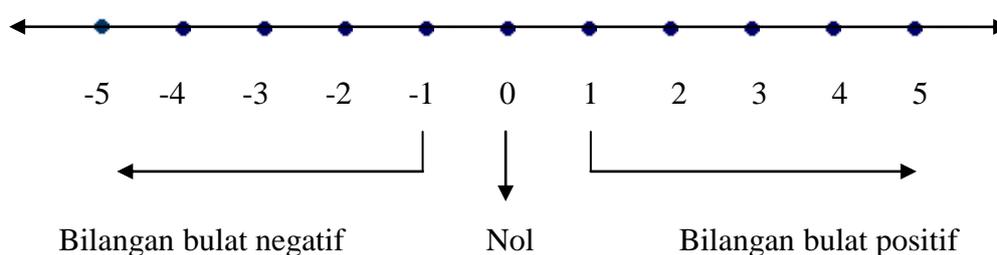
¹⁰³ Oemar Hamalik, *Perencanaan Pengajaran Berdasarkan Pendekatan Sistem*, (Jakarta: PT Bumi Aksara, 2006), hal. 162

¹⁰⁴ R. Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika Di Indonesia...*, hal. 14

¹⁰⁵ E.T. Ruseffendi, *Pengajaran Matematika Modern dan Masa Kini untuk Guru dan PGSD D2*, (Bandung: Tarsito, 1990), hal. 1

¹⁰⁶ *Ibid.*, hal. 29

Bilangan bulat adalah ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,¹⁰⁷ Bilangan bulat terdiri dari bilangan bulat positif, bilangan bulat negatif dan bilangan nol.¹⁰⁸ Bilangan bulat dapat ditunjukkan dengan anak panah pada garis bilangan.¹⁰⁹ Semua bilangan di sebelah kiri nol adalah bilangan negatif dan semua bilangan di sebelah kanan nol adalah bilangan positif.¹¹⁰



Gambar 2.3

Bilangan bulat diciptakan untuk menjawab masalah seperti $3 + n = 0$ atau $7 + n = 5$, karena tidak ada bilangan cacah yang memenuhi sehingga pernyataan tersebut menjadi benar. Hal ini menunjukkan pengetahuan tentang bilangan cacah saja belum cukup untuk memecahkan masalah. Karena itu manusia membutuhkan pengetahuan yang lebih untuk dapat menyelesaikan permasalahan di atas, yaitu dengan bilangan bulat.

¹⁰⁷ Y.D. Sumanto, dkk., *Gemar Matematika 4: untuk Kelas IV SD/MI*, (Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2008), hal. 22

¹⁰⁸ Lisnawati Simanjuntak, *Metode Mengajar Matematika*, (Jakarta: Rineka Cipta, 1993), hal. 139

¹⁰⁹ Djoko Moesono dan Siti M. Amin, *Matematika 4a Mari Berhitung: untuk Sekolah Dasar Kelas 4*, (Jakarta: Balai Pustaka, 1995), hal. 64

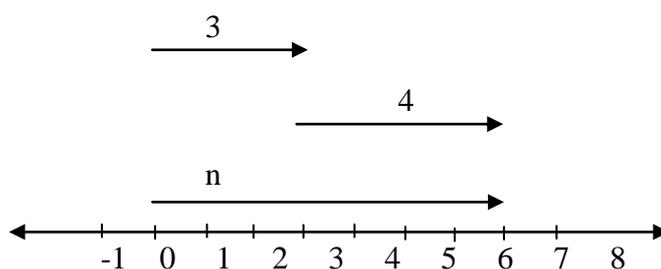
¹¹⁰ Tim Bina Karya Guru, *Terampil Berhitung Matematika untuk SD Kelas IV*, (Jakarta: Erlangga, 2004), hal. 32.

Menurut Karim gabungan semua bilangan cacah dan himpunan semua bilangan bulat negatif, yaitu himpunan $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ disebut himpunan bilangan bulat.¹¹¹

Penjumlahan bilangan bulat dapat ditunjukkan dengan anak-anak panah pada garis bilangan.

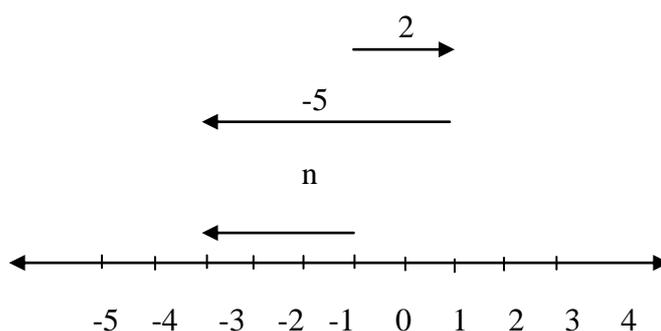
Contoh 1: $3 + 4 = n$

$n = 7$



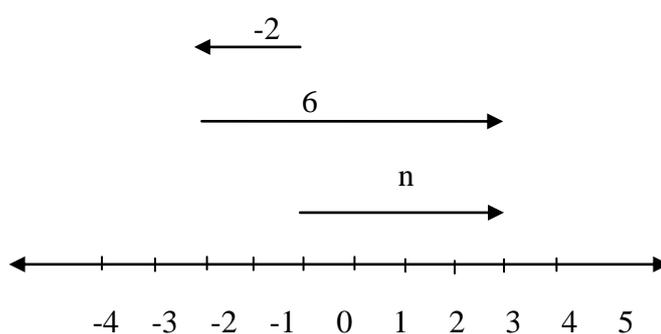
Contoh 2: $2 + (-5) = n$

$n = -3$



Contoh 3: $-2 + 6 = n$

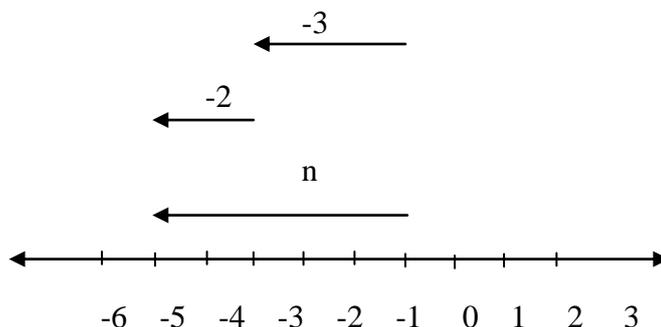
$n = 4$



¹¹¹ NoIVita Eka P., *Meningkatkan Prestasi Belajar Siswa Tentang Operasi Hitung Bilangan Bulat Menggunakan Teori Bruner*, dalam <http://www.google.com>, diakses tanggal 2 Agustus 2013

Contoh 4: $-3 + (-2) = n$

$$n = -5$$



Konsep pengurangan bilangan bulat dapat dilihat dari kalimat penjumlahan berikut: $10 + (-6) = n$, dimana dengan pertolongan diagram anak panah garis bilangan dapat diperoleh $n = 4$. Selanjutnya perhatikan kalimat pengurangan $10 - 6 = n$, dimana kalimat ini benar untuk $n = 4$. Sehingga $10 - 6 = 4$. Jadi $10 - 6 = 10 + (-6)$.

Karena -6 adalah lawan dari 6 , maka dapat diperoleh hasil berikut: mengurangi 10 dengan 6 sama artinya dengan menambah 10 dengan lawan 6 . Secara umum mengurangi a dengan b sama saja dengan menambah a dengan lawan b . Jadi, $a - b = a + (-b)$.

Contoh:

1. Carilah $5 - 12 = n$.

Jawab: mengurangi 5 dengan 12 sama artinya dengan menambah 5 dengan lawan 12 , jadi $5 - 12 = 5 + (-12)$. Dengan diagram panah garis bilangan diperoleh $5 + (-12) = -7$. Jadi $n = -7$

2. Carilah $-7 - 8 = n$.

Jawab: mengurangi -7 dengan 8 sama artinya dengan menambah -7 dengan lawan 8 , jadi $-7 - 8 = -7 + (-8)$. Dengan diagram panah garis bilangan diperoleh $-7 + (-8) = -15$. Jadi $n = -15$

3. Carilah $6 - (-4) = n$

Jawab: mengurangi 6 dengan -4 sama artinya dengan menambah 6 dengan lawan -4, jadi $6 - (-4) = 6 + 4 = 10$. Maka $n = 10$

4. Carilah $-4 - (-15) = n$

Jawab: mengurangi -4 dengan -15 sama artinya dengan menambah -4 dengan lawan -15, jadi $-4 - (-15) = -4 + 15 = 11$, maka $n = 11$

F. Pembelajaran Konsep Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Bulat yang Berorientasi pada Teori Bruner.

Menurut Azhar Arsyad untuk mengupayakan penanaman konsep matematika (ide) ke dalam skemata siswa, pembelajaran harus disusun berdasarkan tingkatan modus belajar tertentu, yaitu pengalaman langsung, pengalaman piktoral atau gambar dan pengalaman abstrak atau simbol.¹¹² Hal ini sejalan dengan tahapan penyajian matematika yang disarankan oleh Bruner, yang dimulai dengan penyajian enaktif (benda konkret), kemudian ikonik (gambar/semi konkret), dan terakhir simbolik (abstrak).

Pembelajaran konsep penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat dapat diajarkan berorientasi pada tahapan penyajian yang disarankan oleh Bruner. Pada tahap enaktif, siswa memanipulasi benda konkret atau alat peraga garis bilangan dengan cara tidak memakai diagram panah tetapi benda konkret mainan kodok dari kertas. Sehingga pembelajaran tidak kelihatan abstrak dan siswa dapat terlibat langsung dalam pengoperasian bilangan bulat.

¹¹² Azhar Arsyad, *Media Pembelajaran*, (Jakarta: PT RajaGrafindo Persada, 2007), hal. 8

Pada tahap ikonik, siswa mengamati gambar garis bilangan dan gambar kodok di papan tulis. Saat mengamati, siswa diharapkan dapat melihat dan memahami keteraturan-keteraturan atau ide-ide yang terkait dengan konsep kerja gambar garis bilangan dan gambar kodok yang merupakan terjemahan alat peraga pada tahap enaktif. Sehingga siswa tidak terpaku pada benda konkret.

Pada tahap simbolik, siswa menggunakan simbol secara langsung untuk melakukan operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat. Jadi pada tahap ini alat peraga sudah tidak dipergunakan dalam pembelajaran.

Pembelajaran yang berorientasi pada teori belajar Bruner tampaknya dapat meningkatkan pemahaman konsep operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat pada siswa kelas IV SD/MI. Hal ini dapat diterima karena pembelajaran yang berorientasi pada teori Bruner ini memungkinkan siswa belajar dengan pemahaman dan sesuai dengan tingkat perkembangan intelektual siswa.

Untuk itu perlu disusun suatu pembelajaran yang memungkinkan siswa memperoleh pengetahuan konseptual dan pengetahuan procedural melalui penyajian enaktif, ikonik, dan simbolik. Adapun pembelajaran yang dimaksud direncanakan dengan langkah-langkah berikut.

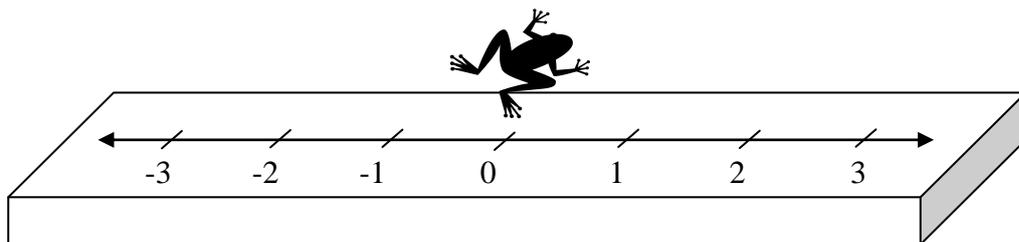
Langkah-langkah pembelajaran konsep operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat.

1. Tahap Penyajian Enaktif

Kegiatan yang dilakukan pada tahap enaktif agar siswa memperoleh pengetahuan konseptual adalah seperti berikut.

- a. Guru membagikan alat peraga (garis bilangan terbuat dari gabus dan mainan katak terbuat dari kertas) kepada masing-masing kelompok siswa yang setiap kelompoknya terdiri dari 3-4 anggota kelompok, kemudian siswa diberi kesempatan untuk mengamati alat peraga tersebut.
- b. Guru meminta keaktifan semua anggota kelompok dan bekerja sama, sehingga tidak ada yang dominan dalam kelompoknya.
- c. Setiap anggota kelompok diminta harus saling membagi tugas dan memahami materi maupun memahami prinsip kerja alat peraga.

Adapun prinsip kerja alat peraga adalah sebagai berikut:

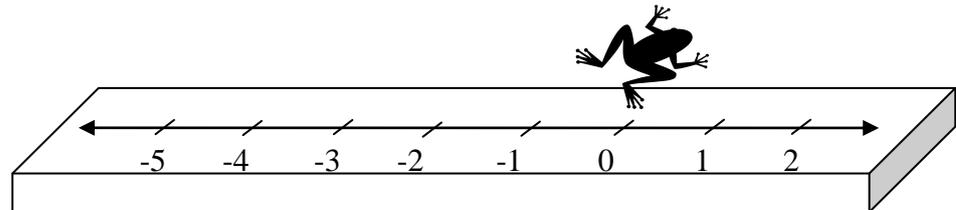


Gambar 2.4

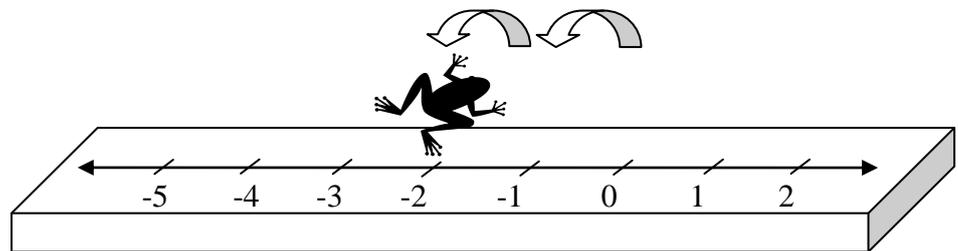
- 1) Selalu awali mainan katak menghadap arah kanan tepat di atas titik 0 (nol)
 - 2) Bilangan positif diberi arti "*maju*"
 - 3) Bilangan negatif diberi arti "*mundur*"
 - 4) Ditambah diberi arti "*jalan terus*"
 - 5) Dikurang diberi arti "*balik kanan*"
- d. Siswa diminta mengamati penerapan prinsip kerja alat peraga yang dicontohkan guru untuk mengerjakan contoh soal, misalkan $-2 - 3 = \dots?$

Hal-hal yang dapat diamati siswa misalnya:

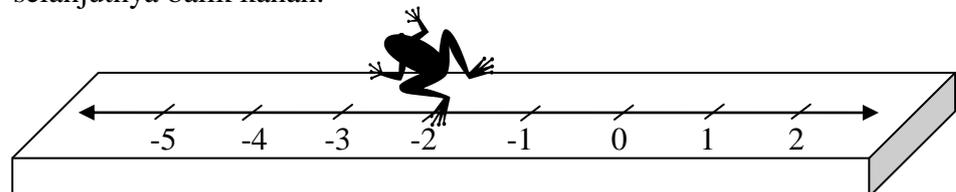
- 1) Selalu awali mainan katak menghadap arah kanan tepat di atas titik 0 (nol)



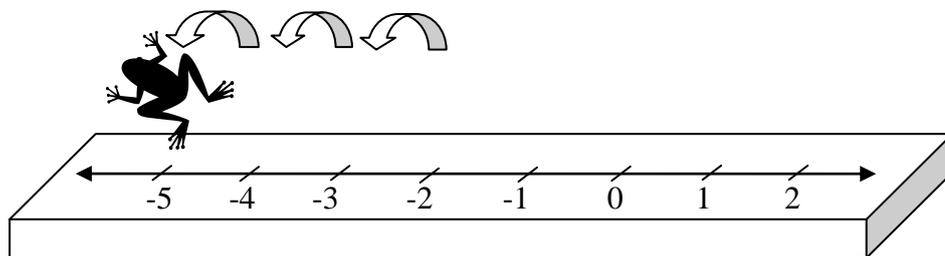
- 2) Untuk mencari $-2 - 3 = \dots$, katak melompat mundur sebanyak dua satuan, karena bertemu dengan bilangan -2 (negatif dua) sehingga berada tepat di atas titik -2



- 3) Karena mendapat operasi hitung “dikurang”, berarti katak selanjutnya balik kanan.



- 4) Kemudian bertemu dengan bilangan 3 (positif tiga), maka selanjutnya katak melompat maju sebanyak tiga satuan sehingga berada tepat di atas titik -5 (negatif lima).



5) Jadi, $-2 - 3 = -5$

- e. Siswa diminta mengungkapkan hasil pengamatannya, kemudian guru menegaskan kembali ungkapan siswa agar sesuai dengan yang diharapkan.

Setelah siswa memperoleh pengetahuan konseptual selanjutnya siswa diarahkan untuk memperoleh pengetahuan prosedural berdasarkan pengetahuan konseptual yang telah dimilikinya (konsep operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat menggunakan alat peraga). Kegiatan ini dilakukan seperti berikut.

- a. Mengajukan pertanyaan yang berhubungan dengan konsep tersebut.

Misalnya:

- 1) Bagaimana posisi awal katak sebelum mengerjakan soal operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat menggunakan alat peraga?
- 2) Apa arti dari bilangan 5 dalam mengerjakan soal $-4 + 5 = \dots$ menggunakan alat peraga?
- 3) Apa arti dari bilangan -4 dalam mengerjakan soal $-4 - 3 = \dots$ menggunakan alat peraga?

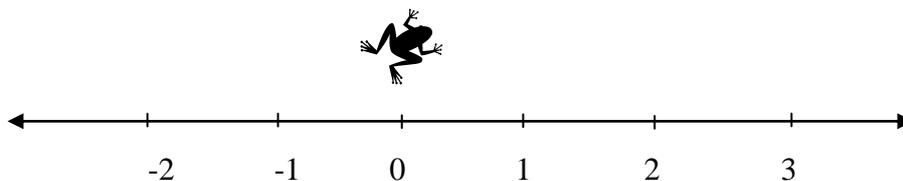
- 4) Apa arti dari tanda “+” (ditambah) dalam mengerjakan soal $-4 + 5 = \dots$ menggunakan alat peraga?
 - 5) Apa arti dari tanda “-” (dikurang) dalam mengerjakan soal $-4 - 3 = \dots$ menggunakan alat peraga?
 - 6) Bagaimana prosedur pengerjaan soal $-4 - 3 = \dots$ menggunakan alat peraga?
- b. Kemudian kepada siswa dibagikan Lembar Kerja Siswa 1 (LKS 1) dan meminta untuk mengisinya berdasarkan pengamatannya dengan mengikuti petunjuk yang ada pada LKS 1.
- c. LKS 1 dikerjakan secara kelompok
- d. Setelah selesai mengerjakan LKS 1, masing-masing kelompok diminta untuk melaporkan hasil pengerjaannya (beberapa soal yang dipilih guru) menggunakan alat peraga di depan kelas. Kegiatan ini dilanjutkan dengan tanya jawab untuk mengetahui pemahaman siswa tentang konsep operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat, baik tanya jawab dengan guru maupun dengan kelompok lain.

Agar siswa lebih memahami konsep tersebut, guru meminta siswa secara individu maju ke depan untuk mengerjakan soal menggunakan alat peraga. Kegiatan tersebut dilakukan siswa terhadap beberapa soal yang diberikan secara lisan oleh guru untuk dikerjakan didepan kelas menggunakan alat peraga. Sehingga dengan demikian secara prosedural siswa akan memperoleh pemahaman yang baik dalam mengerjakan soal

operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat dengan menggunakan alat peraga (tahap enaktif teori bruner).

2. Tahap Penyajian Ikonik

Penyajian pada tahap ini menggunakan media gambar alat peraga pada tahap enaktif (gambar garis bilangan dan gambar katak).



Gambar 2.5

Gambar tersebut dimuat pada Lembar Kerja Siswa 2 (LKS 2). Kegiatan yang dilakukan agar siswa memperoleh pengetahuan konseptual adalah seperti berikut.

- a. Guru membagikan LKS 2 yang memuat gambar garis bilangan dan gambar katak (alat peraga yang dibuat gambar) kemudian memberikan penjelasan seperlunya tentang pengisian LKS 2.
- b. Siswa diminta mengamati gambar garis bilangan dan gambar katak yang ada pada LKS 2 untuk menyatukan pengetahuan yang telah dimilikinya pada tahap enaktif. Kemudian siswa melihat keteraturan konsep cara kerja media gambar yang serupa dengan cara kerja alat peraga.
- c. Siswa mengungkapkan hasil pengamatannya, kemudian guru menegaskan kembali agar sesuai dengan yang diharapkan.

Setelah siswa memperoleh pengetahuan konseptual dengan mengamati gambar garis bilangan dan gambar katak yang ada pada LKS 2,

kegiatan dilanjutkan dengan mengarahkan siswa untuk memperoleh pengetahuan prosedural dalam menentukan hasil operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat dengan menggunakan media gambar.

Kegiatan ini dilakukan seperti berikut.

- a. Siswa diminta mengisi LKS 2 berdasarkan pengamatannya dengan mengikuti langkah-langkah kerja yang tersedia pada LKS 2.
- b. LKS 2 sekaligus sebagai bahan Evaluasi I.
- c. Untuk menentukan hasil operasi hitung, siswa tidak lagi menggunakan bantuan alat peraga seperti pada penyajian tahap enaktif. Tetapi siswa hanya diberikan media gambar garis bilangan dan gambar katak, dimana prinsip kerjanya serupa dengan alat peraga.

3. Tahap Penyajian Simbolik

Penyajian pada tahap ini, siswa diarahkan untuk memantapkan pengetahuan konseptual dan pengetahuan prosedural dengan menggunakan simbol secara langsung. Untuk memantapkan pengetahuan konseptual siswa, dilakukan dengan cara seperti berikut.

- a. Siswa diminta menentukan hasil operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat yang ditunjukkan melalui benda konkret (alat peraga) atau dengan media gambar.
- b. Kemudian siswa membuat generalisasi dengan menuliskan prinsip-prinsip kerja alat peraga atau media gambar yang nantinya siswa akan lebih memahami konsep tersebut secara prosedural.

Kegiatan dilanjutkan untuk memantapkan pengetahuan prosedural siswa yang dilakukan dengan cara seperti berikut.

- a. Siswa menentukan hasil operasi hitung penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat, dengan mengikuti prinsip kerja yang dipelajari pada tahap enaktif atau ikonik.
- b. Guru memantapkan konsep yang telah dipelajari dengan meminta siswa menyelesaikan beberapa soal yang ada pada Lembar Kerja Siswa 3 (LKS 3) sekaligus sebagai bahan evaluasi II, dimana dalam pengerjaan tersebut tidak ada alat peraga atau media gambar.