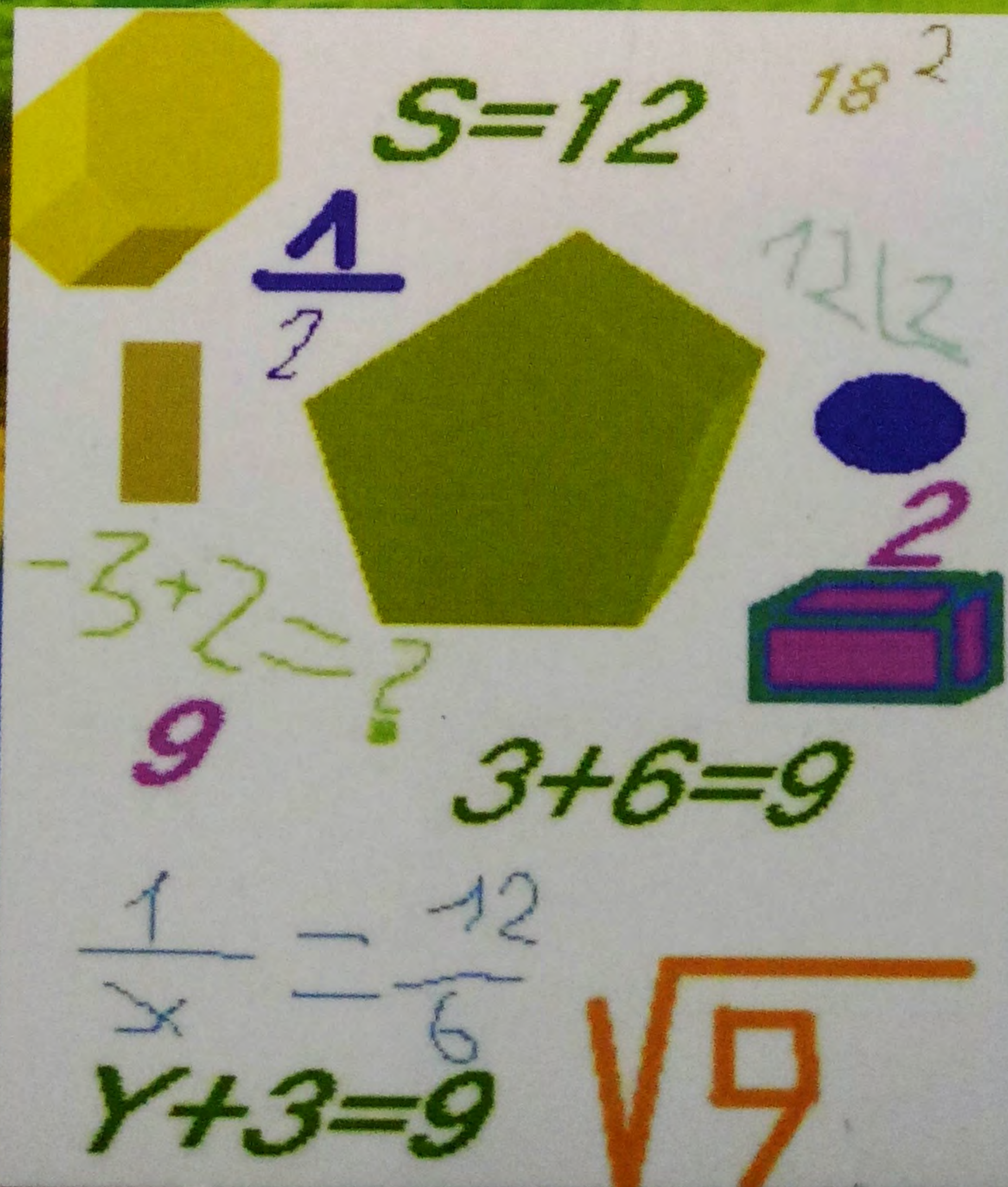


Dra. UMY ZAHROH, M.Kes

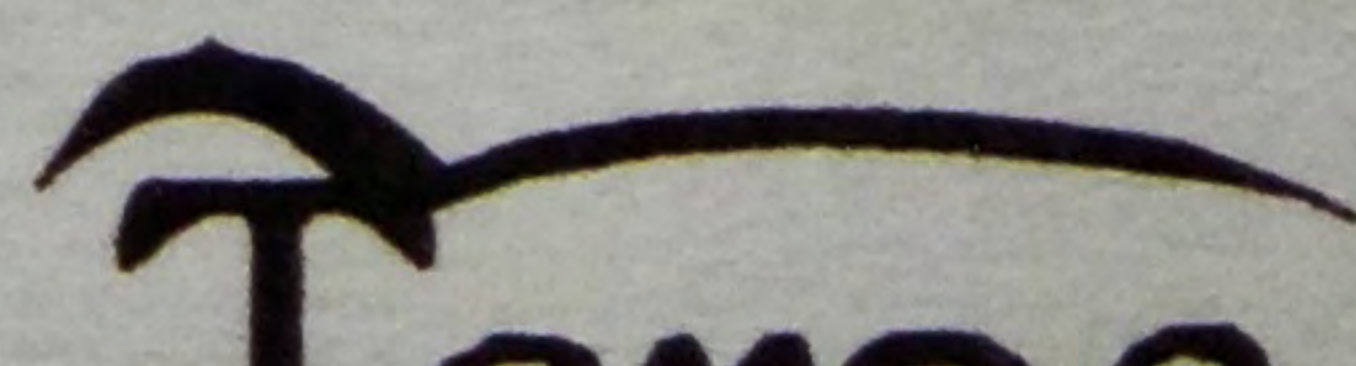
Teras

KALKULUS



KALKULUS II

Dra. UMY ZAHROH, M.Kes


Teras

Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan (KDT)

© 2011, Dra. Umy Zahroh, M.Kes

Kalkulus II/

Umy Zahroh; Editor, Maryono. — Cet.I. —
Bibliografi, hlm viii + 134

ISBN: 978-406-978-341-5

KALKULUS II

Penulis: Umy Zahroh

Editor: Maryono

Tata Letak & Desain Sampul: Kukuh PMLG

Cetakan I, 2011

All right reserved

Hak cipta dilindungi oleh undang-undang

Dilarang mengutip atau memperbanyak sebagian

atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari Penerbit

Diterbitkan oleh:

Penerbit **Teras**

Perum POLRI Gowok Blok D 3 No. 200

Depok Sleman Yogyakarta

e-Mail: teras@yahoo.com

Telp.081802715955.

Percetakan:

SUKSES Offset

Telp. 0274-486598

YOGYAKARTA

KATA PENGANTAR

Puji Syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadiran Allah SWT. atas terselesaikannya penulisan buku yang berjudul "KALKULUS II" ini. Kalkulus II merupakan salah satu mata kuliah yang perlu dikuasai dengan baik oleh mahasiswa Jurusan Tarbiyah Program Studi Matematika agar dapat mempelajari bahan matematika tingkat berikutnya.

Matematika merupakan logika yang telah berkembang, memberikan sifat kuantitatif kepada pengetahuan. Matematika sebagai sarana berfikir deduktif aksiomatik yang sangat berguna untuk membangun teori keilmuan dan dapat menurunkan prediksi-prediksi serta mengkomunikasikan hasil-hasil aktifitas keilmuan dengan benar dan jelas secara singkat, cepat dan cermat. Matematika telah berkembang begitu pesat dengan berbagai cabang telaah yang di kaji dan di analisis, salah satu kajian yang terus dikembangkan adalah Kalkulus.

Isi buku Kalkulus II ini terdiri dari empat bab, yaitu bab satu Integral, bab dua fungsi Transenden, bab tiga Bentuk tak Tentu dan Integral Tak wajar, bab empat penggunaan Integral.

Penulis menyadari bahwa dengan segala kerumitan dalam pengerjaan teknisnya, pada buku tentu saja masih terdapat beberapa kekurangan yang perlu diperbaiki. Penulisan buku Kalkulus II ini telah kami upayakan semaksimal mungkin, namun tidak menutup kemungkinan masih memerlukan berbagai masukan dari pembaca, demi kesempurnaannya. Untuk itu, berbagai kritik atau masukan akan kami terima dengan tangan terbuka dan harapan penulis semoga buku ini benar-benar dapat dimanfaatkan.

Tulungagung, April 2010

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	iii
DAFTAR ISI.....	v
 BAB I INTEGRAL	 1
1.1. Pendahuluan Luas	1
1.2. Integral Tak Tentu	19
1.3. Notasi Jumlah dan Sigma	30
1.4. Integral Tentu	33
1.5. Teorema Dasar Kalkulus	41
1.6. Sifat-sifat Integral Tentu	44
1.7. Metoda Perhitungan Integral Tentu	48
1.8. Soal-soal	54
 BAB II FUNGSI TRANSENDEN	 55
2.1. Fungsi Logaritma Asli	55
2.2. Fungsi Invers dan Turunannya	61
2.3. Fungsi Eksponen Asli	66

2.4. Fungsi Eksponen Umum dan Logaritma Umum	70
2.5. Pertumbuhan dan Peluruhan Eksponen	74
2.6. Fungsi Trigonometri Invers	77
2.7. Turunan Fungsi Trigonometri	82
2.8. Fungsi Hiperbola dan Inversnya	84
2.9. Soal-soal	88

BAB III BENTUK TAK TENTU DAN INTEGRAL TAK WAJAR

3.1. Bentuk Tak Tentu Limit Fungsi	91
3.2. Integral Tak Wajar (improper) Batas Tak Terhingga	94
3.3. Integral Tak Wajar dengan kedua Batas Tak Terhingga	97
3.4. Integral Tak Terhingga pada Titik Ujung Selang	99
3.5. Integral yang Tak Hingga pada Sebuah titik Dalam	100
3.6. Soal-soal	102

BAB IV PENGGUNAAN INTEGRAL

4.1. Luas Bidang Rata	103
4.2. Volume Benda Pejal	109
4.3. Volume Benda Putar	114
4.4. Panjang Kurva	120

4.5. Luas Permukaan Benda Putar	122
4.6. Soal-soal	127

DAFTAR PUSTAKA	131
----------------------	-----

BIODATA PENULIS	133
-----------------------	-----

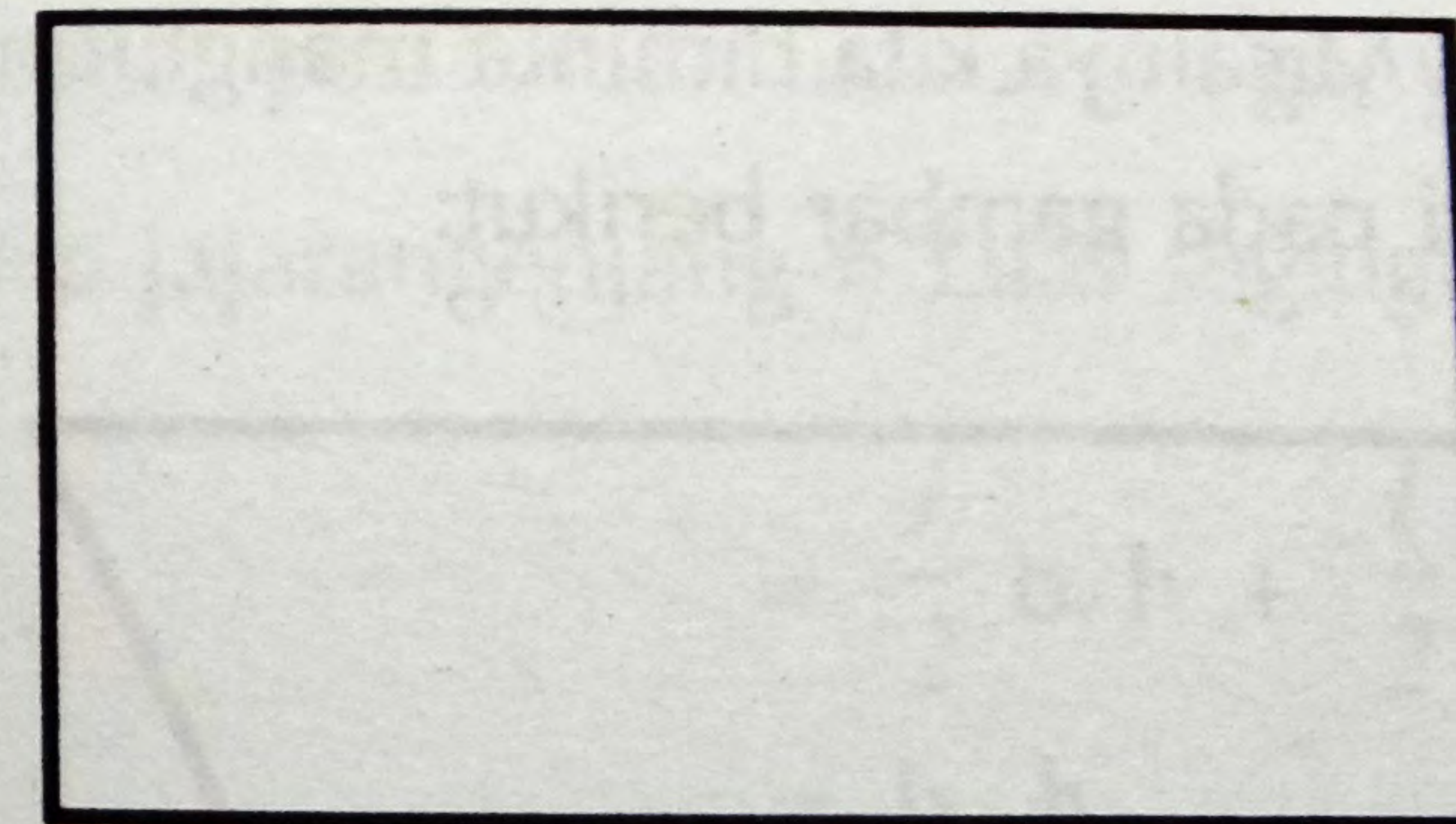
B A B I

INTEGRAL



1.1. Pendahuluan Luas

Dalam penghitungan mencari luas suatu bentuk tertentu, kita sudah sangat terbiasa menghitung luas daerah yang berbentuk poligon yaitu luas daerah yang berupa gambar tertutup pada bidang datar yang dibatasi oleh ruas garis lurus. Misalnya luas empat persegi panjang, segi tiga.¹

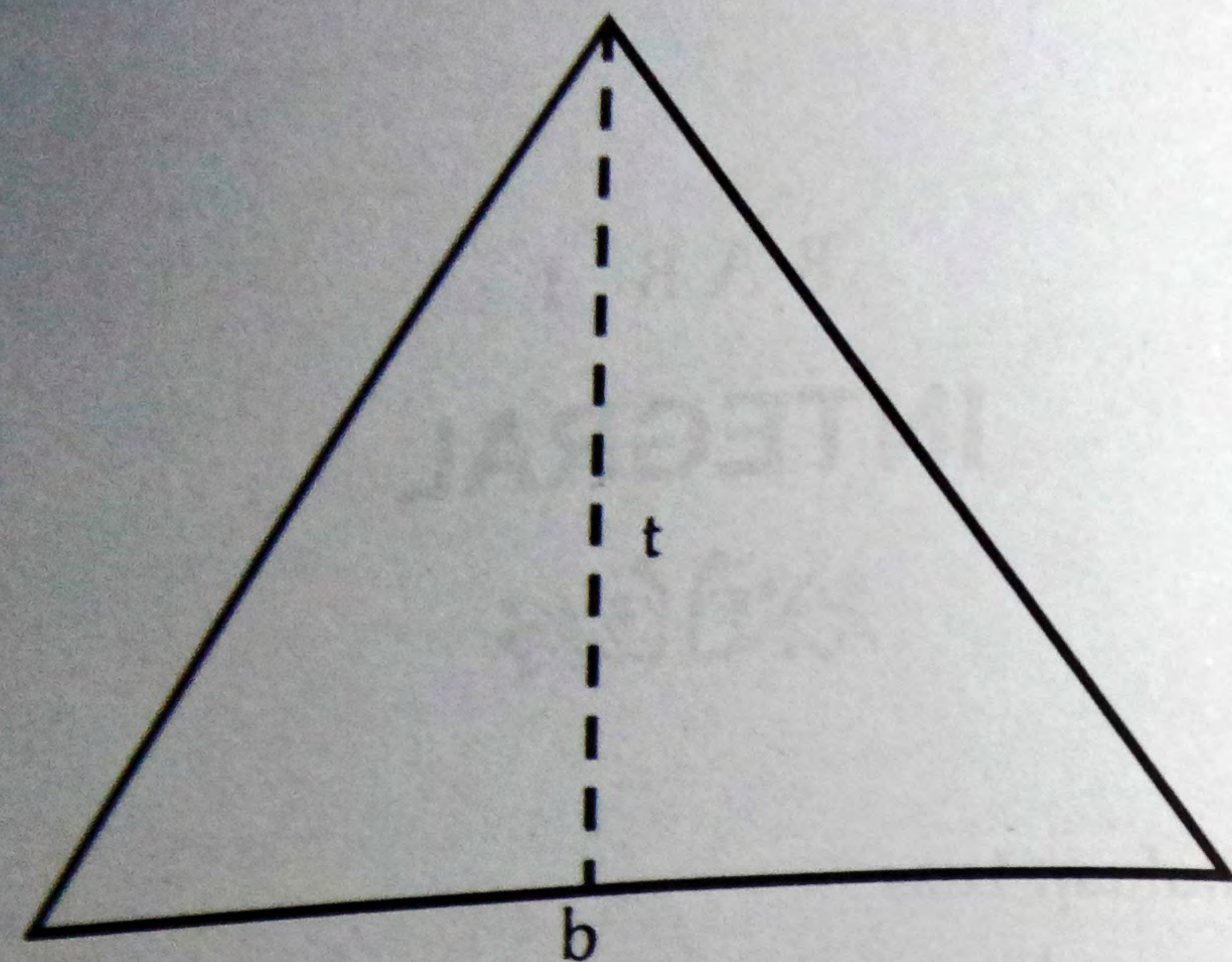


Luas : $A = p \times l$

Dimana p : panjang

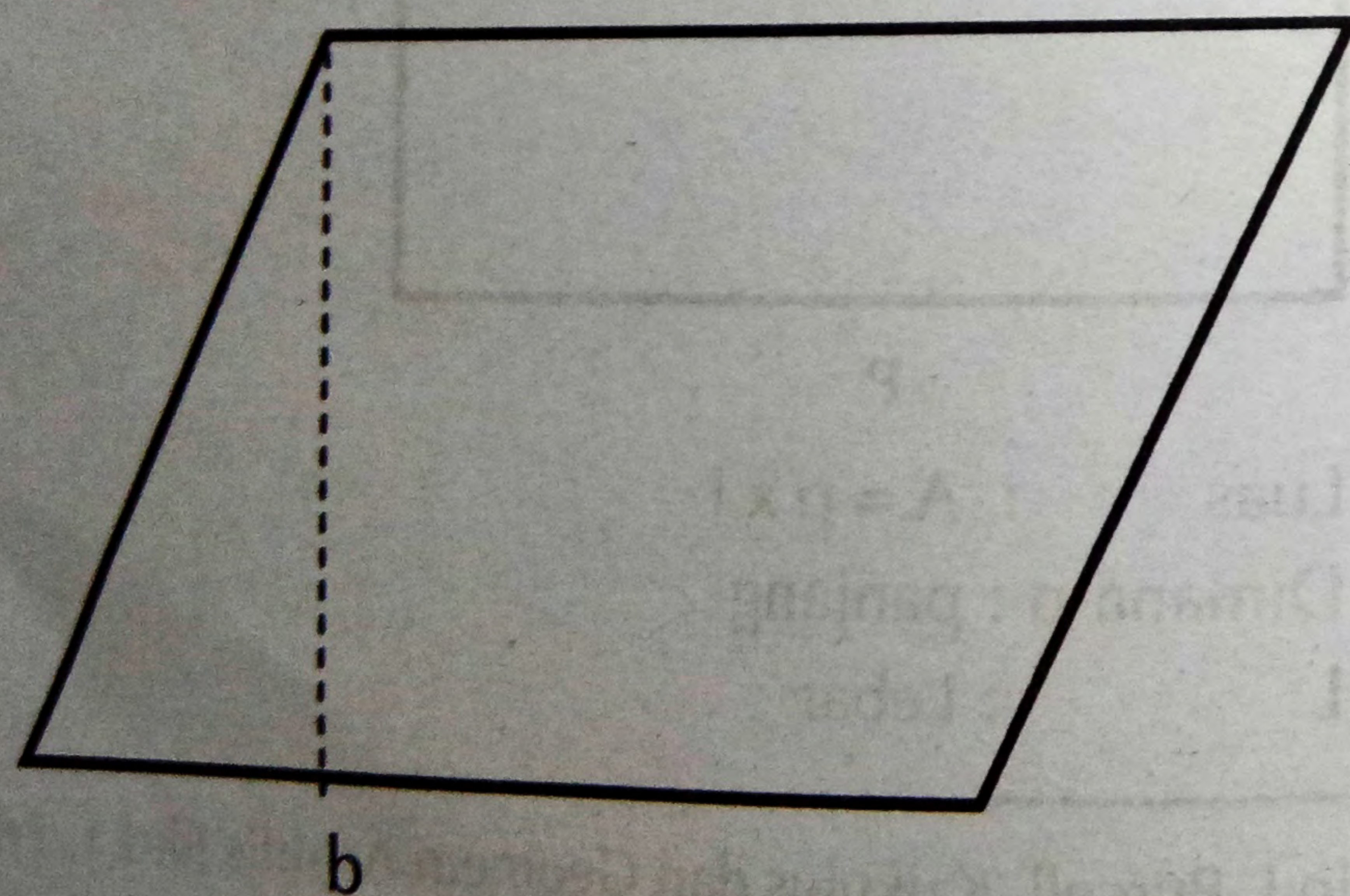
L : Lebar

¹ Edwin J. Purcell, Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1, Erlangga, Bandung 1999, h. 267.



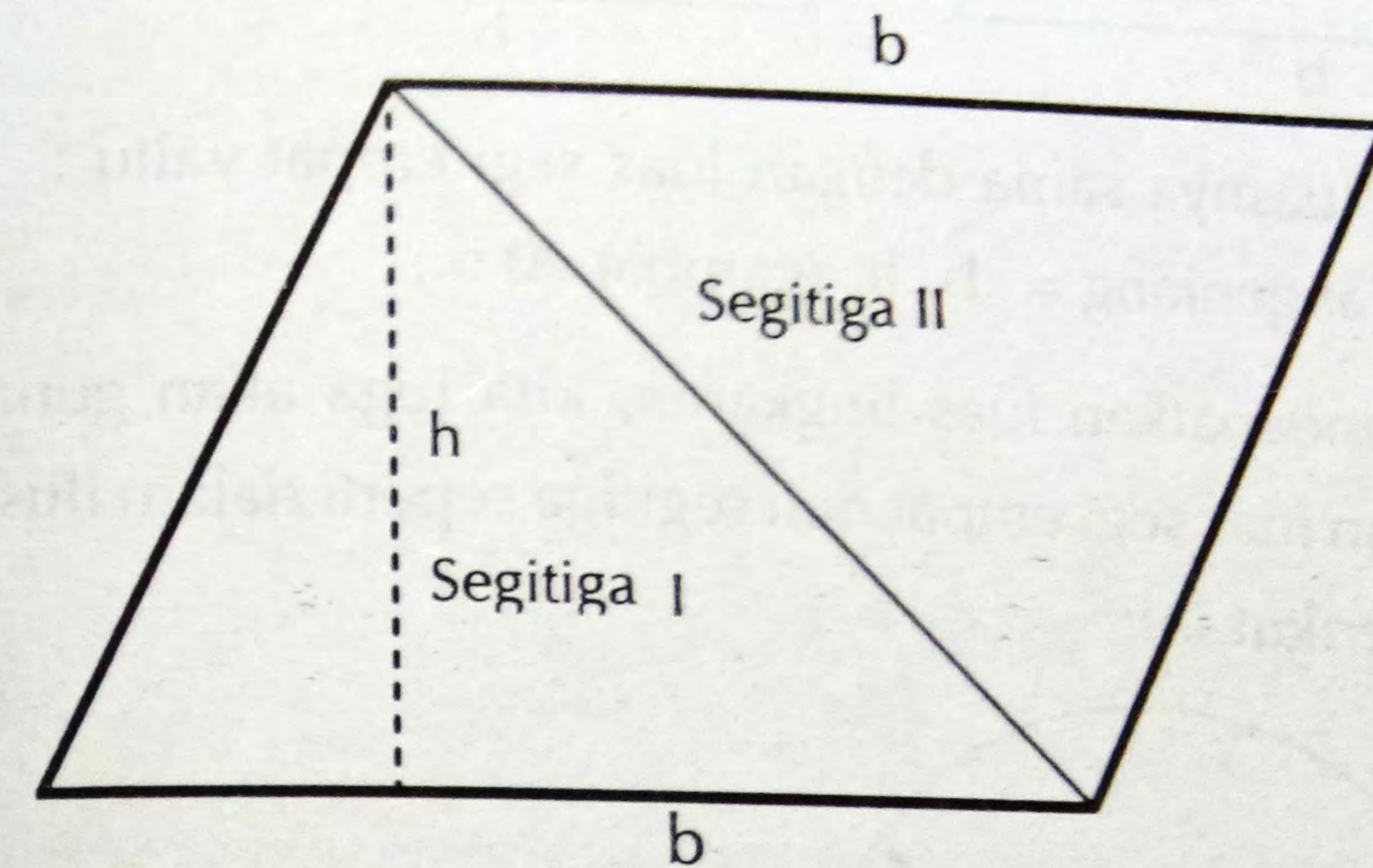
$$\text{Luas : } A = \frac{1}{2} b \cdot h$$

Sedangkan untuk luas bidang-bidang bentuk lainnya dapat dihitung atau didekati dengan menggunakan kedua persamaan luas diatas. Misalnya kita diminta menghitung luas jajaran genjang seperti pada gambar berikut:



Dalam mencari luas jajaran genjang diatas, kita dapat dekat dengan dua cara, yaitu:

1. Jajaran genjang terdiri dari dua buah segi tiga, seperti dalam ilustrasi berikut ini:

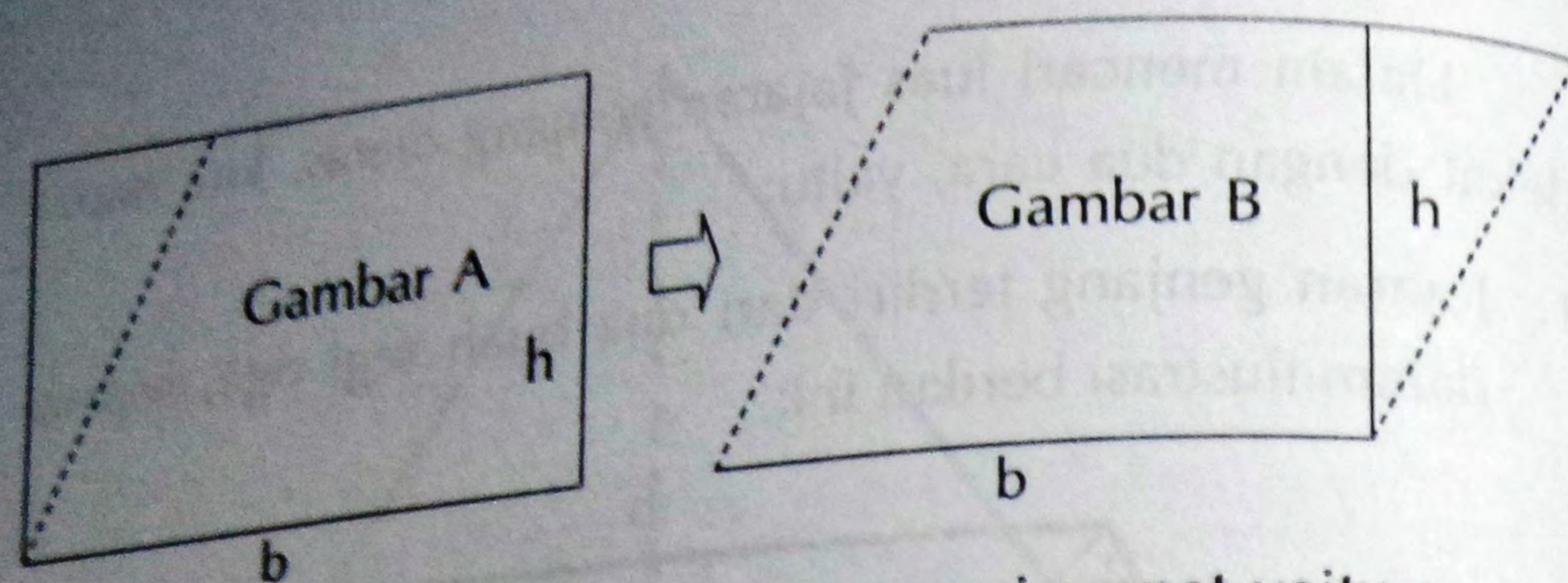


Sehingga luas jajran genjang tersebut dapat dihitung dengan persamaan luas segi tiga, yaitu:

$$\text{Luas jajarangenjang} = \text{Luas segitiga I} + \text{Luas segitiga II}$$

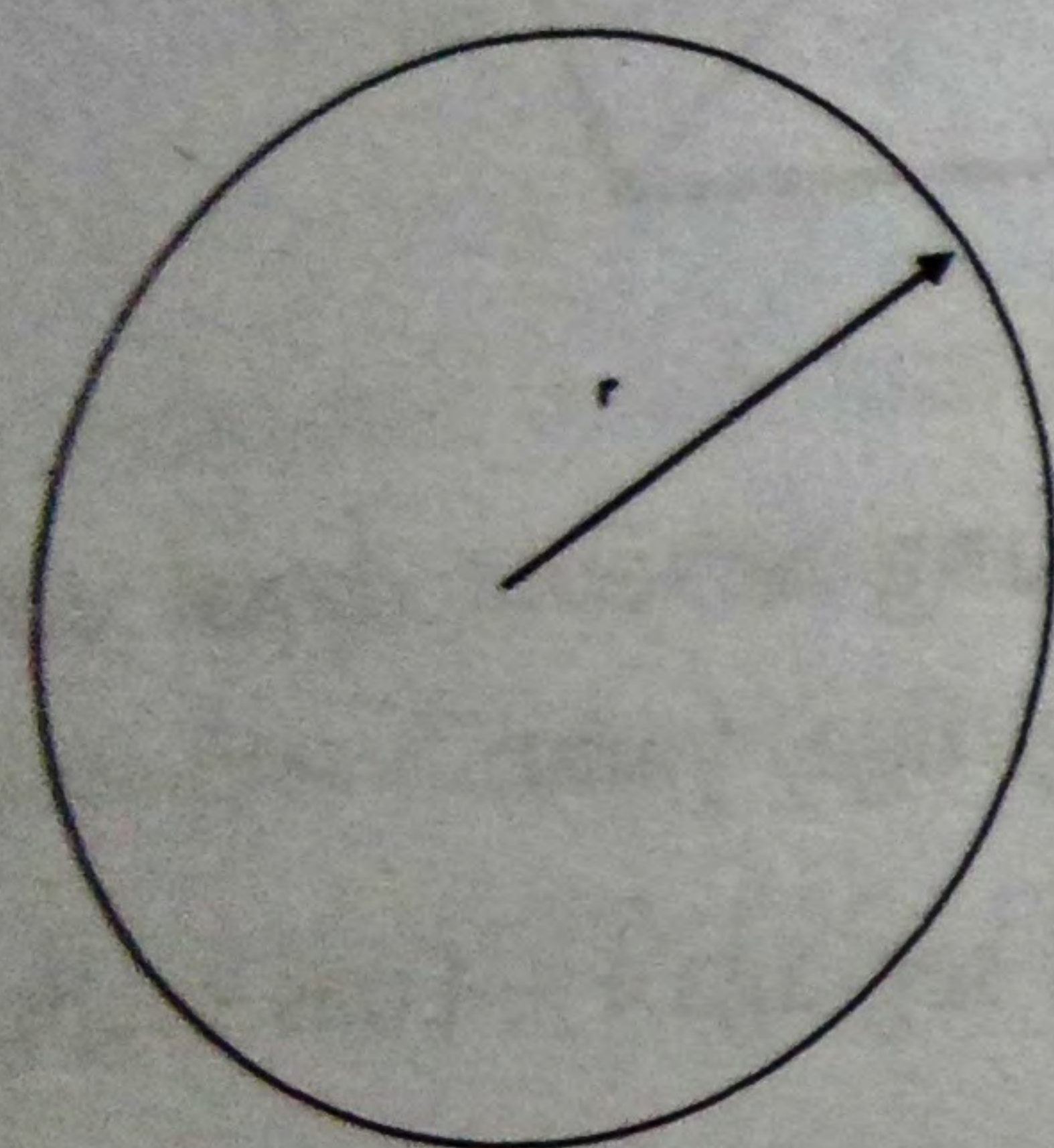
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} b \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h \\ &= b \cdot h \end{aligned}$$

2. Jajaran genjang terbentuk dari segiempat yang salah satu sisinya terpotong dengan bentuk segitiga, seperti gambar berikut :



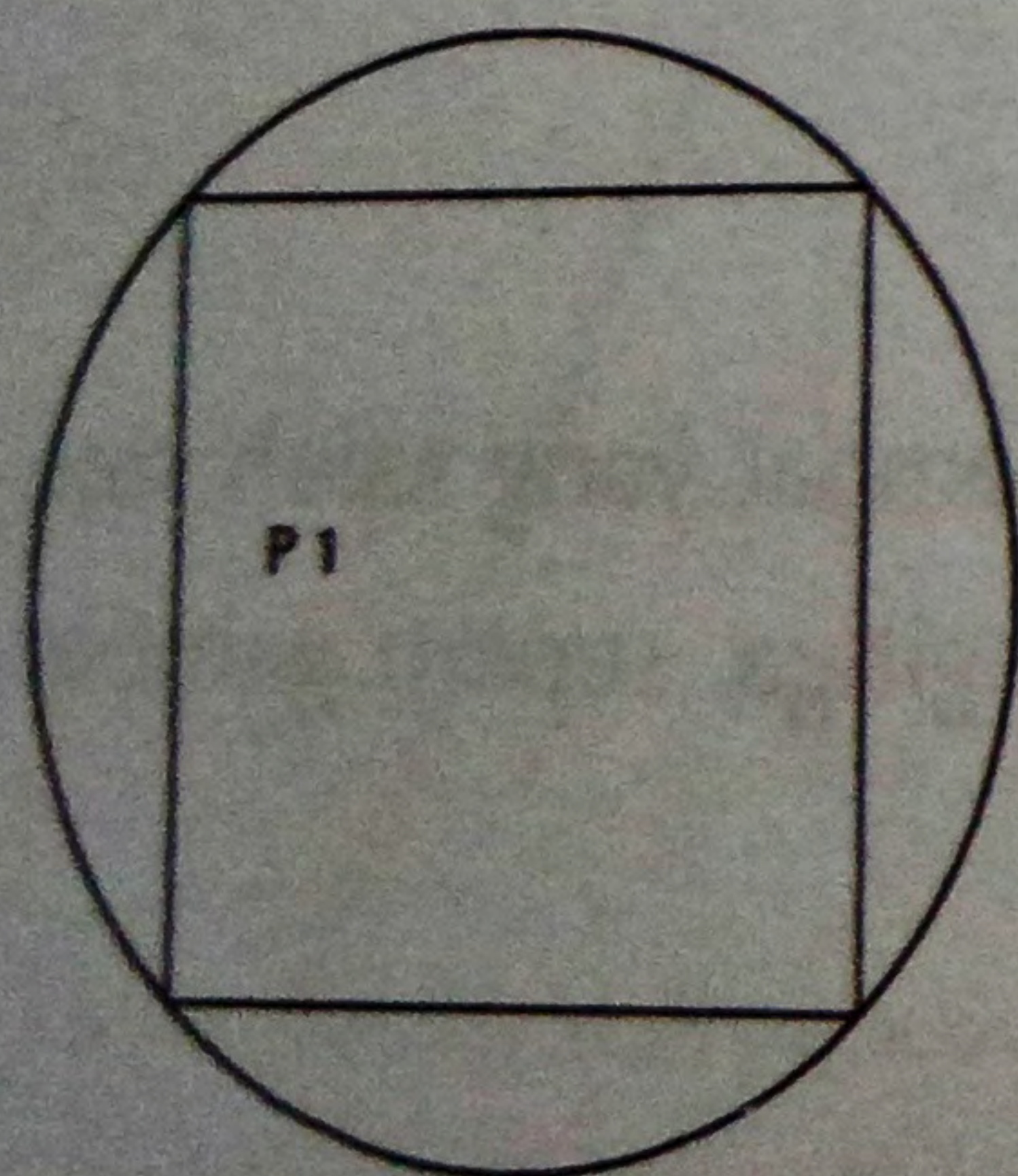
Sehingga luasnya sama dengan luas segi empat yaitu :
 Luas jajargenjang = $b \cdot h$ (gambar A)

Untuk mendapatkan luas lingkaran, kita juga akan gunakan pendekatan luas segi empat dan segitiga seperti dalam ilustrasi gambar berikut ini:

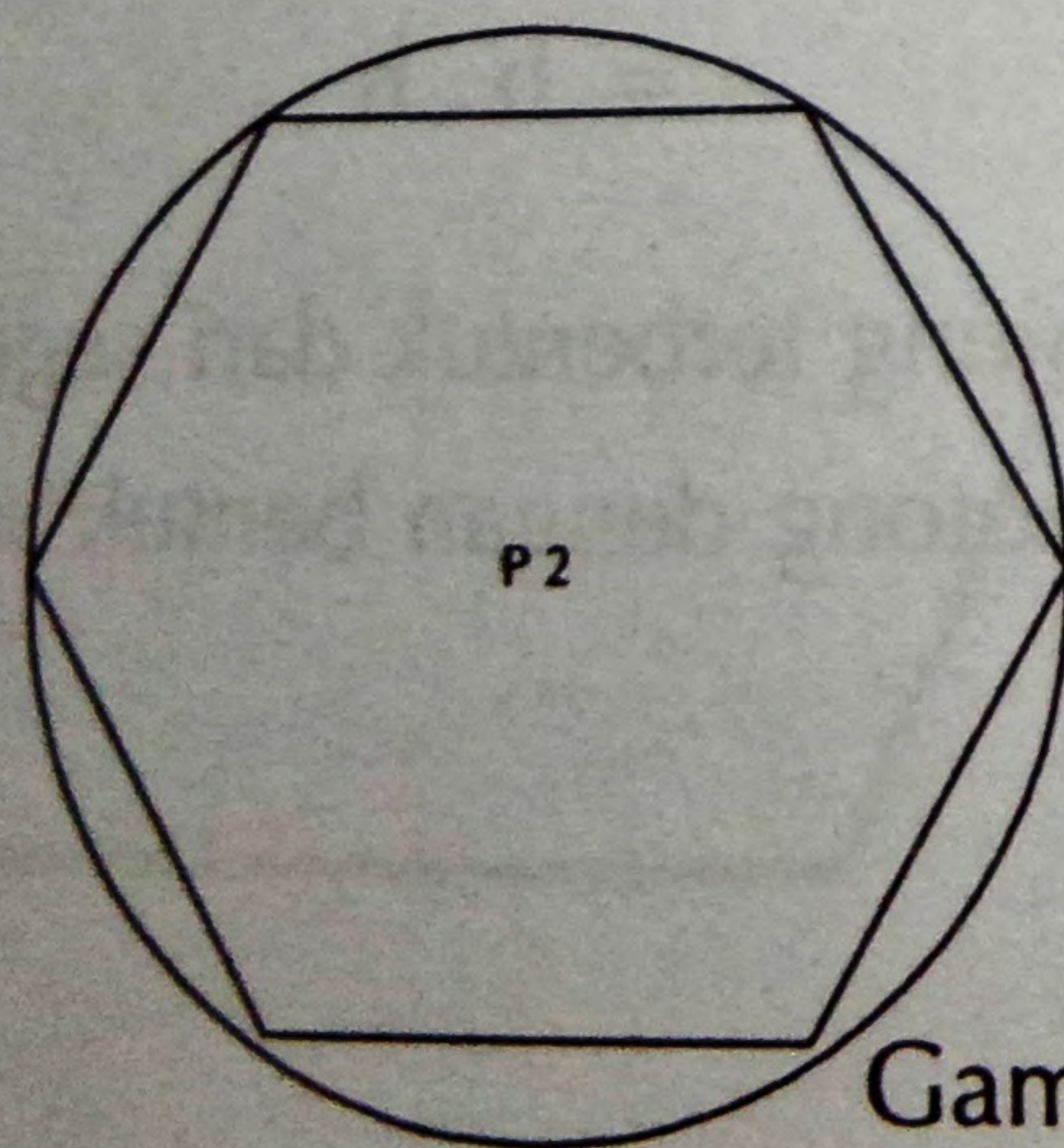


Lingkaran dengan jari-jari

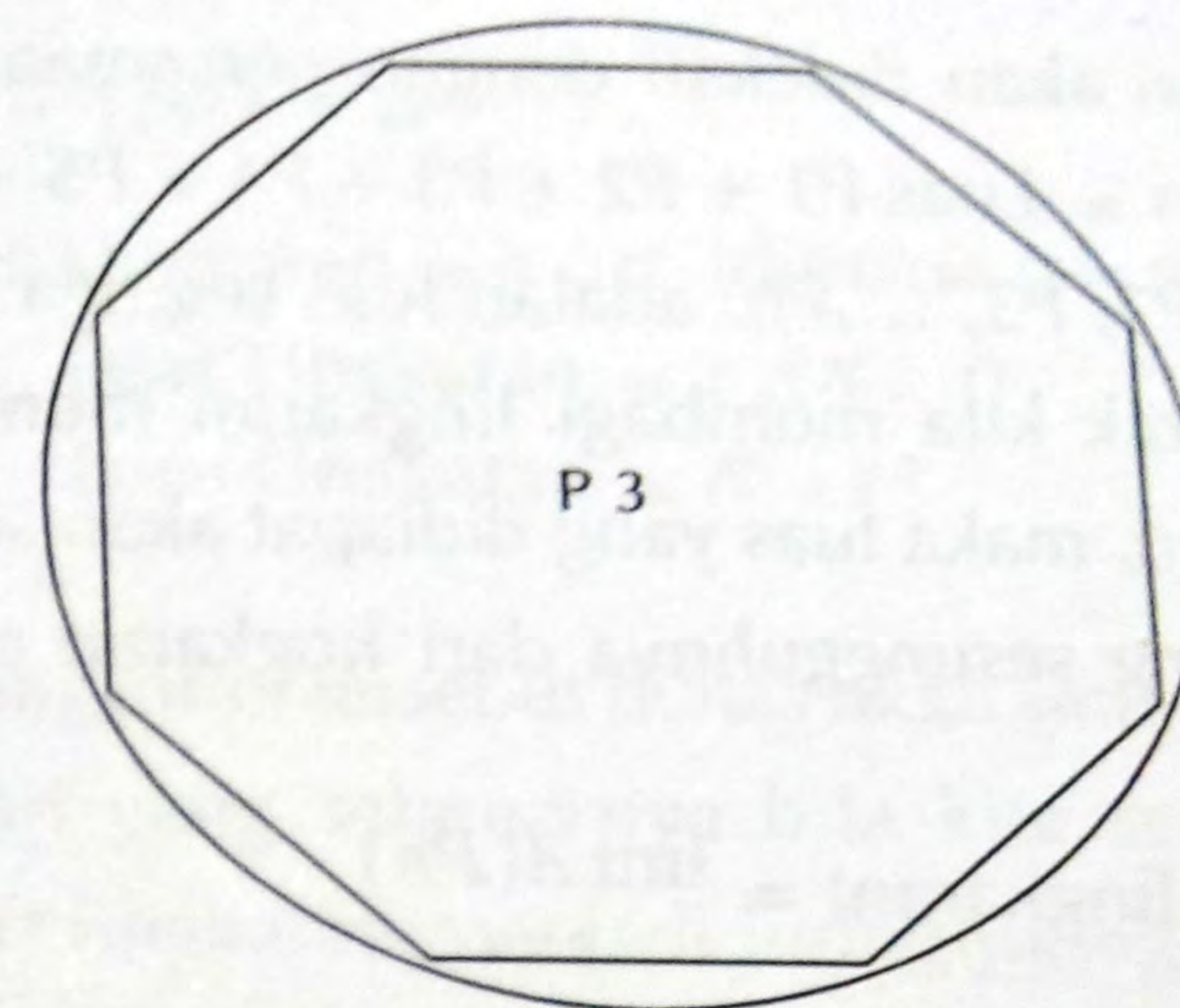
Luas lingkaran tersebut dapat kita dekati seperti gambar berikut:



Gambar A



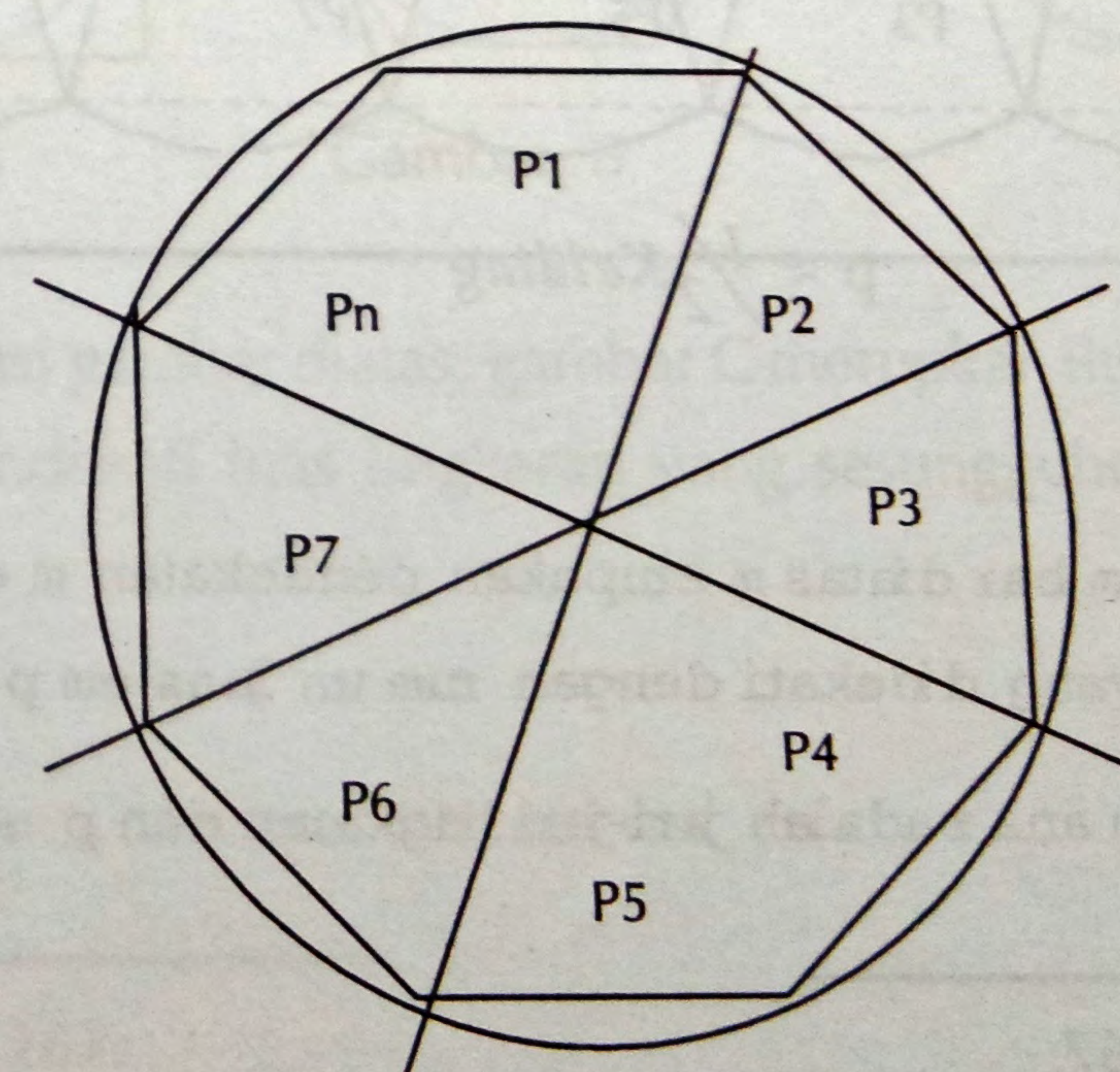
Gambar B



Gambar : C

Dari ketiga macam pendekatan luas lingkaran, gambar C merupakan yang paling mendekati kondisi luas yang sesungguhnya.

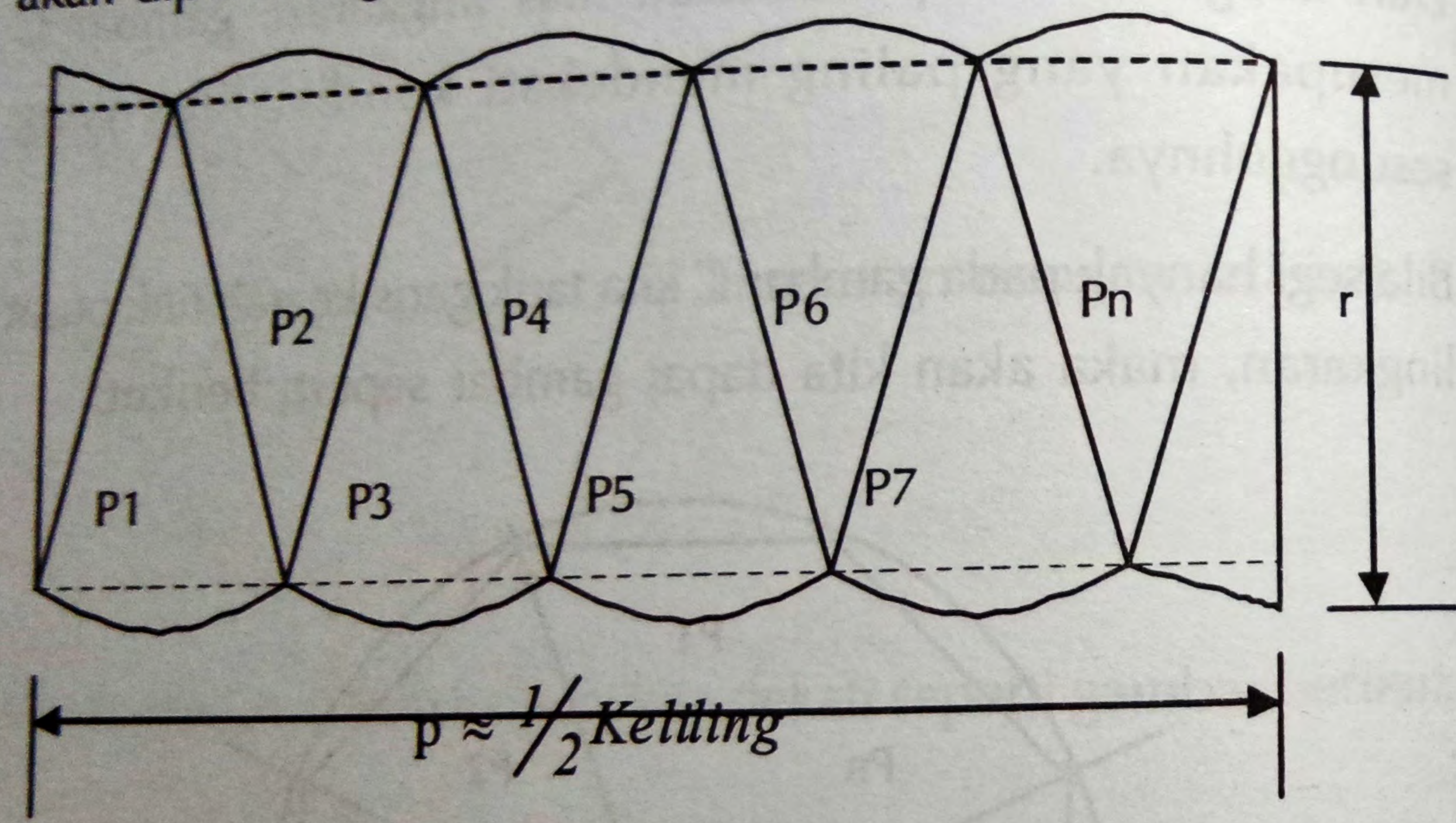
Bila segi banyak pada gambar C kita tarik garis ke arah titik pusat lingkaran, maka akan kita dapat gambar seperti berikut:



Luas lingkaran akan didekati dengan persamaan berikut:
 Luas lingkaran $\approx$ Luas $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + \dots + P_n$
 Dimana $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ adalah luas segitiga P_n
 Semakin banyak kita membagi lingkaran menjadi juring-juring lingkaran, maka luas yang didapat akan semakin mendekati luas yang sesungguhnya dari lingkaran sehingga:²

$$A (\text{luas lingkaran}) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(P_n)$$

Dan apabila juring $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ kita bentangkan, maka akan diperoleh gambar sebagai berikut:



Ilustrasi gambar diatas merupakan pendekatan mencari luas lingkaran yang didekati dengan rumus luas empat persegi panjang dimana r adalah jari-jari lingkaran dan $p \approx \frac{1}{2}$ keliling

² Ibid., h. 267.

$$\text{lingkaran} = \frac{1}{2} (2\pi r) = \pi r$$

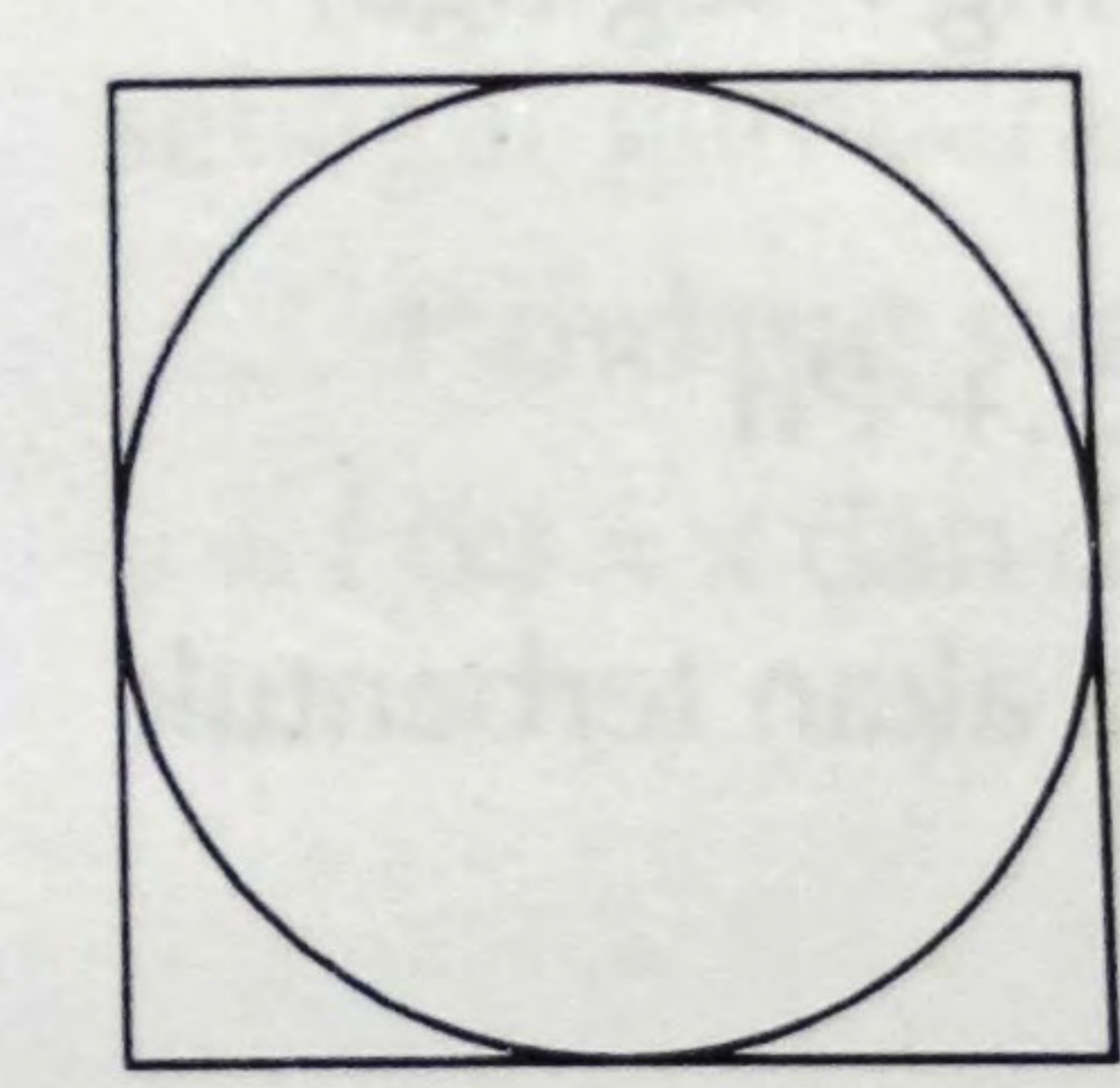
Sehingga Luas Lingkaran $\approx r \cdot p$ (dimana $p = \pi r$)

$$\text{Luas Lingkaran} \approx r \cdot (\pi \cdot r)$$

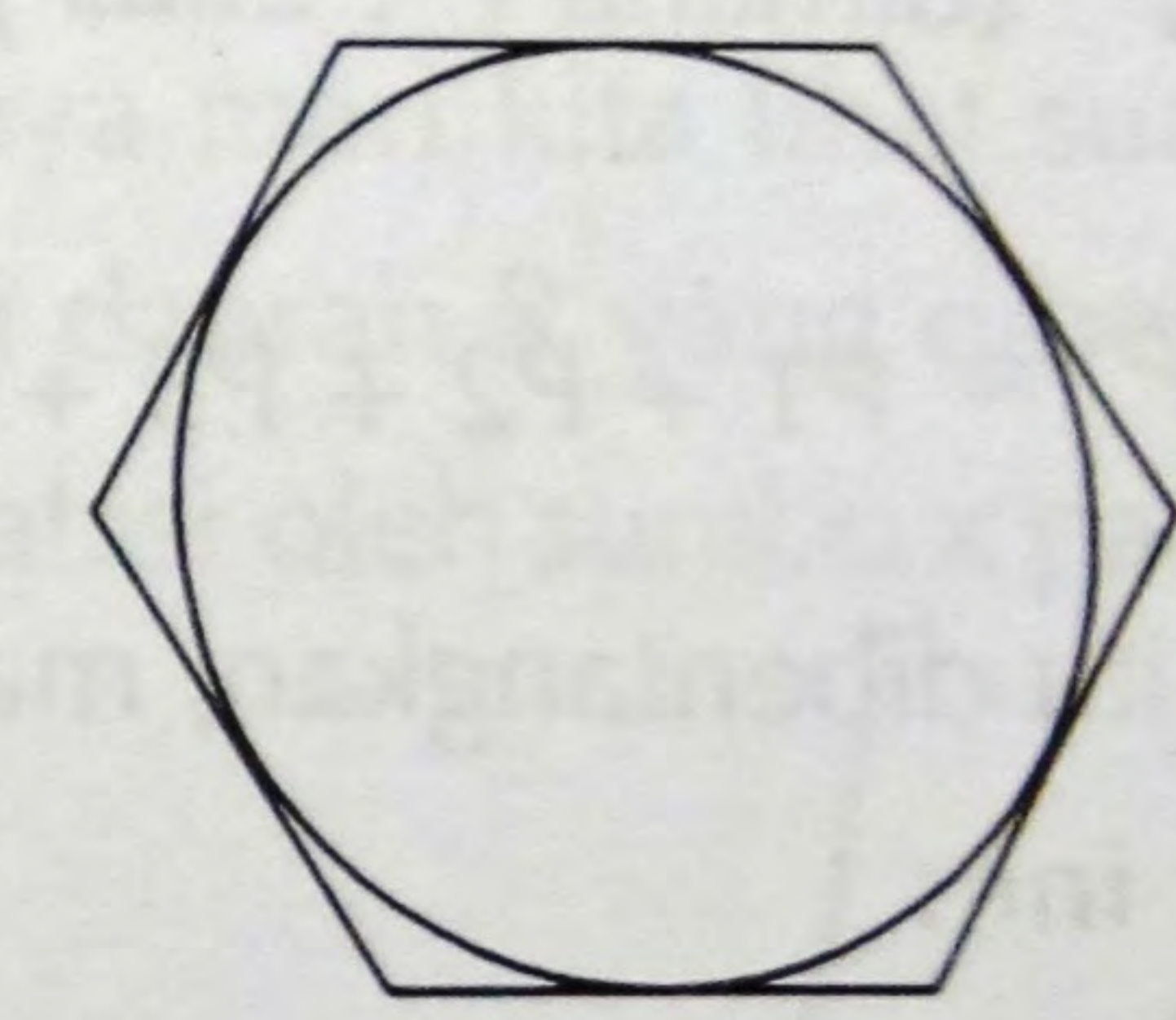
$$\text{Luas Lingkaran} \approx \pi \cdot r^2$$

Rumus luas lingkaran tersebut diatas akan semakin mendekati luas lingkaran yang sebenarnya bila kita semakin banyak membagi luas lingkaran menjadi juring-juring P .

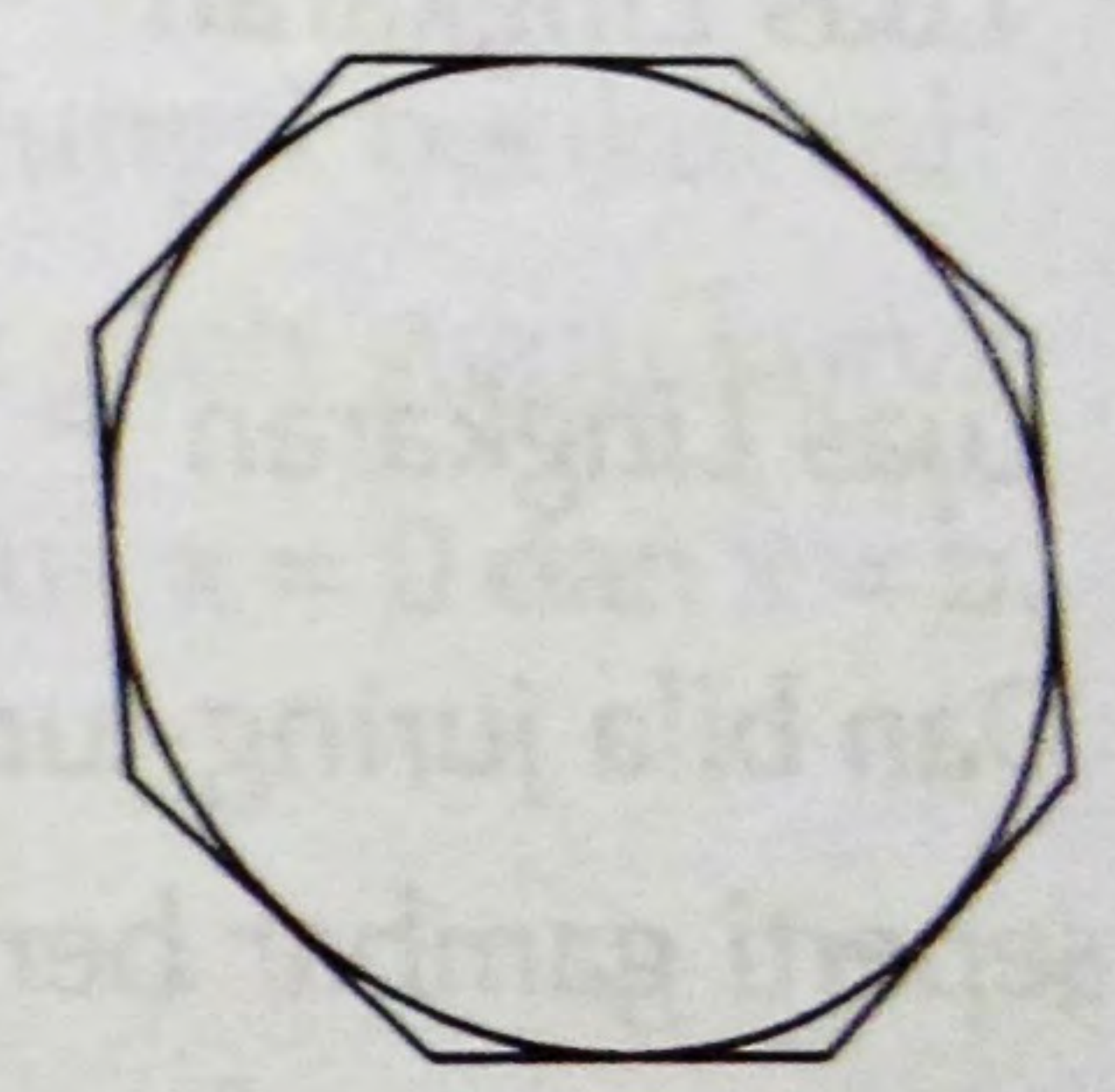
Ilmuwan Archimedes melakukan penghitungan luas lingkaran dengan pendekatan poligon-poligon luar.³ Seperti pada ilustrasi gambar berikut ini:



Gambar A



Gambar B

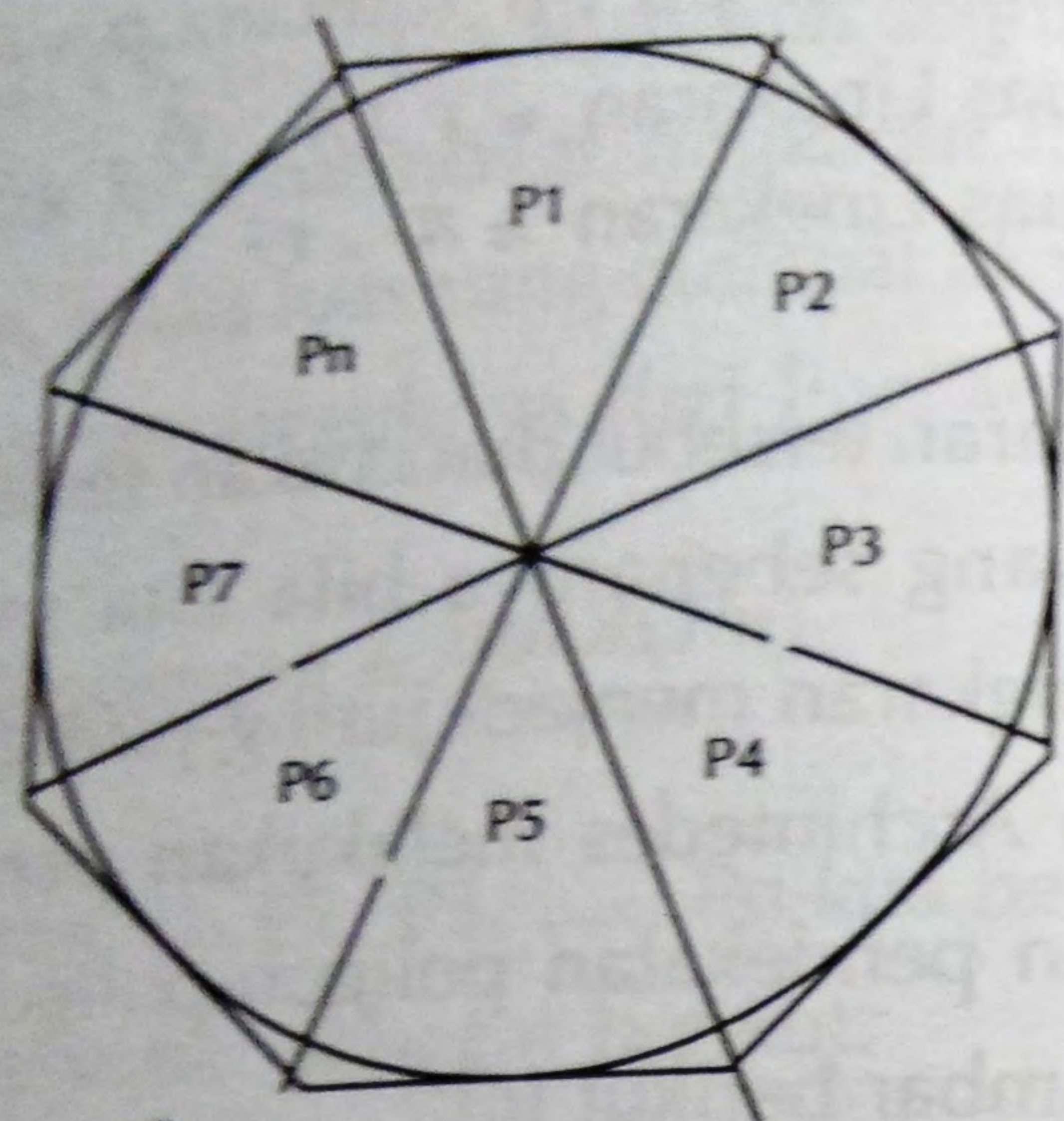


Gambar C

Dari ilustrasi gambar diatas, gambar C merupakan ilustrasi yang paling mendekati luas lingkaran yang sesungguhnya.

³ Ibid., h. 267.

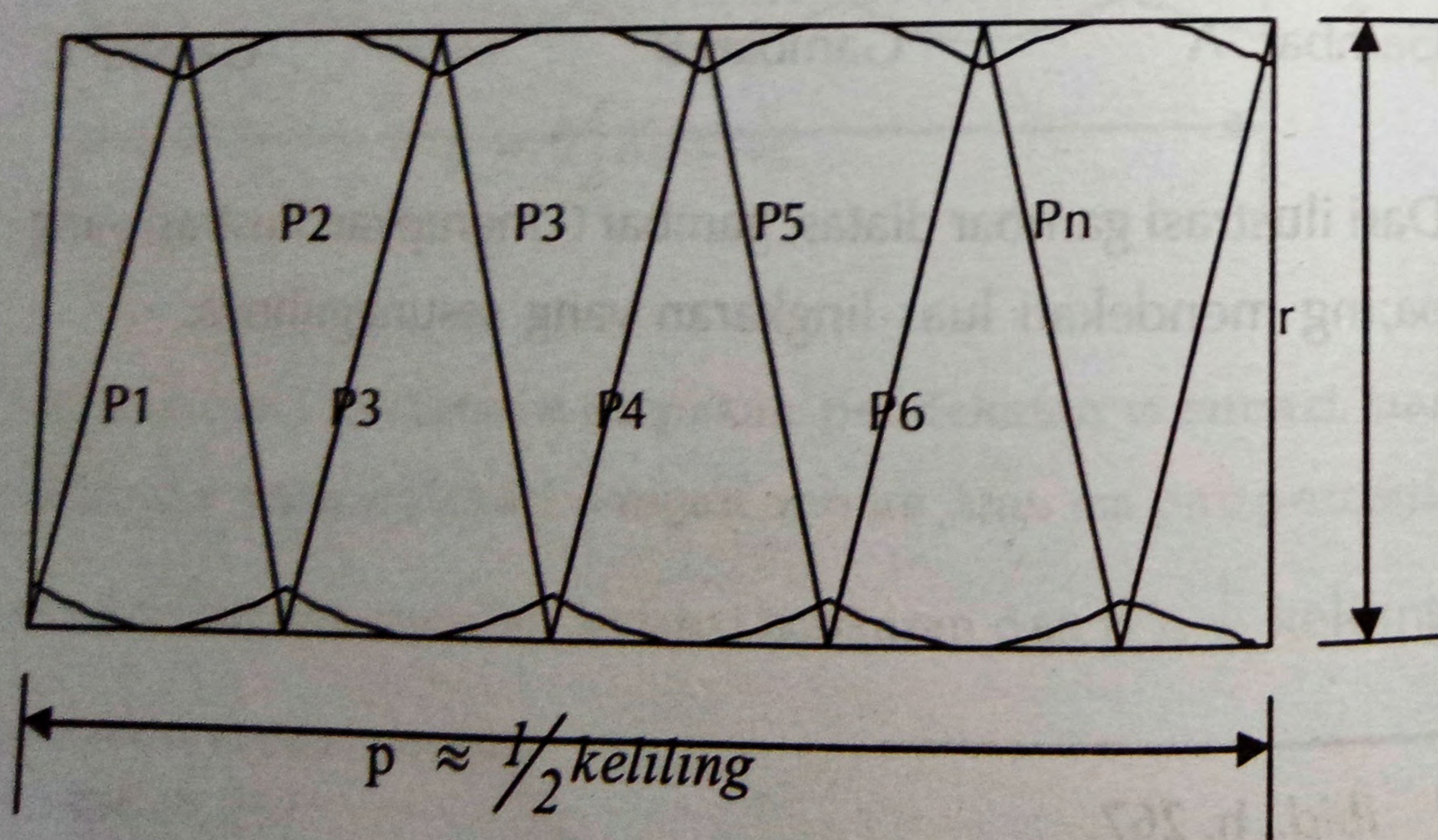
Dari gambar C, bila kita tarik garis kepusat lingkaran, maka akan diperoleh lingkaran yang terbagi menjadi juring-juring.



Luas Lingkaran $\approx \sum_1^n P$ (dimana P : Luas juring / segitiga)

Luas Lingkaran $\approx \sum_1^n P \approx P1 + P2 + P3 + \dots + Pn$

Dan bila juring-juring itu dibentangkan, maka akan terbentuk seperti gambar berikut ini :



Dari gambar diatas luas kumpulan juring $\approx p \cdot r$ (dimana $p \approx \frac{1}{2} \text{ keliling}$)

Luas lingkaran $\approx (\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r) \cdot r$

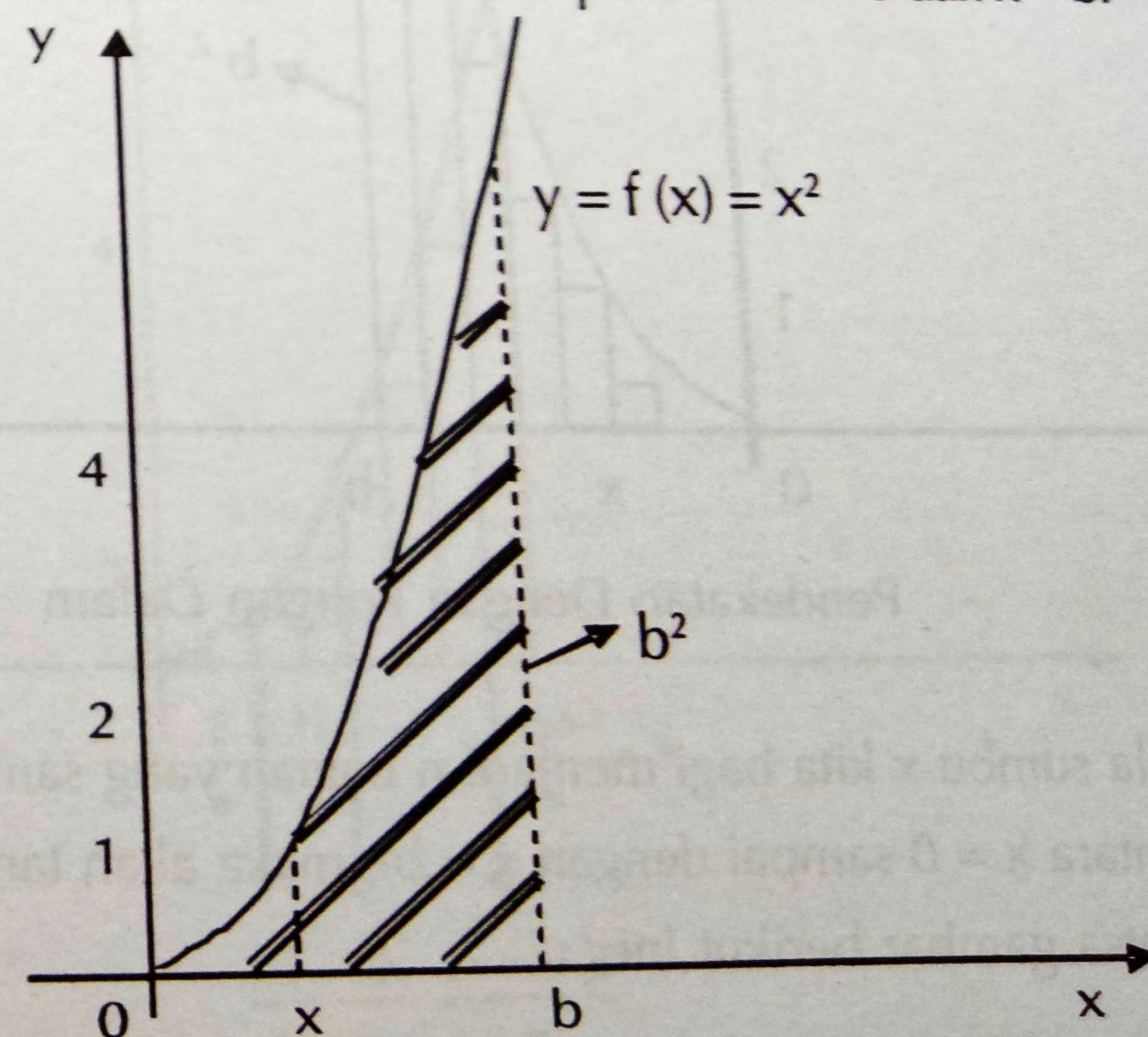
Luas lingkaran $\approx \pi \cdot r^2$ (pendekatan poligon)

Dari kedua ilustrasi penghitungan luas lingkaran diatas yaitu dengan menggunakan poligon dalam dan poligon luar menunjukkan hasil yang sama.

Luas Menurut Poligon Dalam

Penghitungan luas daerah yang di bentuk oleh suatu persamaan fungsi $y = f(x)$ dapat pula didekati dengan perhitungan luas yang menggunakan perhitungan poligon. Dan sebagai gambarannya mari kita lihat suatu fungsi berikut ini:

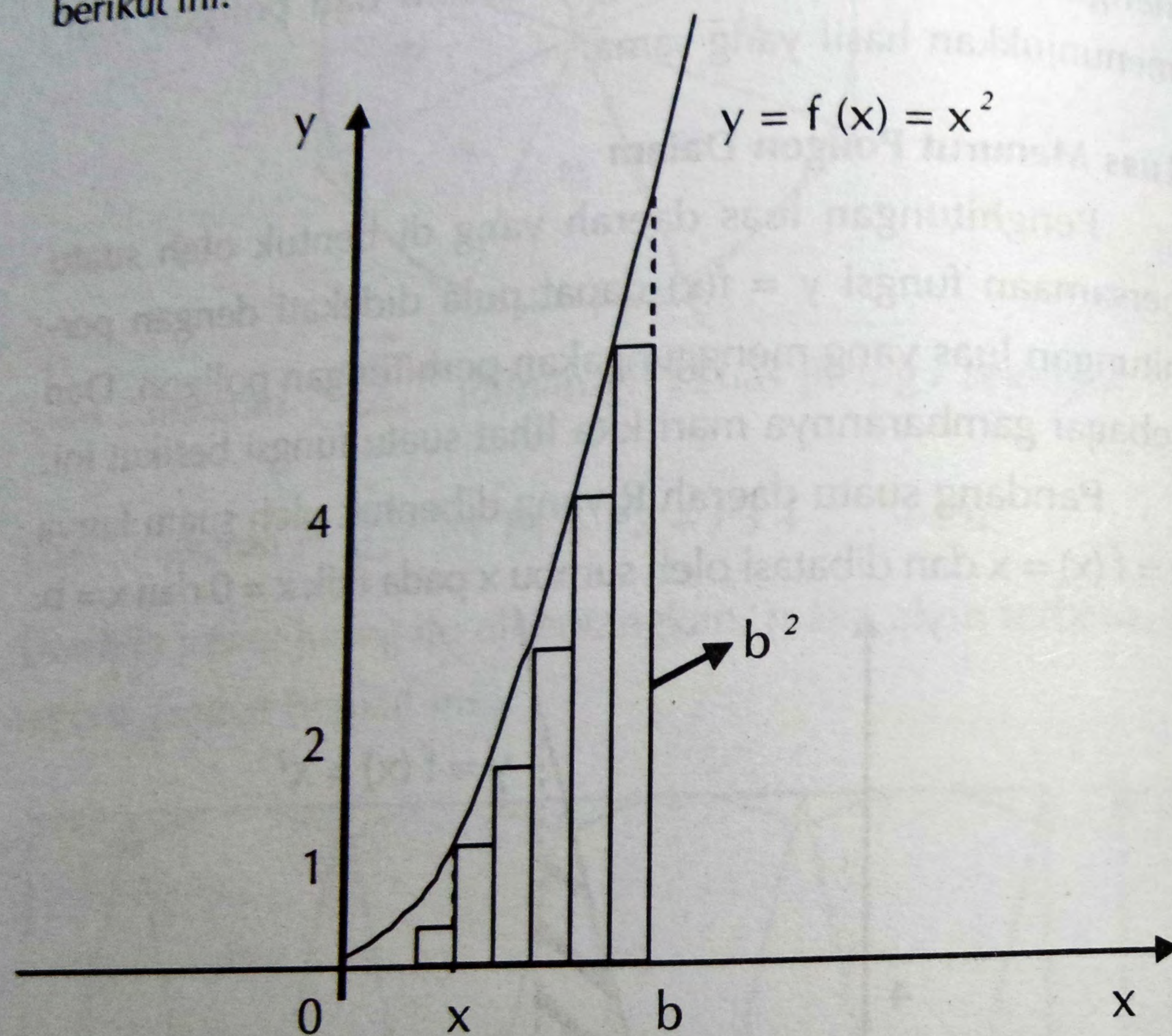
Pandang suatu daerah R yang dibentuk oleh suatu kurva $y = f(x) = x^2$ dan dibatasi oleh sumbu x pada titik $x = 0$ dan $x = b$.



Kita akan hitung luas daerah dibawah kurva $y = f(x) = x^2$ yang dibatasi oleh garis

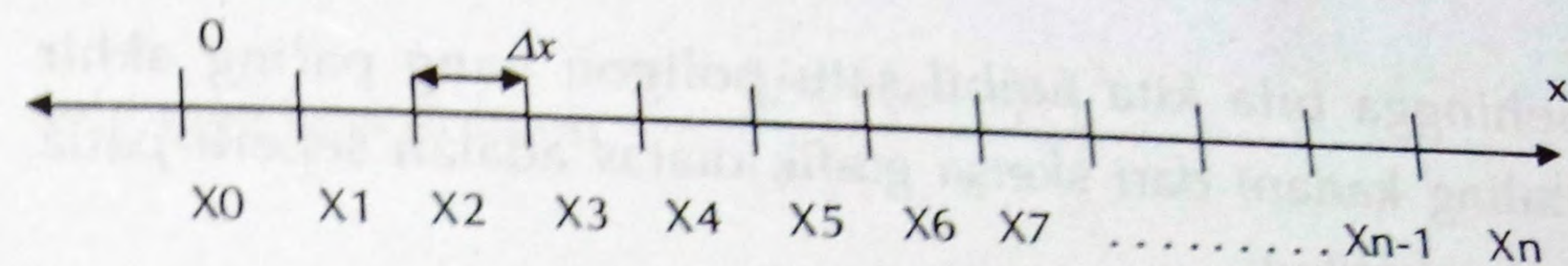
$x = 0$ dan $x = b$ dan garis $y = 0$ (atau sumbu x).

Bila luas daerah di bawah kurva $y = f(x) = x^2$ di bagi dalam beberapa poligon-poligon, maka akan tampak seperti gambar berikut ini:

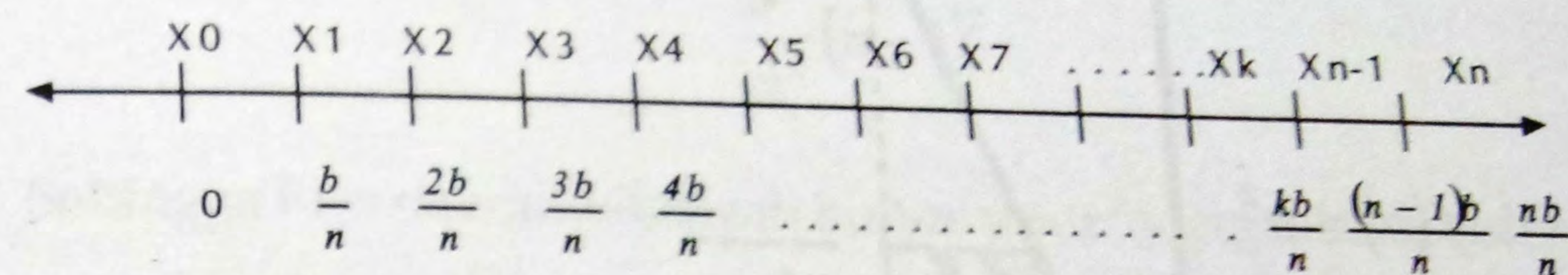


Pendekatan Dengan Poligon Dalam

Bila sumbu x kita bagi menjadi n bagian yang sama panjang (antara $x = 0$ sampai dengan $x = b$), maka akan tampak pada sketsa gambar berikut ini:

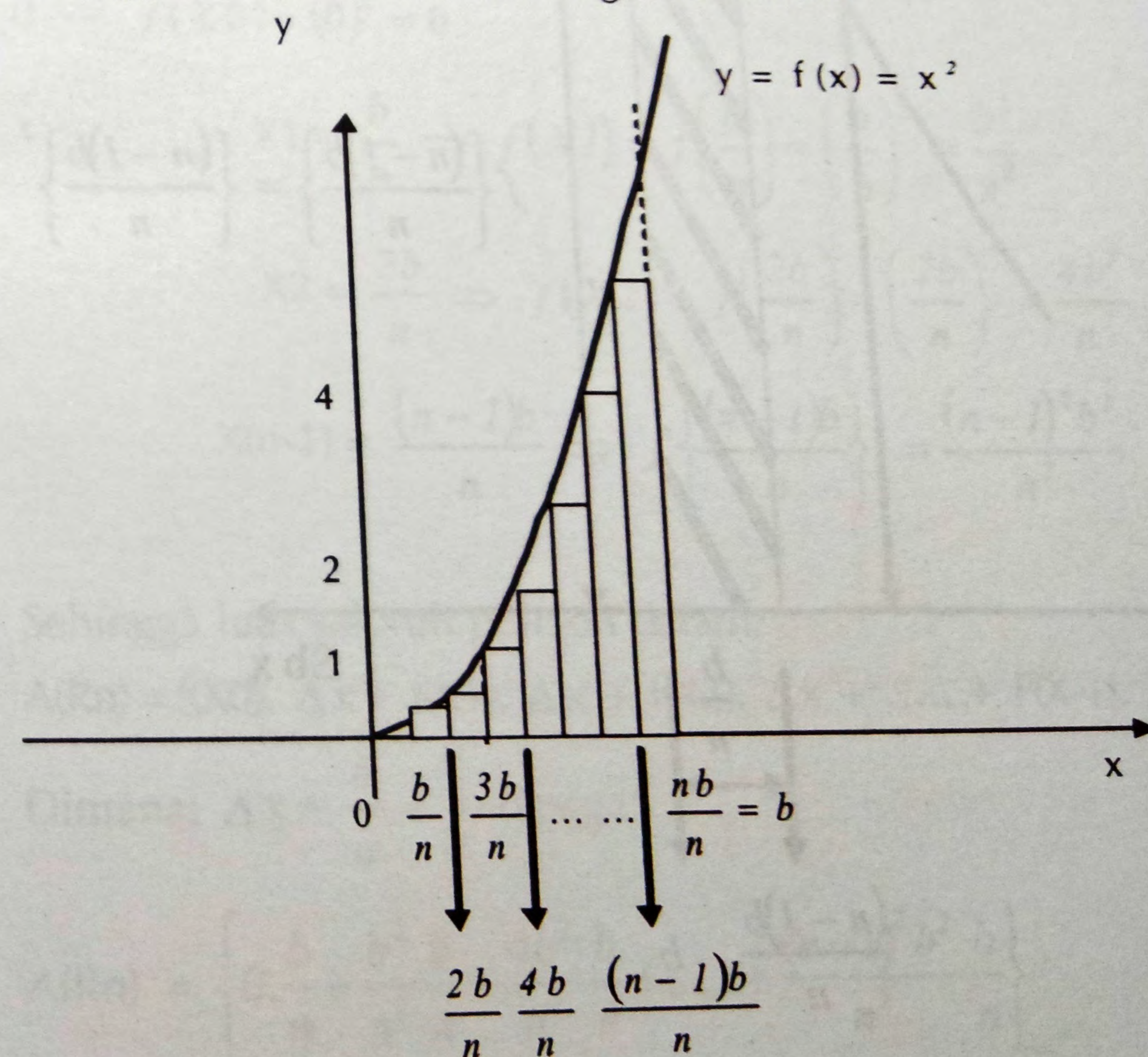


Bila sumbu x (antara 0 dan b) dibagi menjadi n bagian yang sama panjang maka akan didapatkan data sebagai berikut :

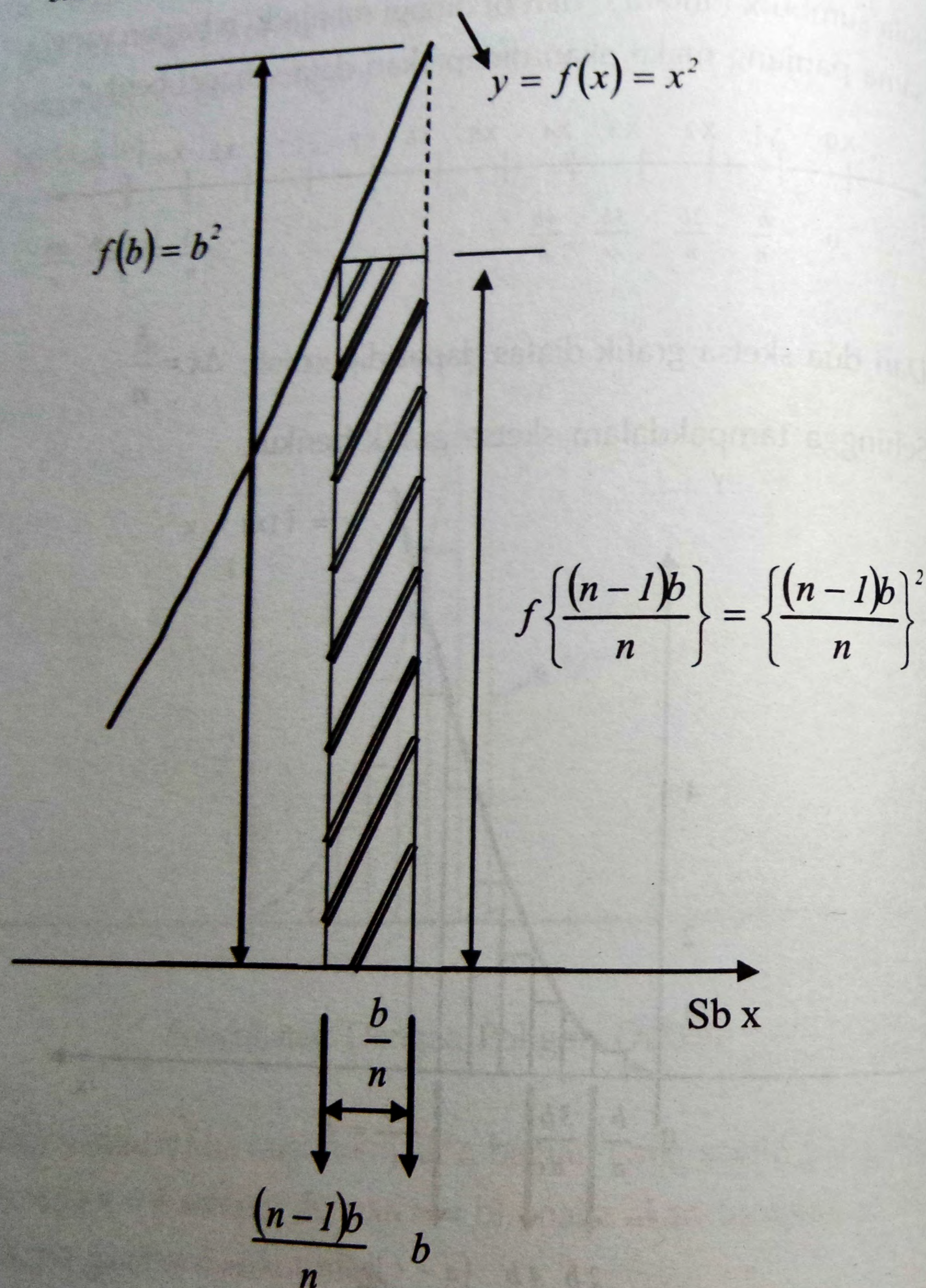


Dari dua sketsa grafik diatas dapat diperoleh: $\Delta x = \frac{b}{n}$

Sehingga tampak dalam sketsa grafik berikut:



Sehingga bila kita ambil satu poligon yang paling akhir (paling kanan) dari sketsa grafik diatas adalah seperti pada sketsa berikut:



$$\begin{aligned}\text{Sehingga luas poligon} &= \left\{ \frac{b}{n} \right\} \left\{ \frac{(n-1)b}{n} \right\}^2 \\ &= \frac{b}{n} \frac{(n-1)^2 b^2}{n^2} \\ &= \frac{b^3}{n^3} (n-1)^2\end{aligned}$$

Sehingga luas daerah dibawah kurva $y = x^2$ yang dibatasi oleh garis $x = 0$; $x = b$ dan $y = 0$ yang didekati dengan pendekatan luas poligon dalam dan dihitung berdasarkan poligon dengan ordinat x adalah $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots, X_{(n-1)}$ dimana: $X_0 = 0 \Rightarrow f(X_0) = (0)^2 = 0$

$$X_1 = \frac{b}{n} \Rightarrow f(X_1) = f\left(\frac{b}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^2}{n^2}$$

$$X_2 = \frac{2b}{n} \Rightarrow f(X_2) = f\left(\frac{2b}{n}\right) = \left(\frac{2b}{n}\right)^2 = \frac{4b^2}{n^2}$$

$$X_{(n-1)} = \frac{(n-1)b}{n} \Rightarrow f\left\{\frac{(n-1)b}{n}\right\}^2 = \frac{(n-1)^2 b^2}{n^2}$$

Sehingga luas seluruh poligon dalam:

$$A(R_n) = f(X_0) \cdot \Delta x + f(X_1) \cdot \Delta x + f(X_2) \cdot \Delta x + \dots + f(X_{n-1}) \cdot \Delta x$$

Dimana: $\Delta x = \frac{b}{n}$ sehingga:

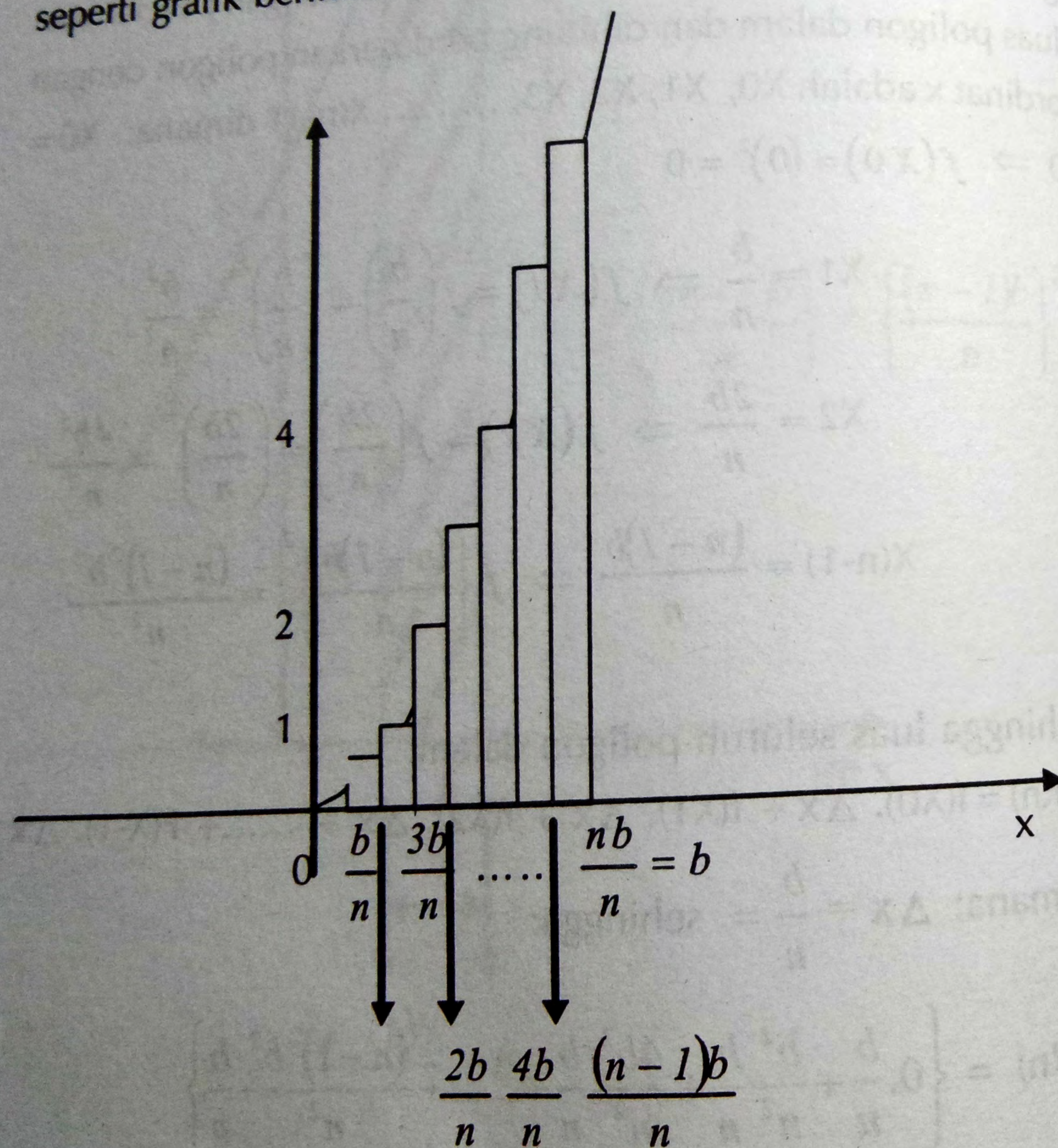
$$A(R_n) = \left\{ 0 \cdot \frac{b}{n} + \frac{b^2}{n^2} \frac{b}{n} + \frac{4b^2}{n^2} \frac{b}{n} + \dots + \frac{(n-1)^2 b^2}{n^2} \frac{b}{n} \right\}$$

$$A(R_n) = \left\{ 0 + \frac{b^3}{n^3} + \frac{4b^3}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2 b^3}{n^3} \right\}$$

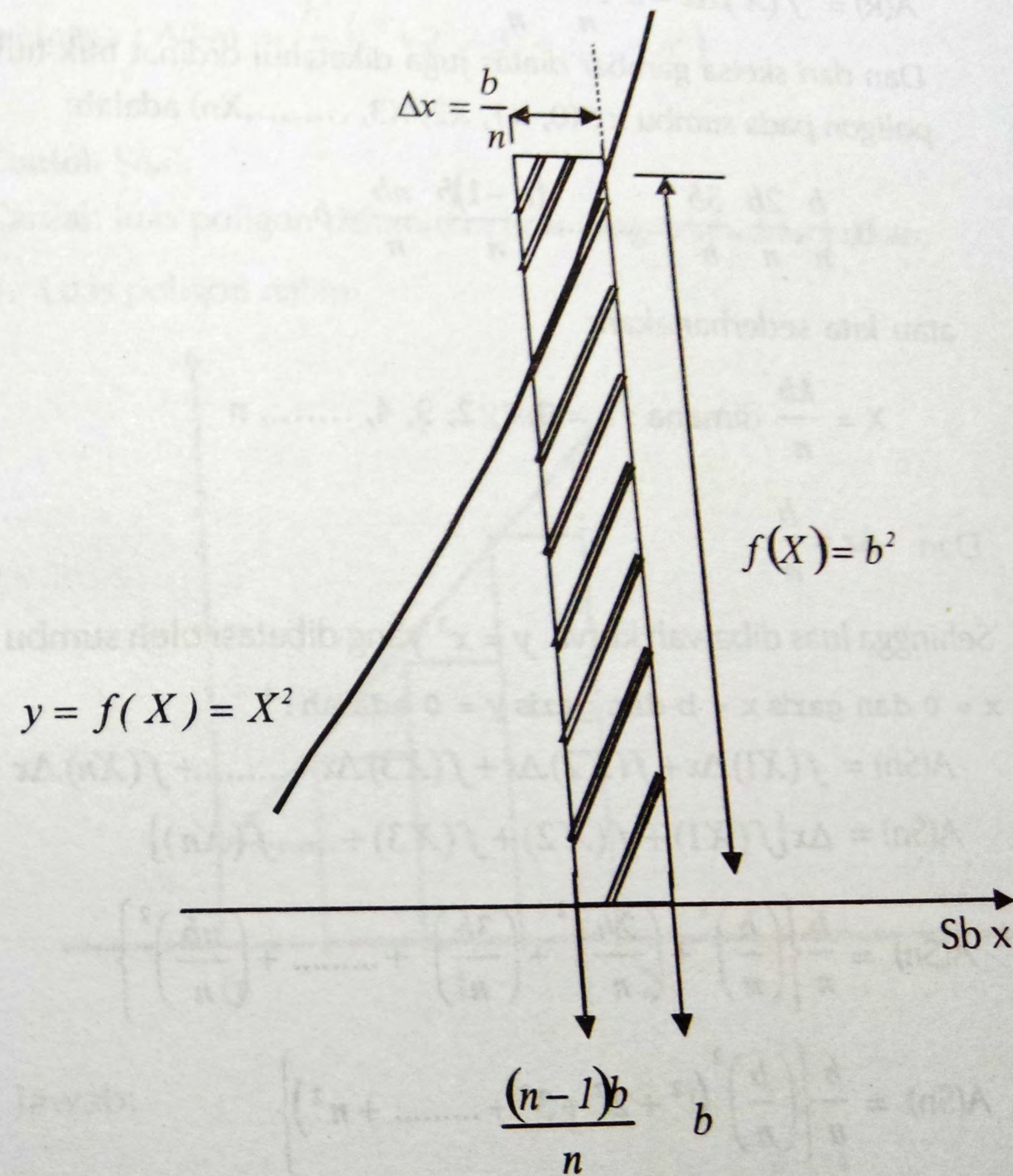
$$\text{Sehingga : } A(R_n) = \frac{b^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2)$$

Luas Menurut Poligon Luar

Bila kurva $y = x^2$ kita dekati dengan poligon luar akan tampak seperti grafik berikut:



Sehingga bila kita ambil satu luasan poligon yaitu yang terakhir (paling kanan) maka dapat digambarkan dalam ilustrasi berikut:



Dari gambar diatas, bisa kita hitung luas satu bidang poligon yaitu:

$$A(R) = f(X)\Delta x = b^2 \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n}$$

Dan dari sketsa gambar diatas juga diketahui ordinat titik-titik poligon pada sumbu x ($X_0, X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$) adalah:

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \dots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b$$

atau kita sederhanakan:

$$X = \frac{kb}{n} \text{ dimana : } k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n$$

$$\text{Dan } \Delta x = \frac{b}{n}$$

Sehingga luas dibawah kurva $y = x^2$ yang dibatasi oleh sumbu $x = 0$ dan garis $x = b$ dan garis $y = 0$ adalah:⁴

$$A(S_n) = f(X_1)\Delta x + f(X_2)\Delta x + f(X_3)\Delta x + \dots + f(X_n)\Delta x$$

$$A(S_n) = \Delta x \{f(X_1) + f(X_2) + f(X_3) + \dots + f(X_n)\}$$

$$A(S_n) = \frac{b}{n} \left\{ \left(\frac{b}{n} \right)^2 + \left(\frac{2b}{n} \right)^2 + \left(\frac{3b}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{nb}{n} \right)^2 \right\}$$

$$A(S_n) = \frac{b}{n} \left\{ \left(\frac{b}{n} \right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \right\}$$

⁴ Ibid., h. 270.

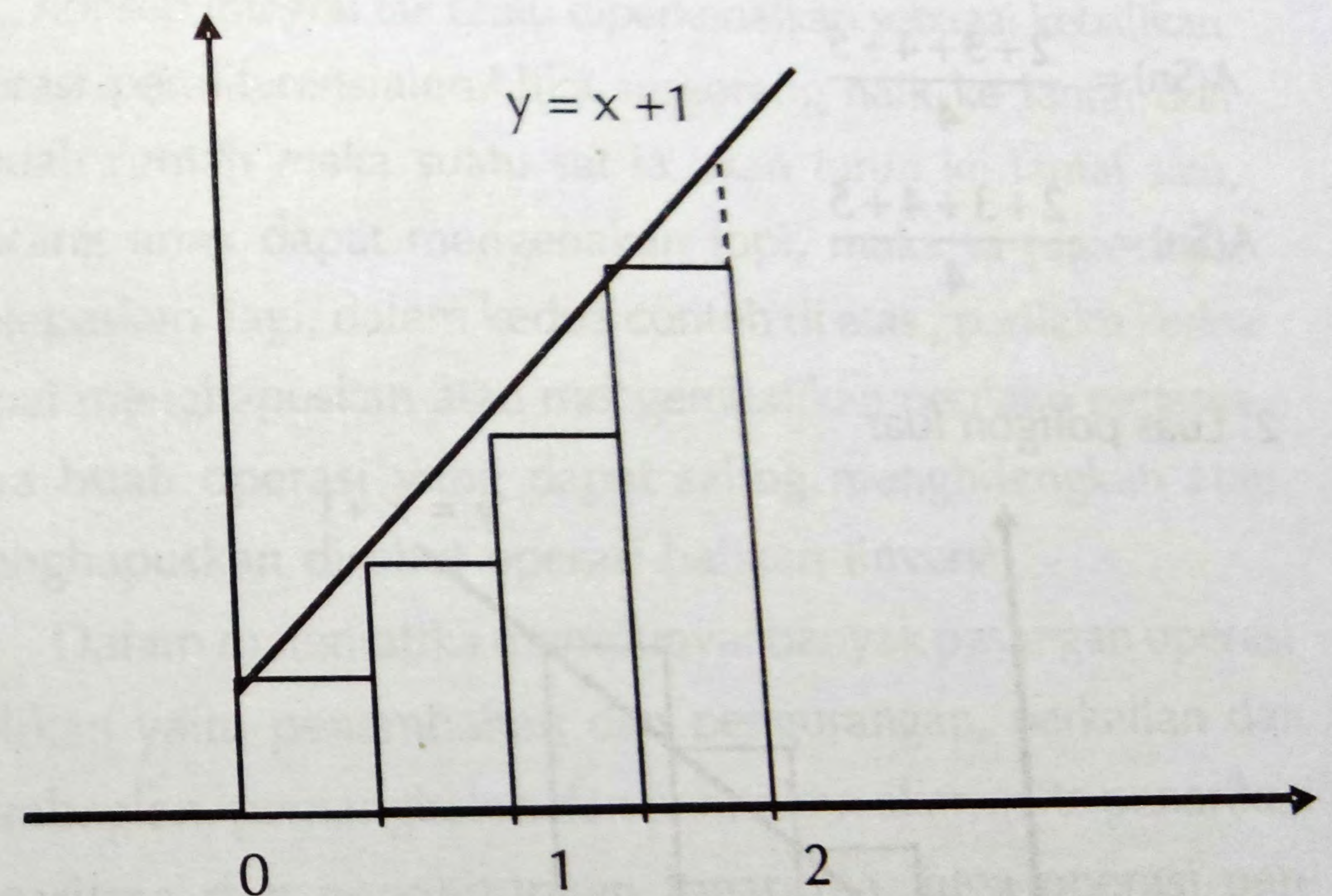
$$A(S_n) = \frac{b}{n} \left\{ \left(\frac{b^2}{n^2} \right) (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \right\}$$

$$\text{Sehingga : } A(S_n) = \frac{b^2}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

Contoh Soal:

Carilah luas poligon dalam dan luar yang telah ditunjukkan:

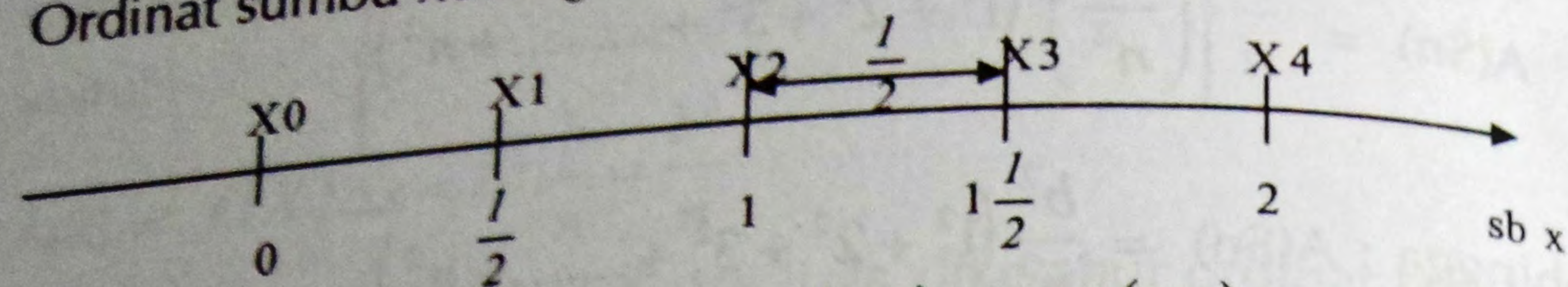
1. Luas poligon dalam



Jawab:

Dari gambar diatas diketahui bahwa $\Delta x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Ordinat sumbu x dari garis poligon:



$$A(S_n) = f(X_0)\Delta x + f(X_1)\Delta x + f(X_2)\Delta x + f(X_3)\Delta x + f(X_4)\Delta x$$

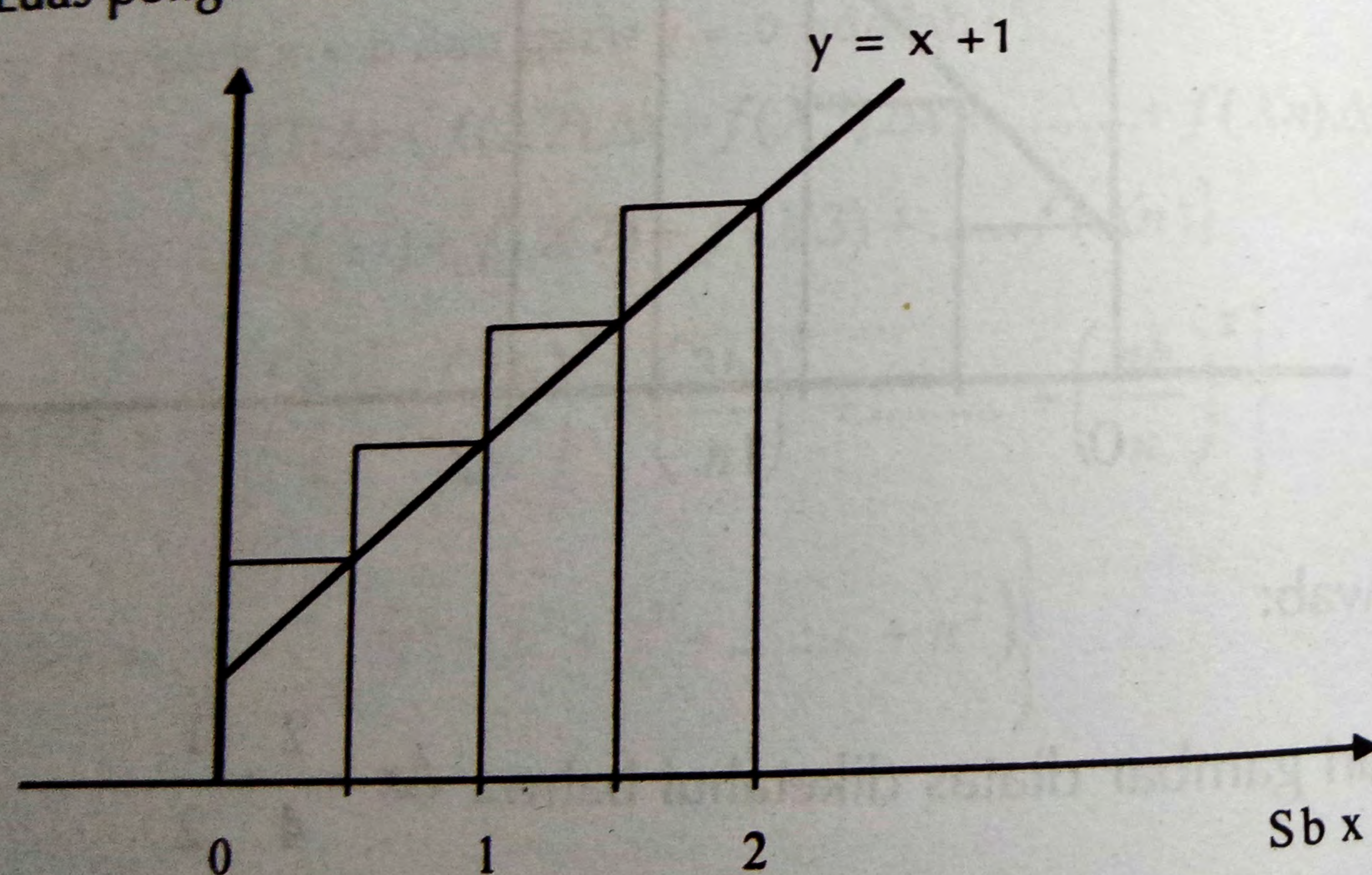
$$A(S_n) = (0 + 1) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2} + (1 + 1) \cdot \frac{1}{2} + \left(1 \frac{1}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$A(S_n) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{5}{4}$$

$$A(S_n) = \frac{2+3+4+5}{4}$$

$$A(S_n) = \frac{2+3+4+5}{4}$$

2. Luas poligon luar



$$A(S_n) = f(X_1)\Delta x + f(X_2)\Delta x + f(X_3)\Delta x + f(X_4)\Delta x$$

$$A(S_n) = \{f(X_1) + f(X_2) + f(X_3) + f(X_4)\}$$

$$A(S_n) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + (1 + 1) + \left(1 \frac{1}{2} + 1 \right) + (1 + 1) \right\}$$

$$A(S_n) = \frac{1}{2} \left(1 \frac{1}{2} + 2 + 2 \frac{1}{2} + 3 \right)$$

$$A(S_n) = 4 \frac{1}{2}$$

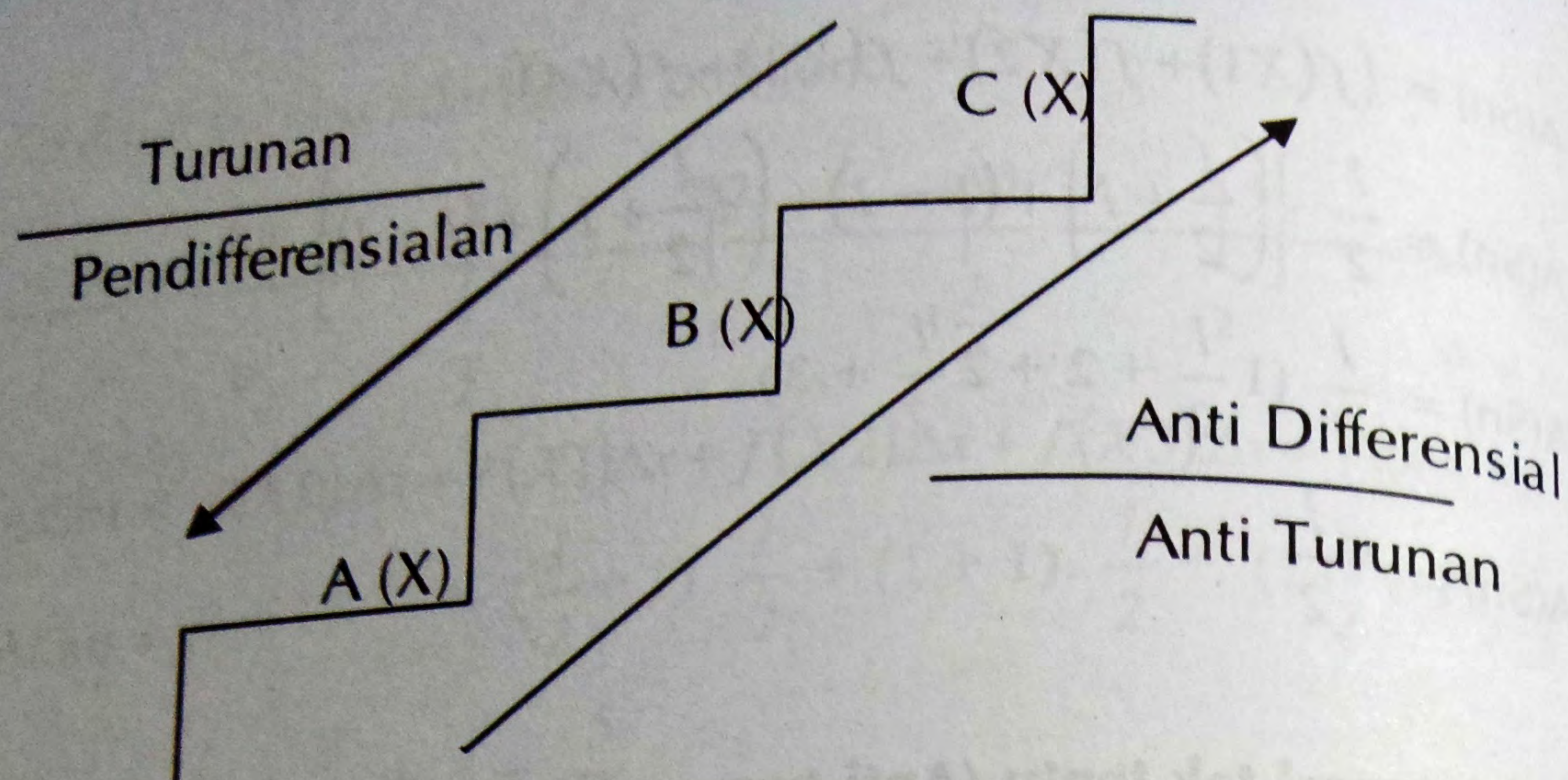
1.2. Integral tak tentu (Anti turunan)

Konsep integral tak tentu diperkenalkan sebagai kebalikan operasi pendiferensialan.⁵ Jika seseorang naik ke lantai dua sebuah rumah maka suatu saat ia akan turun ke lantai satu, seorang anak dapat mengenakan topi, maka ia juga dapat melepaskan lagi, dalam kedua contoh di atas, perilaku kedua dapat menghapuskan atau mengembalikan perilaku pertama. Dua buah operasi yang dapat saling menghilangkan atau menghapuskan disebut operasi balikan (invers).

Dalam matematika mempunyai banyak pasangan operasi balikan yaitu penambahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, pemangkatan dan penarikan akar, serta penarikan logaritma dan penghitungan logaritma, juga operasi pendiferensialan (turunan) memiliki balikan anti differensial (anti turunan).⁶

⁵ Koko Martono, Kalkulus, Erlangga Bandung 1999, h.169.

⁶ Edwin J. Purcell, Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1, Erlangga, Bandung 1999, h. 243.



Misalkan turunan dinotasikan dengan Dx .⁷ Dan dalam gambar di atas, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ adalah merupakan suatu fungsi, maka:

$$DA(x) = B(x) \quad \text{dan} \quad DB(x) = A(x)$$

Dan bila anti turunan dinotasikan dengan $A(x)$, maka:

$$AA(x) = B(x) \quad \text{dan} \quad AB(x) = C(x)$$

Definisi:⁸

1. Jika suatu fungsi F disebut sebagai anti turunan dari fungsi f pada daerah asal (selang) I , yakni jika: $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I atau $DF = f$ dalam selang I , dimana F' dibaca F "aksen" dan suatu fungsi f terdifferensialkan pada selang terbuka I , jika $f'(x) = 0$ pada I maka $f(x) = C$, dimana C konstanta real.⁹

Bukti:

Fungsi f yang terdifferensialkan pada selang tertutup I yang memiliki titik ujung x dan x_1 dengan $x \in I$, maka terdapat P diantara x dan x_1 yang memenuhi persamaan:¹⁰

$$f'(p) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Karena $f'(x) = 0$ pada I , maka $f'(p) = 0$

Sehingga:

$$0 = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (\text{perkalian silang})$$

$$0 = f(x) - f(x_1)$$

$$\text{atau } f(x) = f(x_1)$$

Karena $f(x_1) = C$ (fungsi untuk $x = x_1$ adalah konstanta)

$$\text{Maka } f(x) = f(x_1) = C$$

Sehingga bila (konstanta) maka $f'(x) = 0$

3. Jika $F'(x) = G'(x)$ untuk semua x dalam daerah asal (a,b) terdapat konstanta C , sedemikian hingga $F(x) = G(x) + C$ untuk x dalam (a,b)

Bukti:

Karena $f'(x) = g'(x)$ pada selang I , maka $f'(x) - g'(x) = 0$ ¹¹

⁷ Ibid., h. 144.

⁸ Ibid., h. 243.

⁹ Koko Martono, Kalkulus, Erlangga Bandung 1999, h. 170.

¹⁰ Koko Martono, Kalkulus, Erlangga Bandung 1999, h. 88.

¹¹ Ibid., h. 91.

Sehingga $(f - g)'(x) = 0$ dan berdasarkan pembuktian teorema sebelumnya (jika $f'(x) = 0$ maka $f(x) = C$)
 Sehingga : $(f - g)'(x) = 0$ maka $(f - g)(x) = C$
 Dan $(f - g)(x) = C$ maka $f(x) - g(x) = C$ atau $f(x) = g(x) + C$

Contoh :

1. Carilah anti turunan dari fungsi $f(x) = 2x$

Jawab:

Kita akan mencari suatu persamaan fungsi yang memenuhi fungsi $F'(x) = 2x$ (untuk semua x), dari pengalaman yang diperoleh bahwa:

Jika $F'(x) = 2x$ adalah jika dan hanya jika $F(x) = x^2 + C$

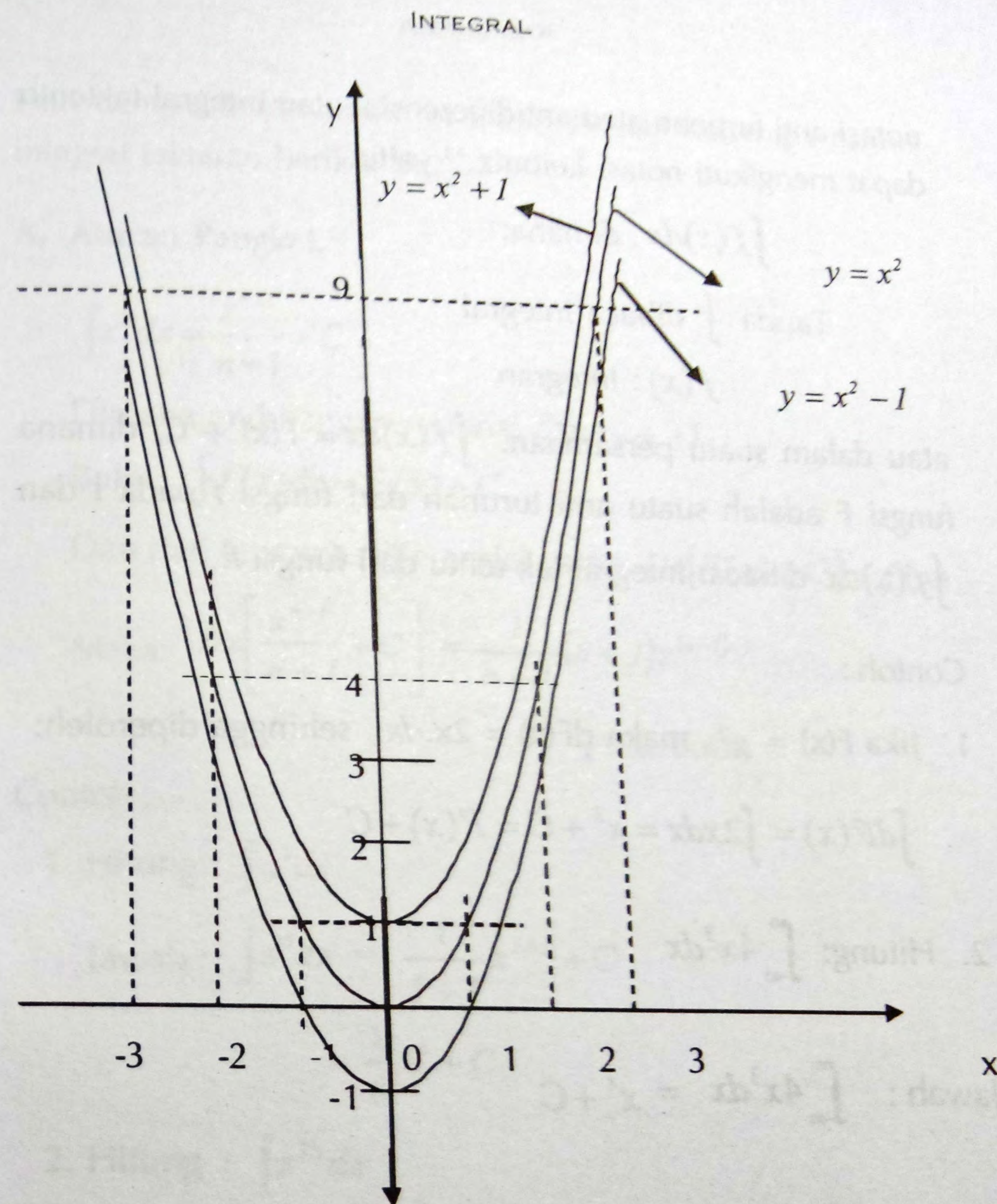
Dan dari persamaan diatas dipenuhi oleh:

$$F(x) = x^2 + 1, \text{ maka } F'(x) = 2x$$

$$F(x) = x^2 - 3, \text{ maka } F'(x) = 2x$$

$$F(x) = x^2 + 4, \text{ maka } F'(x) = 2x, \text{ dan seterusnya}$$

Sehingga akan kita simpulkan bahwa bila $F(x) = x^2 + C$, maka $F'(x) = 2x$ dan ini berlaku untuk selang daerah asal $(-\infty, \infty)$ atau akan terlihat dalam ilustrasi gambar berikut ini:



Proses menentukan anti differensial dari fungsi f pada selang I dinamakan integral tak tentu dari fungsi f pada selang I dinamakan integral tak tentu dari fungsi f pada selang I .¹² Dan

¹² Ibid., h. 170.

notasi anti turunan atau antidifferensial atau integral tak tentu dapat mengikuti notasi Leibniz.¹³ yaitu:

$$\int f(x)dx, \text{ dimana:}$$

Tanda $\int$: dibaca Integral

$f(x)$: Integran

atau dalam suatu persamaan: $\int f(x)dx = F(x) + C$, dimana fungsi F adalah suatu anti turunan dari fungsi f pada I dan $\int f(x)dx$ dibaca: Integral tak tentu dari fungsi f .

Contoh :

1. Jika $F(x) = x^2$, maka $dF(x) = 2x \cdot dx$, sehingga diperoleh:

$$\int dF(x) = \int 2x dx = x^2 + C = F(x) + C$$

2. Hitung: $\int_{-\infty}^{\infty} 4x^3 dx$

$$\text{Jawab: } \int_{-\infty}^{\infty} 4x^3 dx = x^4 + C$$

Karena hasil integral tak tentu adalah suatu anti turunan ditambah konstanta real, maka rumus integral tak tentu langsung akan diperoleh dari rumus differensial yang berkaitan.¹⁴

¹³ Edwin J. Purcell, Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1, Erlangga, Bandung 1999, h. 244.

¹⁴ Koko Martono, Kalkulus, Erlangga Bandung 1999, h. 170.

Dan dengan berdasarkan ini kita akan kaji beberapa rumus integral tak tentu berikut ini.

A. Aturan Pangkat.¹⁵

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Dimana : n bilangan rasional dan $n \neq -1$

$$\text{Bukti: } \int f(x)dx = F(x) + C$$

Dan dari teorema differensial yaitu: $Dx[F(x) + C] = f(x)$

$$\begin{aligned} \text{Maka: } Dx \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right] &= \frac{1}{n+1} (n+1) x^{(n+1)-1} \\ &= x^n \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

Contoh :

1. Hitung : $\int x^5 dx$

$$\begin{aligned} \text{Jawab: } \int x^5 dx &= \frac{1}{5+1} x^{5+1} + C \\ &= \frac{1}{6} x^6 + C \end{aligned}$$

2. Hitung : $\int x^{\frac{2}{3}} dx$

$$\begin{aligned} \text{Jawab: } \int x^{\frac{2}{3}} dx &= \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} + C \\ &= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C \end{aligned}$$

¹⁵ Ibid., h. 171.

B. Aturan Sinus dan Cosinus

Bentuk anti turunan dari fungsi sinus dan cosinus dapat dilihat pada persamaan berikut:¹⁶

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$$

Bukti: Dari teorema differensial kita peroleh:

$$Dx(-\cos x) = \sin x$$

$$Dx(\sin x) = \cos x$$

C. Operasional Integral tak tentu.

Andaikan $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai anti turunan dan k adalah konstanta, maka:¹⁷

$$\text{i. } \int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\text{ii. } \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\text{iii. } \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Bukti:

$$\text{i. } Dx[k \int f(x) dx] = k Dx \int f(x) dx = k \cdot f(x)$$

$$\text{Dimana: } Dx \int f(x) dx = f(x)$$

¹⁶ Edwin J. Purcell, Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1, Erlangga, Bandung 1999, h. 245.

¹⁷ Ibid., h. 246.

$$\text{ii. } Dx \left[\int f(x) dx + \int g(x) dx \right] = Dx \int f(x) dx + Dx \int g(x) dx \\ = f(x) + g(x)$$

$$\text{iii. } Dx \left[\int f(x) dx - \int g(x) dx \right] = Dx \int f(x) dx - Dx \int g(x) dx \\ = f(x) - g(x)$$

Contoh :

$$1. \text{ Hitung : } \int (5x^2 + 2x^5) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Jawab : } &= \int (5x^2 + 2x^5) dx = \int 5x^2 dx + \int 2x^5 dx \\ &= 5 \int x^2 dx + 2 \int x^5 dx \\ &= 5 \left(\frac{1}{3} x^3 + C_1 \right) + 2 \left(\frac{1}{6} x^6 + C_2 \right) \\ &= \frac{5}{3} x^3 + 5C_1 + \frac{2}{6} x^6 + 2C_2 \\ &= \frac{5}{3} x^3 + \frac{1}{3} x^6 + (5C_1 + 2C_2) \end{aligned}$$

Dimana: $5C_1 + 2C_2 = C$ (Konstanta)

$$\text{Maka : } \frac{5}{3} x^3 + \frac{1}{3} x^6 + C$$

$$2. \text{ Hitung : } \int (8x^3 - x^2) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Jawab : } &\int (8x^3 - x^2) dx = \int 8x^3 dx - \int x^2 dx \\ &= 8 \int x^3 dx - \int x^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8\left(\frac{1}{4}x^4 + C_1\right) - \left(\frac{1}{3}x^3 + C_2\right) \\
&= \frac{8}{4}x^4 + 8C_1 - \frac{1}{3}x^3 - C_2 \\
&= 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + (8C_1 - C_2) \\
&= 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + C \text{ dimana: } 8C_1 - C_2 = C \text{ (konstanta)}
\end{aligned}$$

D. Aturan Pangkat

Andaikan g adalah suatu fungsi yang dapat dideferensialkan dan r suatu bilangan rasional yang bukan -1 , maka:¹⁸

$$\int [g(x)]^r g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Contoh :

Carilah anti turunan dari persamaan berikut :

$$1. f(x) = (x^3 + 6x)^5 (6x^2 + 12) dx$$

$$2. f(x) = (x^2 - 4)^4 \cdot 8x \cdot dx$$

Jawab :

$$1. f(x) = (x^3 + 6x)^5 (6x^2 + 12) dx$$

Misalkan $U = x^3 + 6x$

$$\text{Maka : } \frac{du}{dx} = 3x^2 + 6$$

$$du = (3x^2 + 6) dx$$

INTEGRAL

$$2du = 2(3x^2 + 6) dx$$

$$2du = (6x^2 + 12) dx$$

Maka :

$$\int (x^3 + 6x)^5 (6x^2 + 12) dx, \text{ dimana : } U = x^3 + 6x$$

$$\text{sehingga : } = \int u^5 \cdot 2du$$

$$= 2 \int u^5 \cdot du$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6} U^6 + C$$

$$= \frac{1}{3} U^6 + C$$

$$= \frac{1}{3} (x^3 + 6x)^6 + C$$

$$2. f(x) = (x^2 - 4)^4 \cdot 8x \cdot dx$$

Jawab : Misalkan : $U = x^2 - 4$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$du = 2x \cdot dx$$

$$4du = 8x \cdot dx$$

$$\text{Maka : } \int (x^2 - 4)^4 \cdot 8x \cdot dx = \int U^4 4du$$

$$= 4 \int U^4 du$$

¹⁸ Ibid., h. 247.

$$= 4\left(\frac{1}{5}U^5\right) + C$$

$$= \frac{4}{5}(x^2 - 4)^5 + C$$

1.3. Notasi Jumlah dan Sigma (Σ)

Notasi Σ (sigma) berasal dari huruf besar sigma yunani. Notasi Σ mempunyai arti menjumlahkan atau menambahkan semua bilangan berbentuk seperti yang ditunjukkan selama indeks i menjelajahi bilangan bulat positif, dan dimulai dari bilangan yang diperlihatkan di bawah tanda Σ dan berakhir dengan bilangan diatas tanda Σ .¹⁹

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Jika : $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = a$

Maka : $\sum_{i=1}^n a_i = a + a + a + \dots + a = n.a$

Dimana : a_n : Suku ke n

Sehingga : $\sum_{i=1}^n a_i = n.a$

Contoh : $\sum_{i=1}^n 5 = 10(5) = 50$

$$\sum_{i=1}^{100} -10 = 100.(-10) = -1000$$

¹⁹ Ibid., h. 260.

$$\sum_{i=1}^n ca_i = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \dots + ca_n \text{ dimana : } c = \text{Konstanta}$$

$$\sum_{i=1}^n ca_i = c(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

Sehingga didapatkan rumus : $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

Sehingga : $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$

Contoh :

Andaikan bahwa $\sum_{i=1}^n a_i = 150$ dan $\sum_{i=1}^n b_i = 75$

Hitung : $\sum_{i=1}^{50} (3a_i + 2b_i - 4)$

$$\begin{aligned} \text{Jawab : } \sum_{i=1}^{50} (3a_i + 2b_i - 4) &= \sum_{i=1}^{50} 3a_i + \sum_{i=1}^{50} 2b_i - \sum_{i=1}^{50} 4 \\ &= 3 \sum_{i=1}^{50} a_i + 2 \sum_{i=1}^{50} b_i - \sum_{i=1}^{50} 4 \\ &= 3(150) + 2(75) - 50(4) \\ &= 450 + 150 - 200 \\ &= 400 \end{aligned}$$

Untuk bilangan bulat positif, terdapat rumus jumlah khusus, beserta pangkatnya:²⁰

$$1. \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$4. \sum_{i=1}^n i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

Bukti Rumus :

1. Dengan identitas : $(i+1)^2 - i^2 = 2i + 1$

$$\sum_{i=1}^n [(i+1)^2 - i^2] = \sum_{i=1}^n (2i + 1)$$

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$$

$$(n^2 + 2n + 1) - 1 = 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$$

$$n^2 + 2n = 2 \sum_{i=1}^n i + n$$

$$n^2 + n = 2 \sum_{i=1}^n i$$

$$\frac{n^2 + n}{2} = \sum_{i=1}^n i$$

²⁰ Ibid., h. 262.

$$2. (i+1)^2 - i^2 = 3i^2 + 3i + 1$$

$$\sum_{i=1}^n [(i+1)^3 - i^3] = \sum_{i=1}^n (3i^2 + 3i + 1)$$

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \frac{n^2 + n}{2} + n$$

$$\text{dimana : } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \times 2$$

$$2n^3 + 6n^2 + 6n = 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 3n^2 + 3n + 2n$$

$$2n^3 + 3n^2 + n = 6 \sum_{i=1}^n i^2$$

$$\text{maka : } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

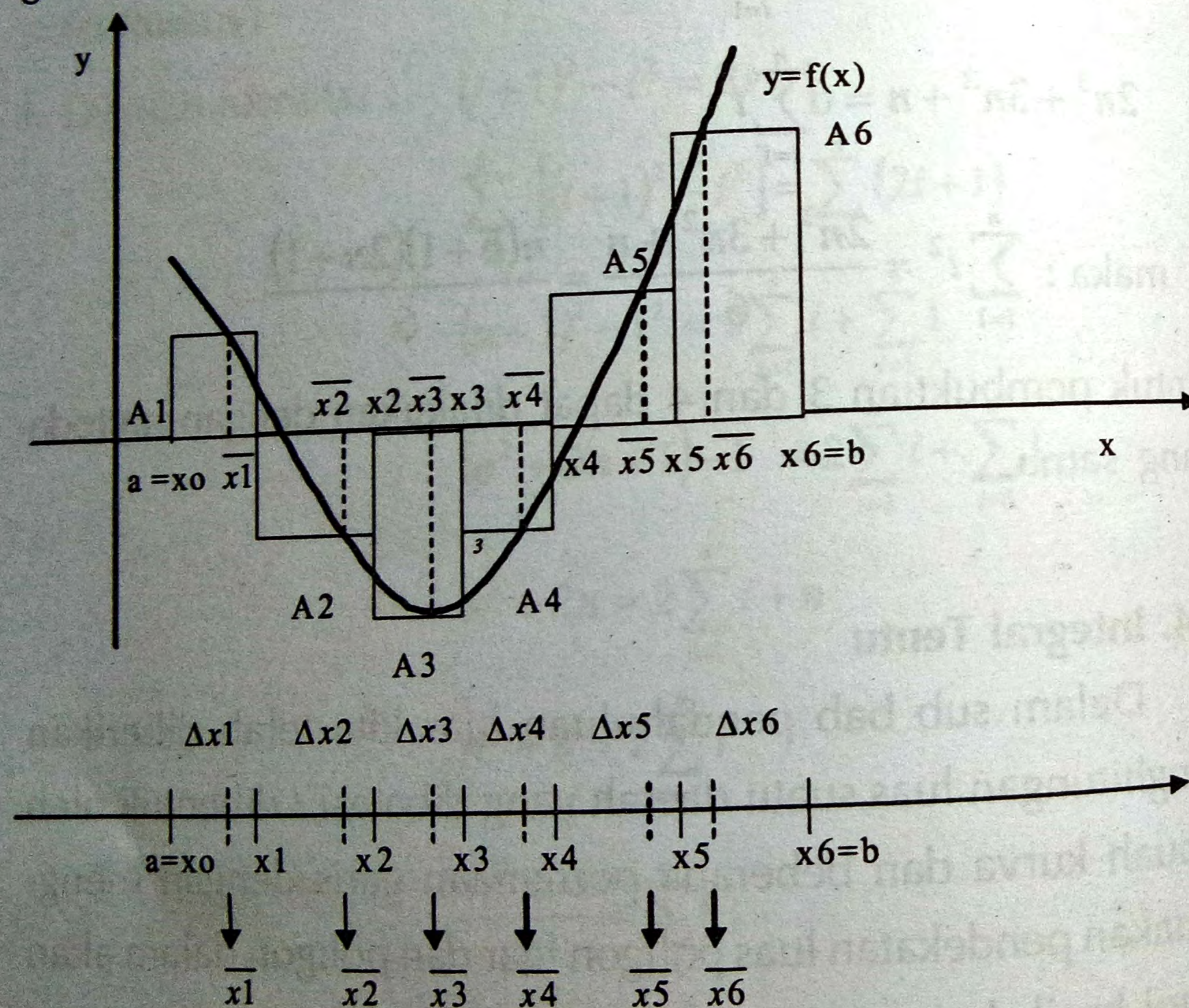
Untuk pembuktian 3 dan 4 dapat dilakukan dengan metoda yang sama.

1.4. Integral Tentu

Dalam sub bab pendahuluan luas kita telah diberikan penghitungan luas suatu daerah yang dibatasi / dibentuk oleh sebuah kurva dan beberapa persamaan garis dengan menggunakan pendekatan luas poligon luar dan poligon dalam akan tetapi hasil dari pendekatan tersebut sangat kurang memuaskan kita.

Dan dengan metode integral tentu ini kita akan semakin mendapatkan hasil perhitungan luas bidang yang dibentuk oleh sebuah kurva dan beberapa persamaan garis, yang mendekati dengan luas actual.

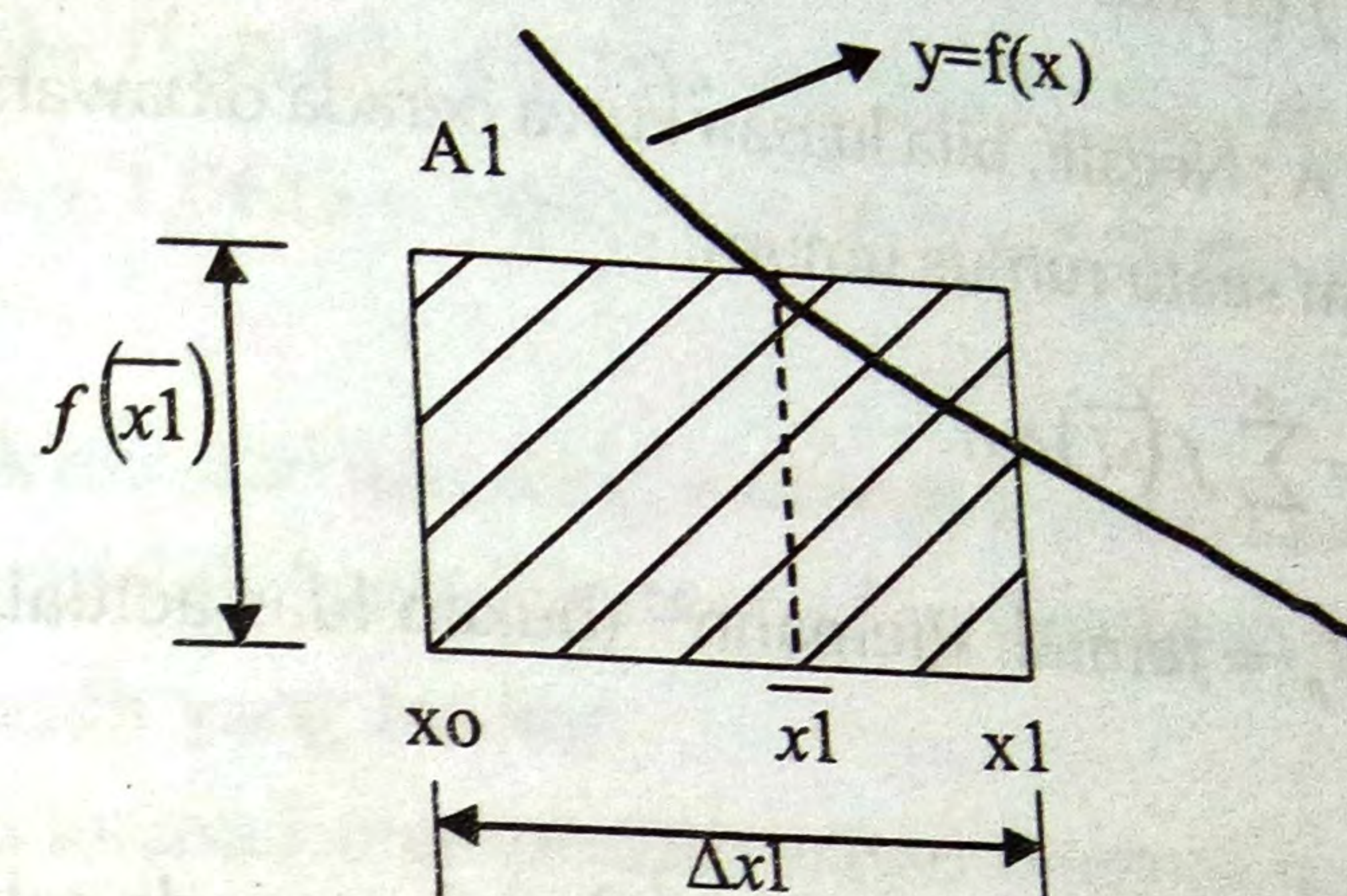
Metode integral tentu ini pertama dikemukakan/dibahas oleh tiga orang matematikawan dunia, yaitu Newton, Leibniz dan Reimann, akhirnya Reimann lah yang memberikan definisi modern tentang Integral Tentu yang di kenal dengan jumlah Riemann, seperti dalam ilustrasi berikut,²¹ Bahwasannya kita diminta menghitung luas yang dibentuk oleh sebuah kurva dan garis $y = 0$ (sumbu x) yang dibatasi a dan b pada sumbu x.



²¹ Ibid., h. 274.

x_i : Titik partisi

$\bar{x}_i$: Titik sampel



Pandang suatu partisi P dari selang $[a, b]$ menjadi n selang bagian (tak perlu berpanjang sama) memakai titik $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

dan andaikan $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

Pada tiap selang bagian (x_i, x_{i-1}) ambil sebuah titik sembarang $\bar{x}_i$ (titik sample) untuk selang bagian ke i maka, masing – masing luasan adalah :

$$A_1 = f(\bar{x}_1) \cdot \Delta x_1$$

$$A_2 = f(\bar{x}_2) \cdot \Delta x_2$$

$$A_3 = f(\bar{x}_3) \cdot \Delta x_3$$

$$A_4 = f(\bar{x}_4) \cdot \Delta x_4$$

$$A_5 = f(\bar{x}_5) \cdot \Delta x_5$$

$$A_6 = f(\bar{x}_6) \cdot \Delta x_6$$

Atau dapat dimuskan:²²

$$\sum_{i=1}^6 f(\bar{x}_i) \Delta x_i = A1 + (-A2) + (-A3) + (-A4) + A5 + A6$$

Nilai A : Negatif, bila luasan kurva berada dibawah sumbu x

Atau dalam suatu rumus umum:

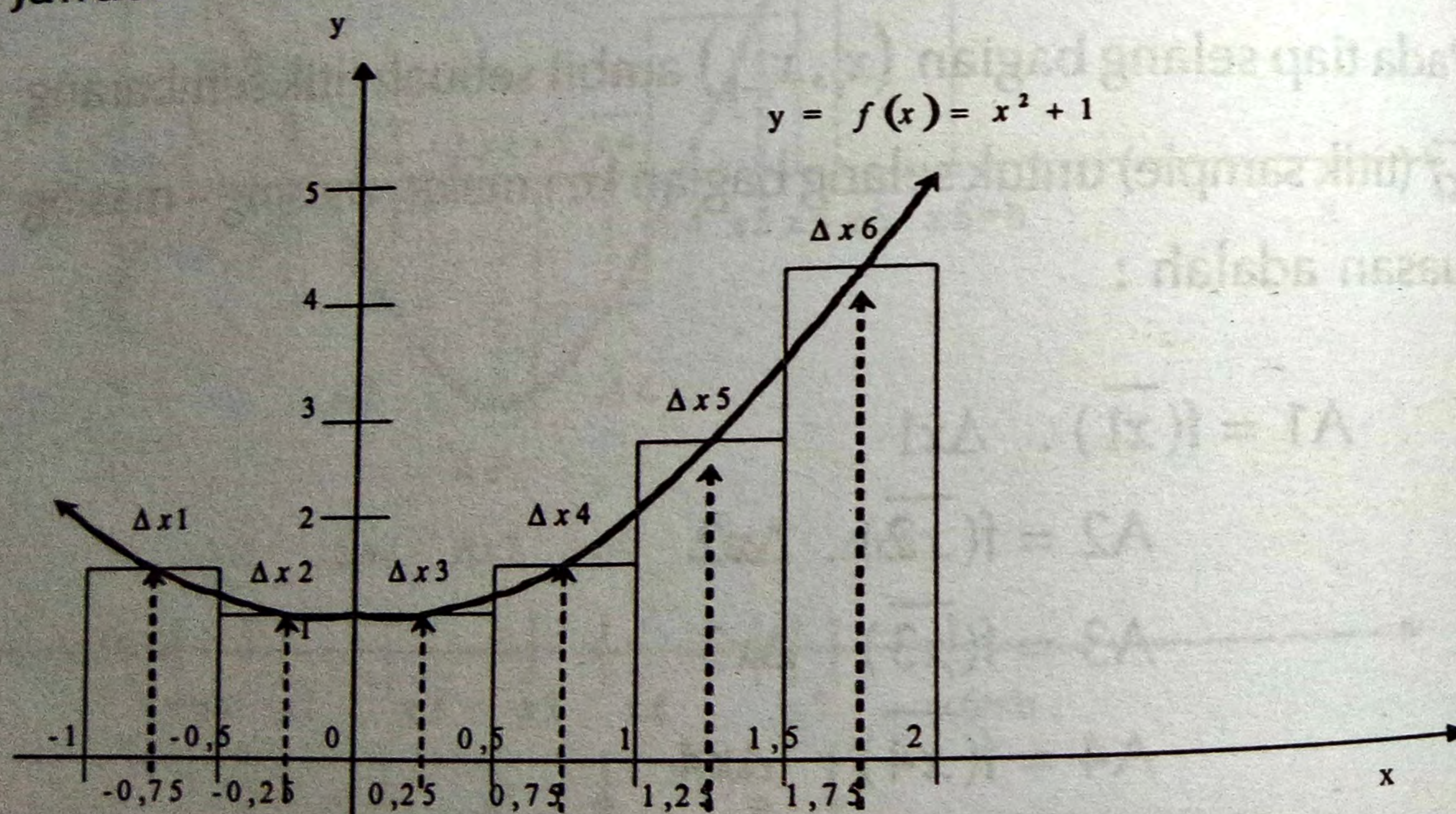
$$R_p = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

Dimana : R_p = Jumlah Riemann²³ (bukan luas actual)

Contoh :

Hitung jumlah Riemann untuk $f(x) = x^2 + 1$ pada selang $[-1, 2]$ memakai titik partisi berjarak sama $-1 < -0,5 < 0 < 0,5 < 1 < 1,5 < 2$, dengan titik sample $\bar{x}_i$ adalah titik tengah selang bagian ke i.

Jawab:



²² Ibid., h. 275.

²³ Ibid., h. 275.

Dimana : $\Delta x1 = \Delta x2 = \Delta x3 = \Delta x4 = \Delta x5 = \Delta x6$

$$R_p = \sum_{i=1}^6 f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

$$\begin{aligned} &= [f(-0,75) + f(-0,25) + f(0,25) + f(0,75) + f(1,25) + f(1,75)](0,5) \\ &= [1,5625 + 1,0625 + 1,0625 + 1,5625 + 2,5625 + 4,0625] \\ &= 5,9375 \end{aligned}$$

Untuk mencari luas dengan metoda Riemann, luasan yang diperoleh adalah hanyalah merupakan pendekatan dari luas actual daerah yang terukur.

Adapun untuk memperoleh luasan yang paling mendekati dengan luasan yang sebenarnya, maka jarak titik partisi yang diambil adalah sekecil mungkin (mendekati nol).

Panjang selang terpanjang dari partisi P disebut dengan:²⁴ NORMA P atau $|P|$ yaitu pada kondisi Δx terbesar. Dan nilai luas actual dari perhitungan dengan jumlah Riemann akan diperoleh jika $|P|$ mendekati nol (nilai jarak partisi P sangat kecil), dan jumlah partisi yang didapat akan mendekati tak hingga.

Andaikan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup $[a, b]$ dan $|P| \rightarrow 0$, jika:

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i \text{ ada, (bila } |P| \rightarrow 0 \text{ maka } n \rightarrow \infty)$$

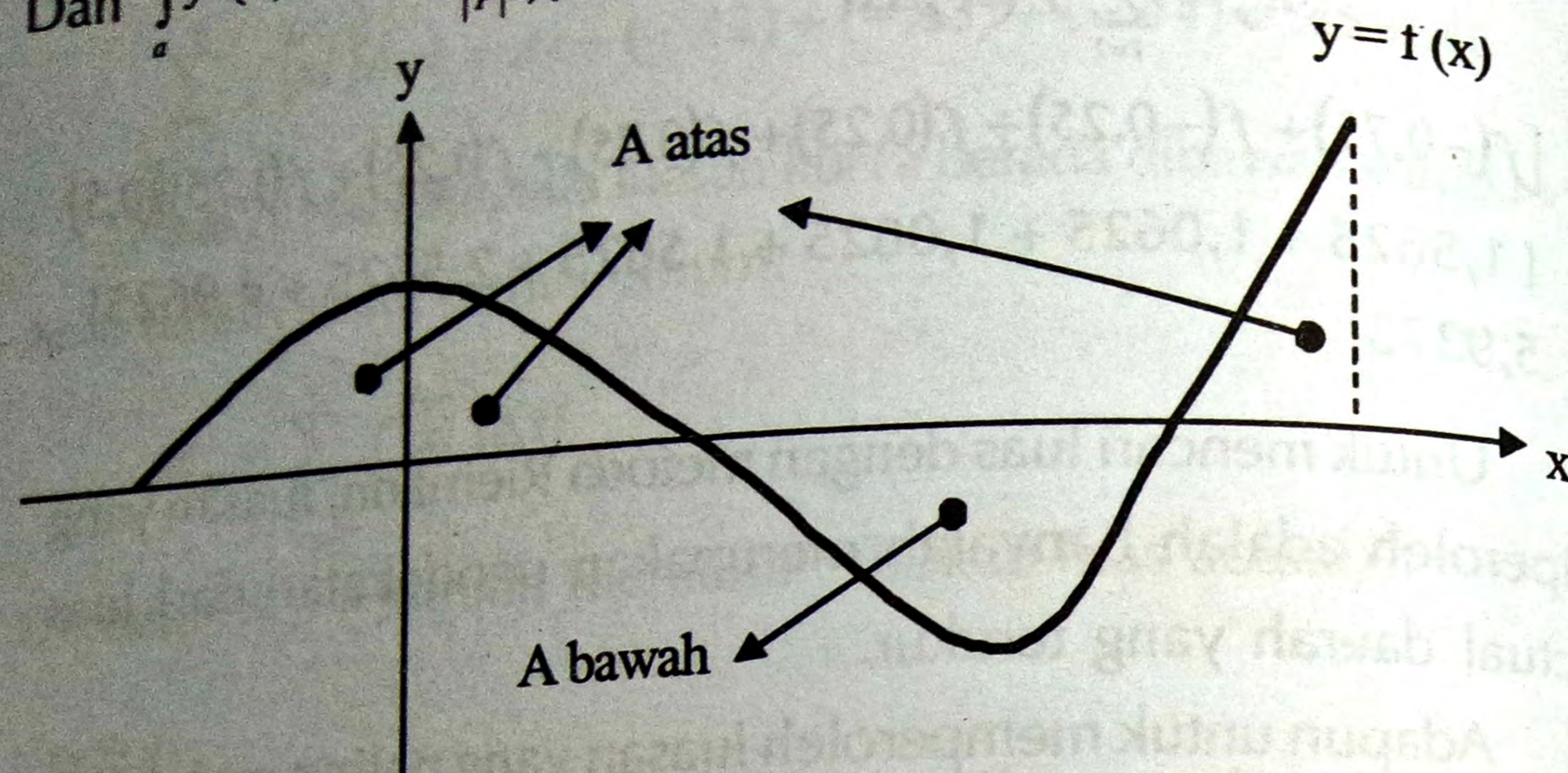
maka dikatakan bahwa f adalah terintegralkan pada $[a, b]$

dan $\int_a^b f(x) dx$ disebut Integral Tentu²⁵ atau Integral Riemann

²⁴ Ibid., h. 276.

²⁵ Ibid., h. 277.

$$\text{Dan } \int_a^b f(x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$



$$\int_a^b f(x) dx = A \text{ atas} - A \text{ bawah}$$

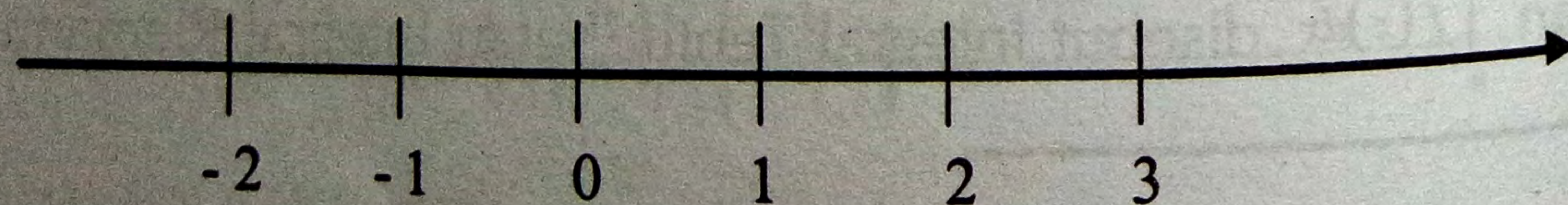
$$\text{Kesamaan : } \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = L$$

Contoh :

Hitung $\int_{-2}^3 (x + x) dx$ dengan limit jumlah Riemann.

Jawab : Partisi pada selang $[-2, 3]$ dapat dibagi menjadi n bagian yang sama panjang yaitu dengan $\Delta x = 5/n$, maka dapat digambarkan dalam diagram berikut:

$$\Delta x_1 \quad \Delta x_2 \quad \Delta x_3 \quad \Delta x_4 \quad \Delta x_5 = \Delta x = 5/n$$



$$x_0 = -2 + 0 \cdot \Delta x = -2$$

$$x_1 = -2 + 1 \cdot \Delta x = -2 + 5/n$$

$$x_2 = -2 + 2 \cdot \Delta x = -2 + 2(5/n)$$

$$\downarrow$$

$$x_i = -2 + i \cdot \Delta x = -2 + i(5/n)$$

$$\downarrow$$

$$x_n = -2 + n \cdot \Delta x = -2 + n(5/n)$$

Jika $f(x) = (x + 3)$, maka $f(x_i) = (x_i + 3)$

$$\text{Dan } f(x_i) = \{[-2 + i(5/n)] + 3\}$$

$$f(x_i) = [1 + i(5/n)]$$

Sehingga Jumlah Riemann dari persamaan diatas:

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n [1 + i(5/n)](5/n)$$

$$= (5/n) \sum_{i=1}^n 1 + \sum_{i=1}^n i(25/n^2)$$

$$= (5/n) \sum_{i=1}^n 1 + \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^n i \text{ dimana: } \sum_{i=1}^n i \text{ adalah jumlah suku ke } i,$$

$$\text{Yang mana: } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \text{ sehingga:}$$

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = \left(\frac{5}{n}\right) \cdot n + \frac{25}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= 5 + \frac{25}{2} \left[1 + \frac{1}{n}\right]$$

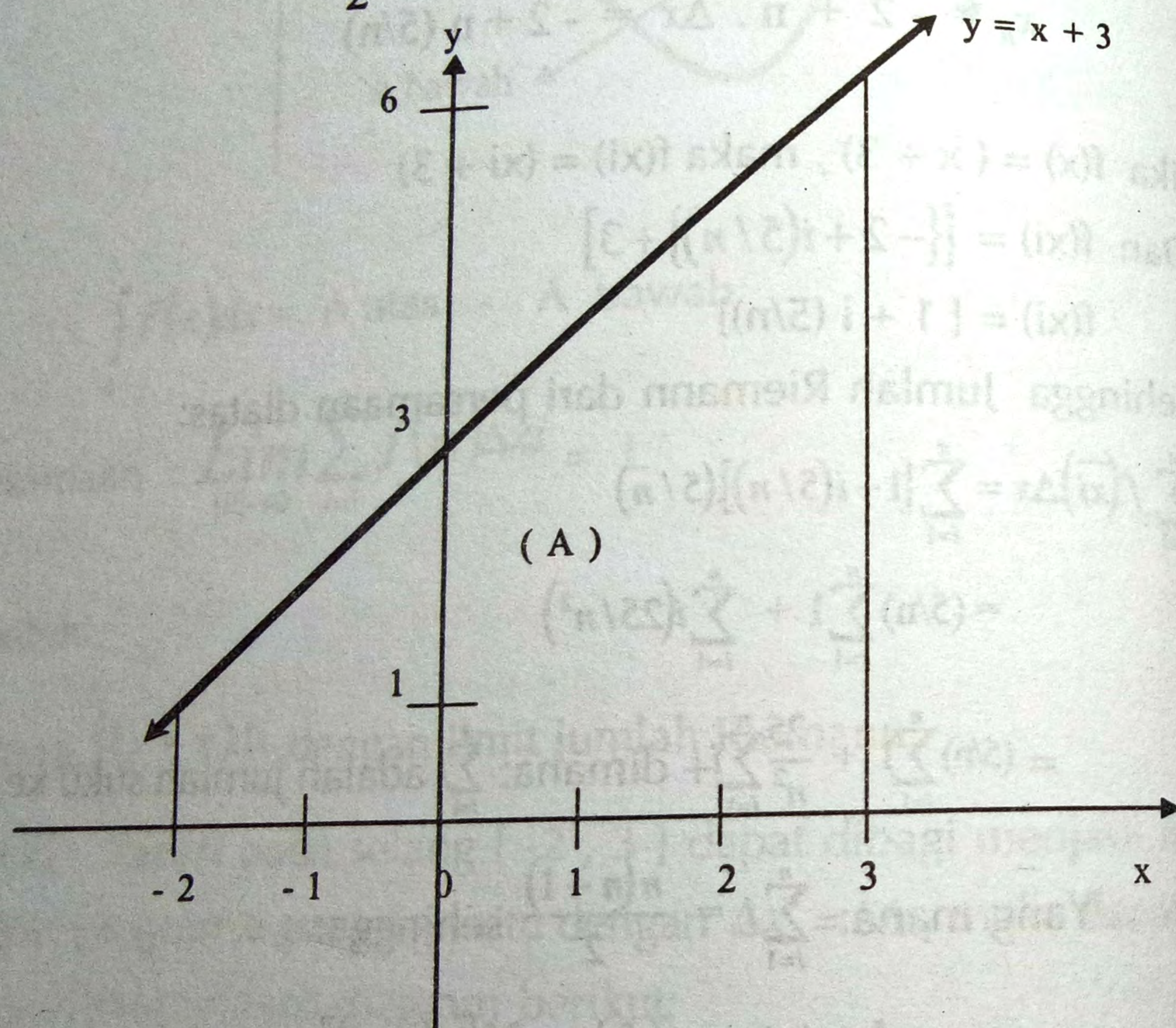
$$\text{Sehingga } \int_{-2}^3 (x + x) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = \lim_{|P| \rightarrow 0} \left[5 + \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$|P| \rightarrow 0$ setara dengan $n \rightarrow \infty$, maka :

$$\int_{-2}^3 (x+3) dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \left[5 + \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$= 5 + \frac{25}{2}$$

$$= \frac{35}{2} = 17,5$$



$$\int_{-2}^3 (x+3) dx = A = \frac{35}{2} = 17,5$$

1.5. Teorema Dasar Kalkulus

Proses menghitung Integral Tentu dengan limit jumlah Reimann cukup rumit meskipun fungsinya sederhana. Kita dapat memanfaatkan hasil perhitungan Integral tak tentu dalam proses menghitung Integral tentu. Rumus yang mengkaitkan Integral tentu dan Integral tak tentu disebut sebagai Teorema Dasar Kalkulus.²⁶ Teorema ini pertama kali dikemukakan dan dikembangkan oleh Isac Newton dan Leibniz.

Andaikan fungsi f kontinu pada selang $[a, b]$ dan F merupakan anti turunan (anti differensial) dari fungsi f . Sedangkan P adalah partisi yang diambil dari selang $[a, b]$, dimana:

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\text{Maka } F(b) - F(a) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + [F(x_{n-2}) - F(x_{n-3})] + \dots + [F(x_1) - F(x_0)]$$

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \dots \dots \dots (1)$$

Dari teorema nilai rata-rata untuk turunan yang diterapkan pada F pada selang $[x_{i-1}, x_i]$ diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ dimana: } F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\bar{x}_i) \cdot \Delta x \dots \dots \dots (2)$$

Maka dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(\bar{x}_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$$

Dimana : $F(b) - F(a)$: Sebuah konstanta

²⁶ Koko Martono, *Kalkulus*, Penerbit Erlangga, 1999, h. 181.

$\sum_{i=1}^n F'(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$: Jumlah Riemann.

Bila diambil limit untuk $|P| \rightarrow 0$ maka :

$$F(b) - F(a) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F'(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Dimana F adalah anti turunan dari fungsi f .

Contoh :

1. Buktikan bahwa: $\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

Jawab : $f(x) = x$

sedangkan $F(x)$ adalah anti turunan dari fungsi $f(x)$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Sehingga terbukti bahwa $\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

2. Hitung $\int_{-1}^2 (4x - 6x^2) dx$

Jawab : $f(x) = 4x - 6x^2$

$$F(x) = 2x^2 - 2x^3$$

$$\text{Sehingga} = \int_{-1}^2 (4x - 6x^2) dx = 2x^2 - 2x^3 \Big|_{-1}^2$$

$$= (8 - 16) - (2 + 2) = -12$$

Dinyatakan dalam lambang integral tak tentu, kita boleh menuliskan kesimpulan dari teorema dasar kalkulus sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_a^b$$

Contoh :

Hitung : $\int_{-1}^2 (4x - 6x^2) dx$

Jawab : $\int_{-1}^2 (4x - 6x^2) dx = 4 \int_{-1}^2 x dx - 6 \int_{-1}^2 x^2 dx$

$$\int_{-1}^2 (4x - 6x^2) dx = 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 - 6 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = 4 \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right] - 6 \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right]$$

$$\int_{-1}^2 (4x - 6x^2) dx = 6 - 18 = -12$$

Kelinieran Integral tentu

Andaikan fungsi F kontinu pada selang $[a, b]$ dan fungsi G kontinu pada interval selang yang sama yaitu $[a, b]$, maka luas daerah yang dibentuk oleh kedua fungsi F dan G dalam selang $[a, b]$ dapat diketahui dengan persamaan berikut ini:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)] \Delta x_i$$

$$= \lim_{|P| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\bar{x}_i) \Delta x_i \right]$$

$$= \lim_{|P| \rightarrow 0} f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \lim_{|P| \rightarrow 0} g(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

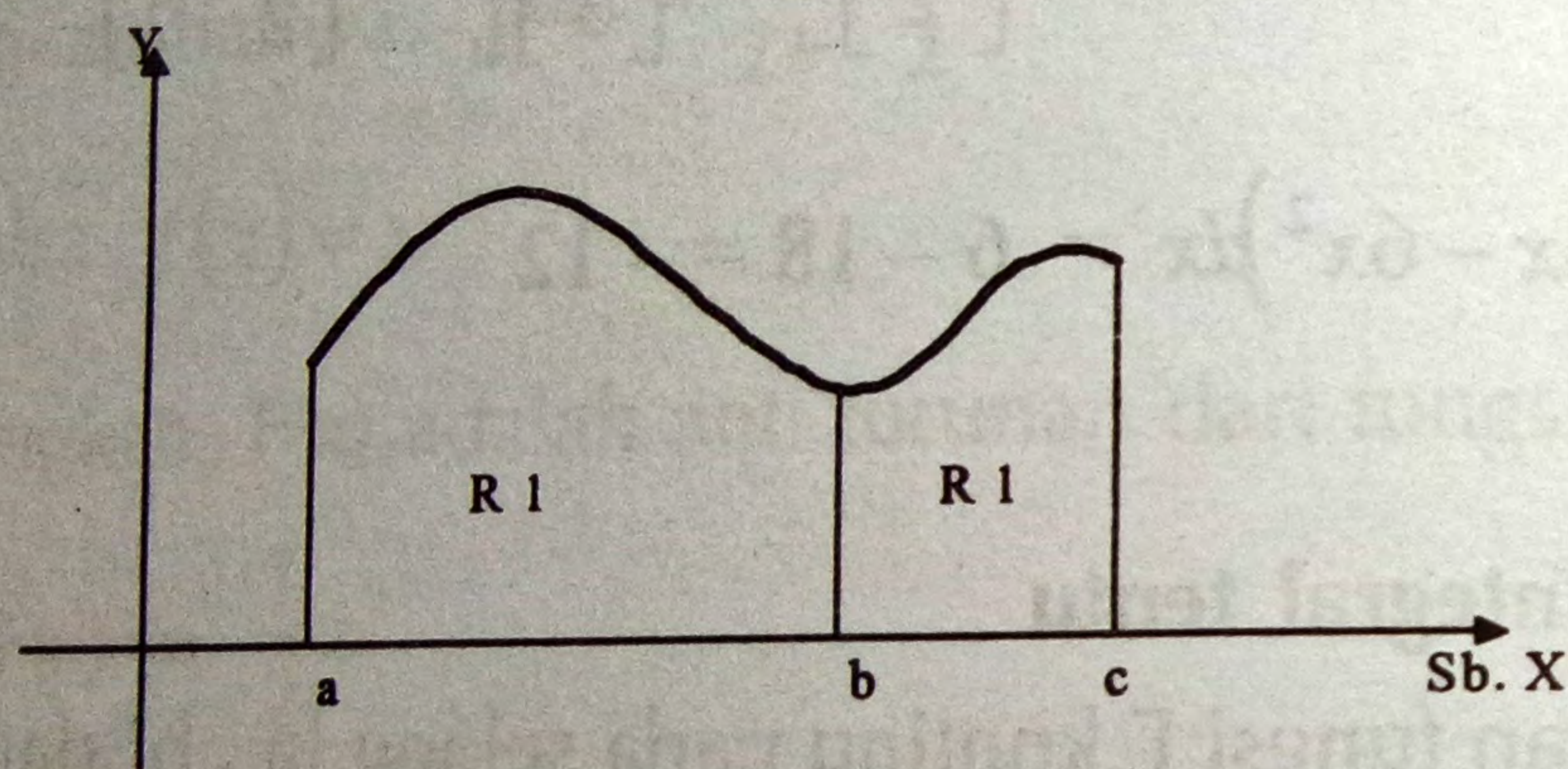
$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

1.6. Sifat-Sifat Integral Tentu

Dalam sub bab berikut ini kita akan kaji perhitungan luas daerah dibawah kurva yang terbagi menjadi dua buah luasan bidang yang saling berdampingan.

Sifat perubahan selang

Pandang grafik fungsi $g = f(x)$ dimana fungsi $f(x)$ terintegralkan pada selang (a,b) seperti ilustrasi gambar berikut ini:



Luas daerah yang diarsir (R) = Luas R 1 + Luas R 2

Atau $A(R) = A(R1) + A(R2)$

$$\text{Atau } \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Maka jika f terintegralkan pada suatu selang yang mengandung tiga titik a, b, c maka $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

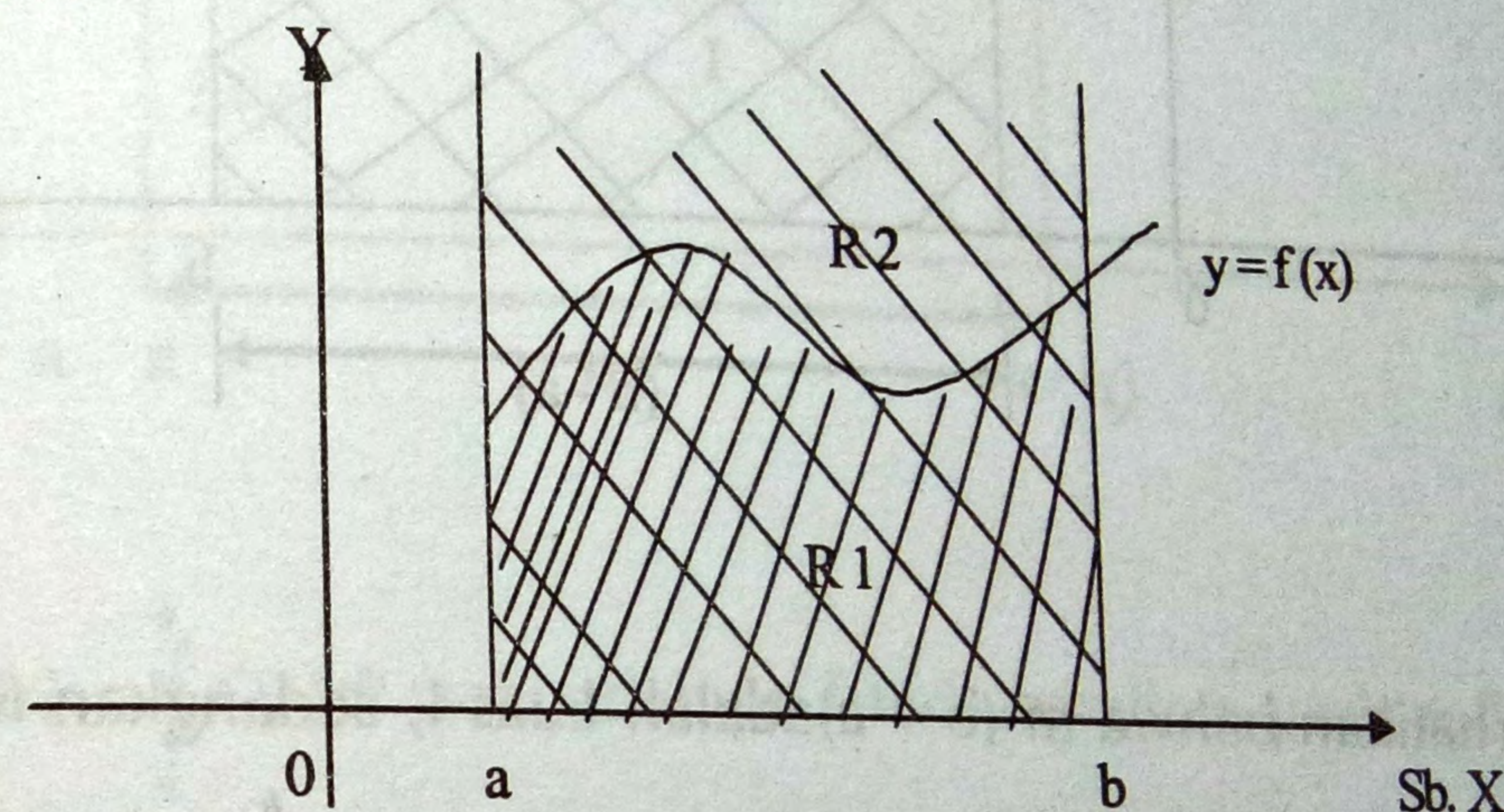
Contoh :

$$1. \int_0^{10} 5x dx = \int_0^5 5x dx + \int_5^{10} 5x dx$$

$$2. \int_0^{\pi} \cos x dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x dx + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \cos x dx$$

Sifat Pembandingan

$y = g(x)$



Luas R 2 :



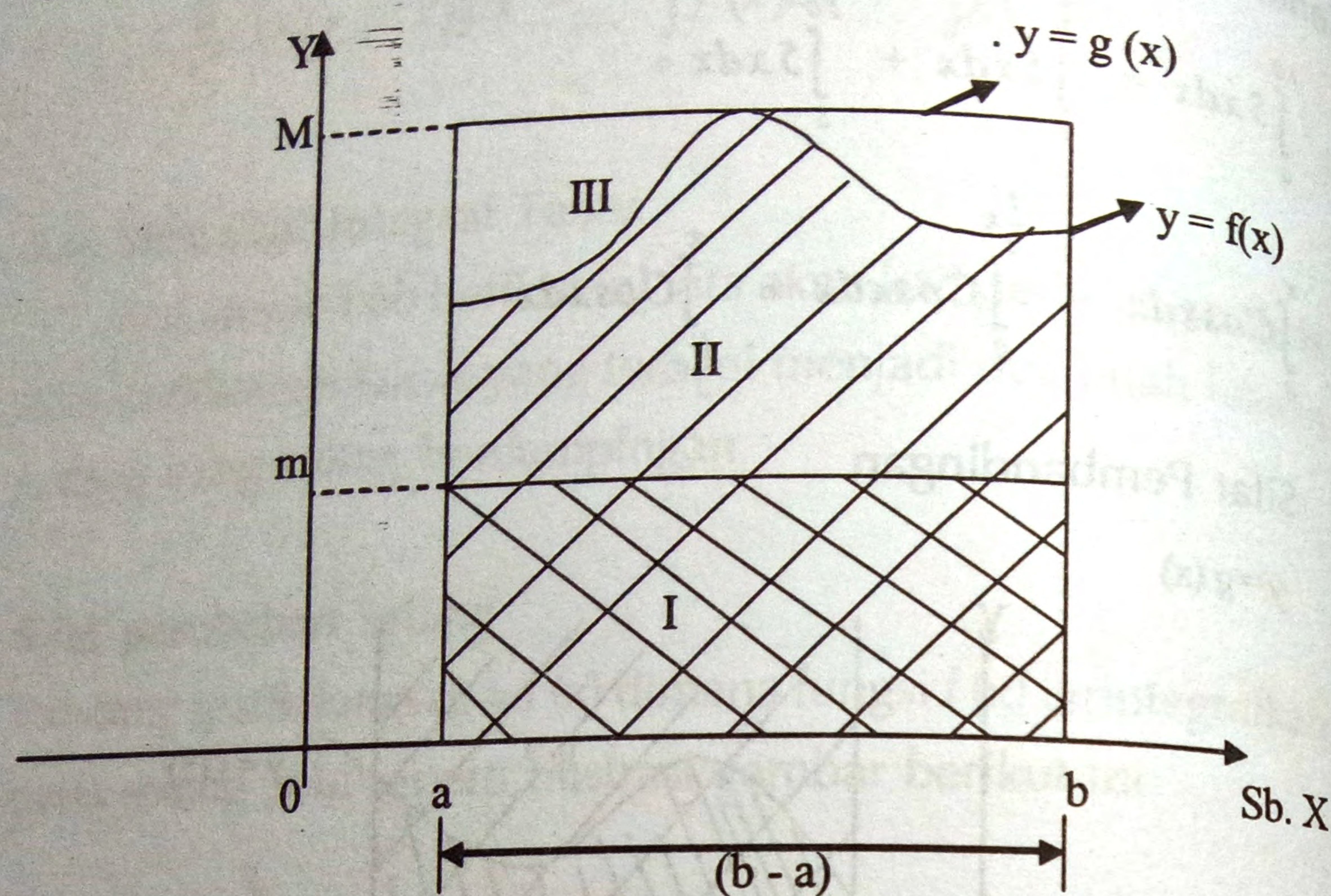
Luas R 1 :



Maka : $A(R1) < A(R2)$

Jika f dan g terintegralkan pada (a,b) dan jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua x dalam (a,b) , maka:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$



Perhatikan bahwa $m(b - a)$ adalah Luas I, sedangkan $M(b - a)$ adalah luas persegi panjang (II + III) dan $\int_a^b f(x)dx$ adalah luas dibawah kurva.

Andaikan $g(x) = M$ untuk semua x dalam (a, b) , maka:

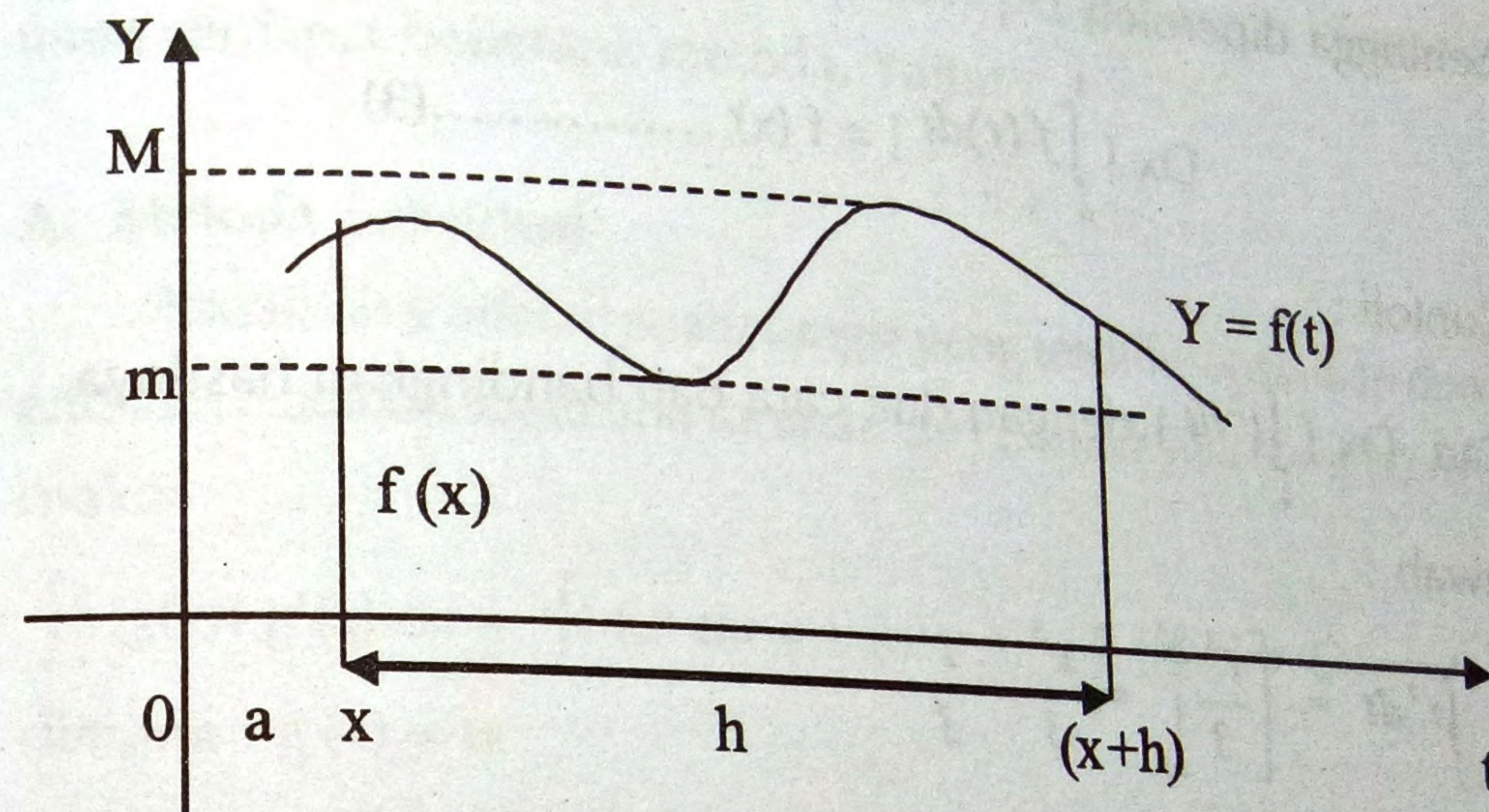
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{dimana : } \int_a^b g(x)dx = \int_a^b M \cdot dx = \left| Mx \right|_a^b = M(b - a) \dots\dots(2)$$

Sehingga dari persamaan 1 dan 2 diperoleh :

$$M(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

Pendifferensialan suatu integral tentu



Jika $g(x) = \int_a^b f(t)dt$ (seanadainya f terintegralkan pada (a, b)) dan andaikan x da;am (a, b) .

Jika m (titik minimum dan M (titik maksimum), jika $h > 0$ pada

selang $(x, x + h)$, maka : $m \cdot h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M \cdot h$

Jika $G(x + h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt =$, maka :

$$\frac{m \cdot h}{h} \leq \frac{G(x + h) - G(x)}{h} \leq \frac{M \cdot h}{h} \text{ dibagi } h$$

$$m \leq \frac{G(x + h) - G(x)}{h} \leq M$$

jika $h \rightarrow 0$ maka :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = G'(x) = f(x)$$

Sehingga diperoleh :

$$D_x \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x) \dots\dots\dots(3)$$

Contoh :

Cari $D_x \left[\int_1^x t^2 dt \right]$ dengan dua cara dan bandingkan hasilnya.

Jawab :

$$1. \int_1^x t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$$

$$D_x \left[\int_1^x t^2 dt \right] = D_x \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \right] = x^2$$

2. Dengan persamaan (3)

Dari persamaan (3) diperoleh jika $f(t) = t^2$ maka $f(x) = x^2$

$$\text{Sehingga: } D_x \left[\int_1^x t^2 dt \right] = x^2$$

1.7. Metoda Perhitungan Integral Tentu

Dalam berbagai macam persoalan integral tentu, terdapat berbagai metoda dalam pemecahan perhitungan integral tentu. Secara umum proses perhitungan integral tentu memiliki dua langkah atau metoda: ²⁷

²⁷ Edwin J. Purcel. *Kalkulus dan Geometrik Analitis* (Erlangga, Bandung 1999) h. 299.

1. Kita mencari integral tak tentu.
2. Kita terapkan teorema dasar kalkulus.

Dan untuk mempermudah proses penghitungan integral tentu terdapat beberapa metoda, Yaitu:

A. Metoda Substitusi

Andaikan g adalah suatu fungsi yang terdifferensialkan dan andikan F adalah suatu anti turunan dari f , maka jika $u = g'(x) dx$, maka:

$$\int f[g(x)] g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F[g(x)] + C$$

dimana : $g(x) = u$

$$g'(x) dx = du$$

Contoh :

$$\text{Hitung : } \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \sin^3(x^2) \cos(x^2) dx$$

Jawab : Misalkan $U = \sin(x^2)$

$$.du = 2 x \cos(x^2) dx$$

$$\text{Sehingga : } \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \sin^3(x^2) \cos(x^2) dx = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{\sin^3(x^2)}{U} \cdot \frac{x \cos(x^2) dx}{du/2}$$

$$= \int u^3 du/2$$

$$= 1/2 \int u^3 du$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{U^4}{4} + C \right)$$

$$= \frac{1}{8} (\sin^4(x^2)) + C$$

$$= \frac{1}{8} (\sin^4(x^2)) \Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

$$= \frac{1}{8} (\sin^4(\frac{\pi}{4})) - \frac{1}{8} (0)$$

$$= \frac{1}{32}$$

B. Substitusi Integral Tentu

Andaikan g suatu fungsi yang terdifferensialkan dan kontinu pada $[a, b]$ dan andaikan f kontinu pada daerah nilai dari g , maka:²⁸

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Contoh :

$$\text{Hitung : } \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2} dx$$

Jawab : Misalkan $U = x^2 + 2x + 6$

$$.du = (2x + 2) dx = 2(x + 1) dx$$

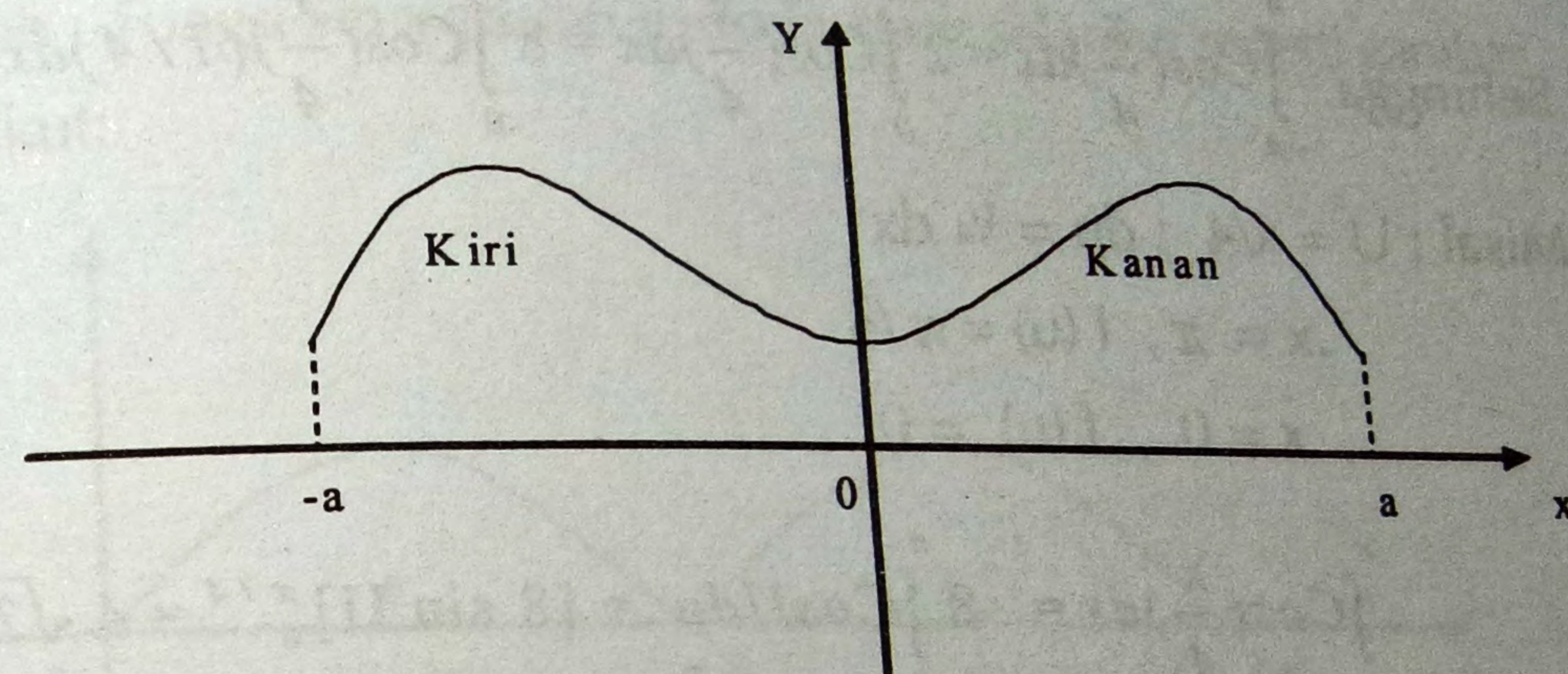
dan bila $x = 0$, maka $U = 6$

$x = 1$, maka $U = 9$

Sehingga :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+6)^2} dx &= \frac{1}{2} \int_6^9 \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+6)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_6^9 U^{-2} du \\ &= \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{U} \right) \Big|_6^9 \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

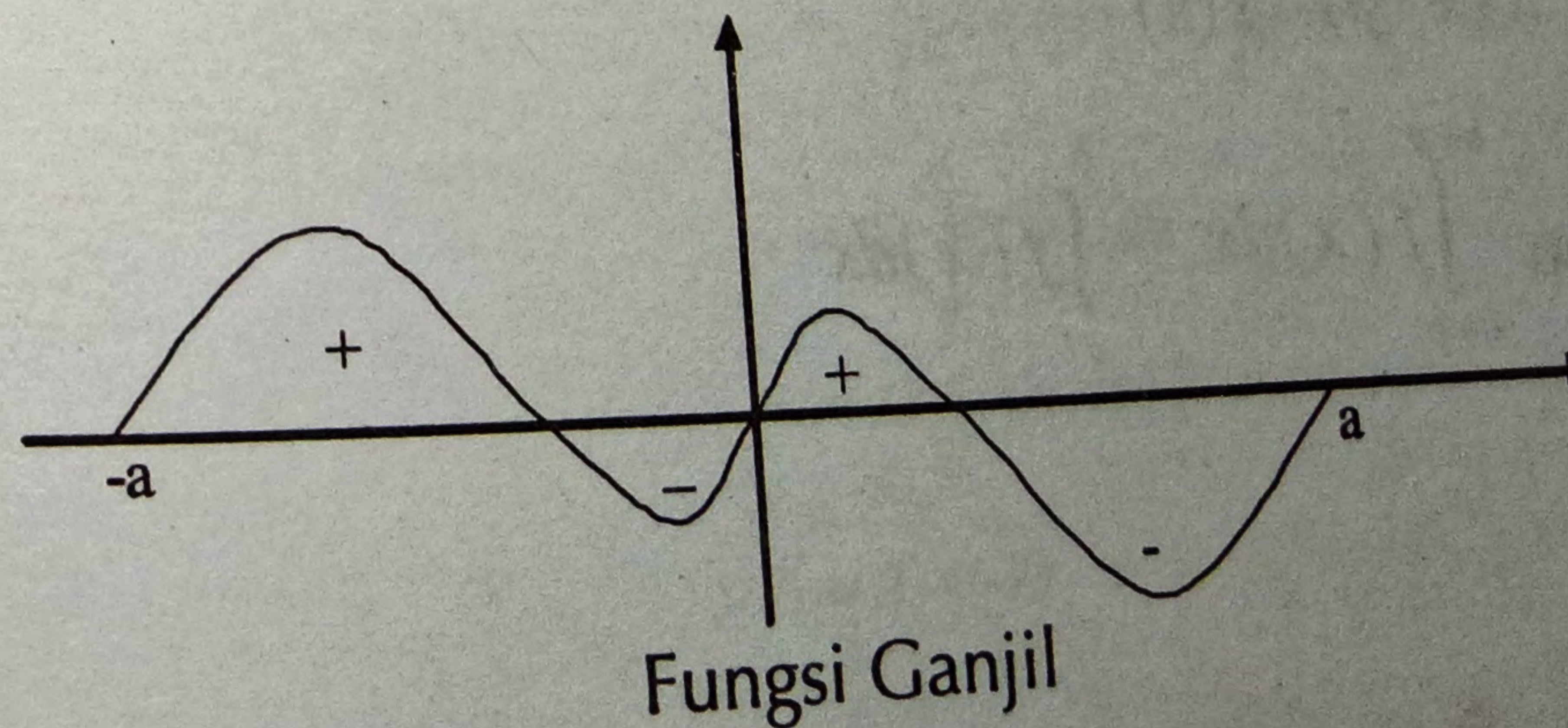
C. Teorema Simetri



Fungsi genap: Luas kiri = Luas kanan

Jika f fungsi genap, maka:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$



Fungsi Ganjil

²⁸ Ibid., h. 301.

Jika f Fungsi ganjil, maka :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Contoh :

Hitung : $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$

Jawab : Karena $\cos(-x/4) = \cos(x/4)$, $f(x) = \cos(x/4)$ fungsi genap.

Sehingga $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 2 \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 8 \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) (1/4) dx$

Misal : $U = x/4$; $du = 1/4 dx$

$x = \pi$, $f(u) = \pi/4$

$x = 0$, $f(u) = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 8 \int_0^{\pi} \cos U du = [8 \sin U]_0^{\pi/4} = 4\sqrt{2}$$

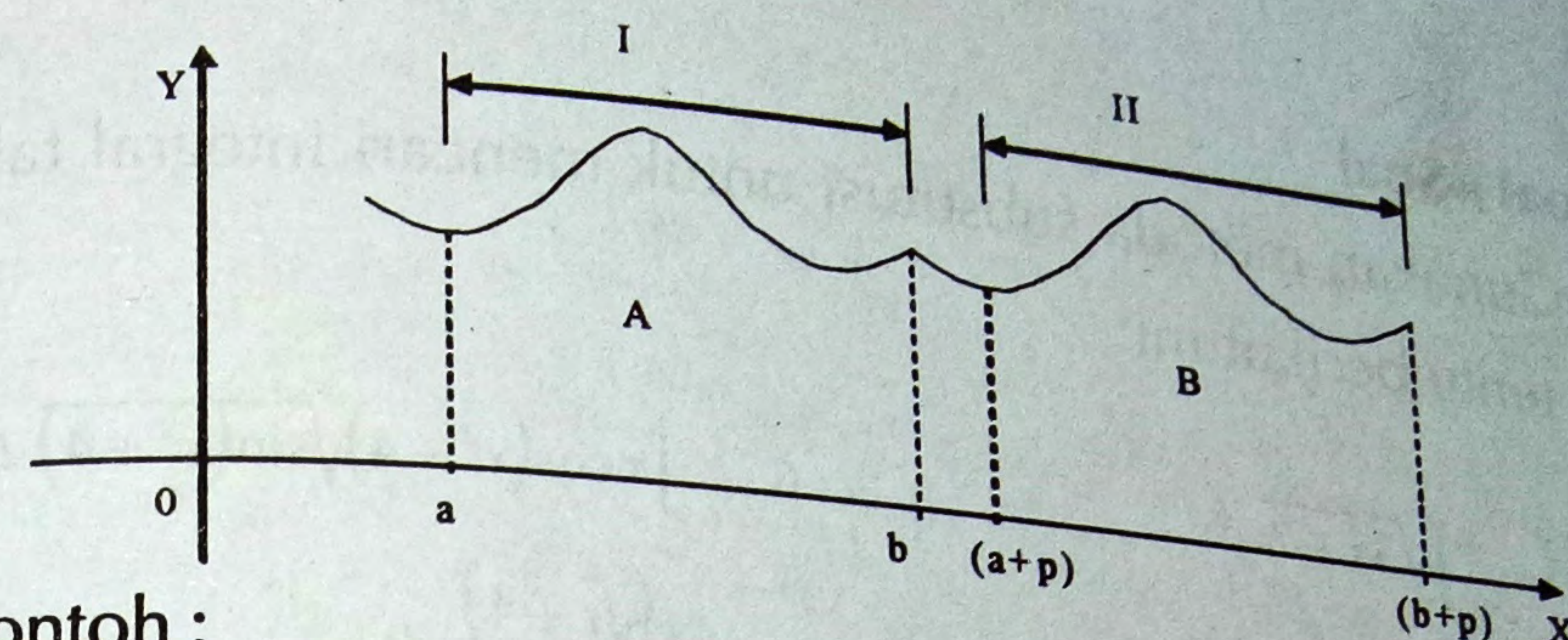
D. Penggunaan Keperiodikan

Suatu fungsi f adalah periodik jika terdapat suatu bilangan p sedemikian hingga:

$$f(x+p) = f(x)$$

dan $\int_{a+p}^{b+p} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

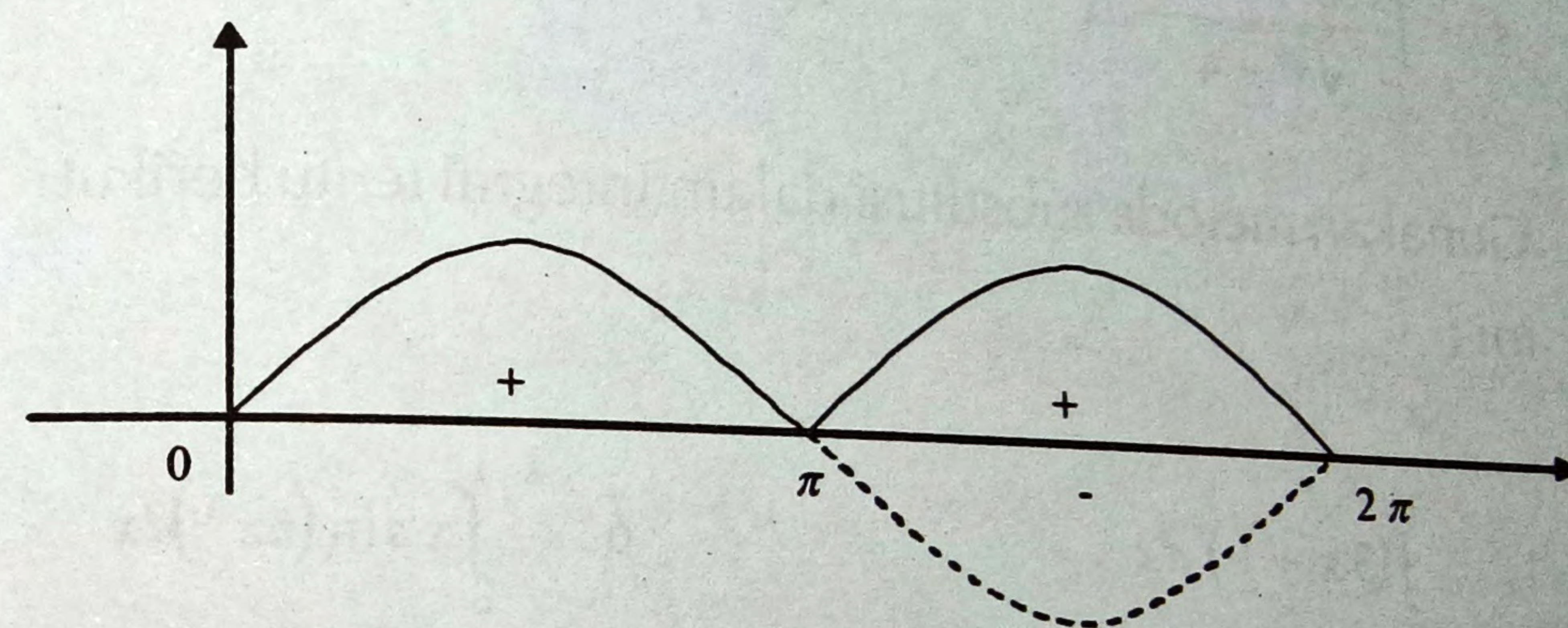
INTEGRAL



Contoh :

Hitung : $\int_0^{\pi} |\sin x| dx$

Jawab : Fungsi $\sin x$ adalah periodik pada selang π seperti gambar berikut:



$$\begin{aligned} \text{Sehingga: } \int_0^{2\pi} |\sin x| dx &= \int_0^{\pi} |\sin x| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| dx \\ &= \int_0^{\pi} |\sin x| dx + \int_0^{\pi} |\sin x| dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} |\sin x| dx \\ &= 2 [-\cos x]_0^{\pi} \\ &= 2 - (-2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

1.8. Soal –Soal

A. Gunakan metoda substitusi untuk mencari integral tak tentu berikut ini:

1. $\int \sqrt{3x+2} \cdot dx$
2. $\int \cos(3x+2) dx$
3. $\int x\sqrt{x^2+4} \cdot dx$
4. $\int x \sin(x^2+4) dx$
5. $\int \frac{x \sin \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} \cdot dx$
6. $\int x \cos(x^2+4) \sqrt{\sin(x^2+4)} dx$
7. $\int \frac{(\sqrt{t}+4)^3}{\sqrt{t}} dt$
8. $\int x^2 (x^3+5)^9 dx$
9. $\int \sqrt[3]{2x-4} dx$
10. $\int x^2 \cos(x^3+5) dx$

B. Gunakan metoda substitusi dalam integral tentu berikut ini :

1. $\int_0^1 (3x+1)^3 dx$
2. $\int_0^2 \sqrt{2t+1} \cdot dt$
3. $\int_0^1 \frac{x+2}{(x^2+4x+1)^2} dx$
4. $\int_0^{\pi/6} \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta$
5. $\int_0^1 \cos(3x-3) dx$
6. $\int_0^1 x \sin(\pi x^2) dx$
7. $\int_0^1 x \sin(\pi x^2) dx$
8. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)^3} dt$
9. $\int_0^4 \sqrt{2t+1} dt$
10. $\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{9-x^2} \cdot x dx$

B A B II

FUNGSI TRANSENDEN



Fungsi transenden adalah fungsi yang tidak dapat dinyatakan sebagai sejumlah berhingga operasi aljabar atas fungsi konstanta $y = k$ dan fungsi kesatuan $y = x$.¹

Sebagai contoh fungsi transenden adalah fungsi-fungsi trigonometri misalnya fungsi Sinus, Cosinus, Tangen, Cotangen, Secan dan Kosecan, juga fungsi logaritma dan eksponennya (inversnya), Invers fungsi trigonometri, fungsi hiperbolik, dan invers fungsi hiperbolik.

2.1. Fungsi Logaritma Asli

Perhatikan persamaan fungsi yang dinyatakan sebagai berikut:

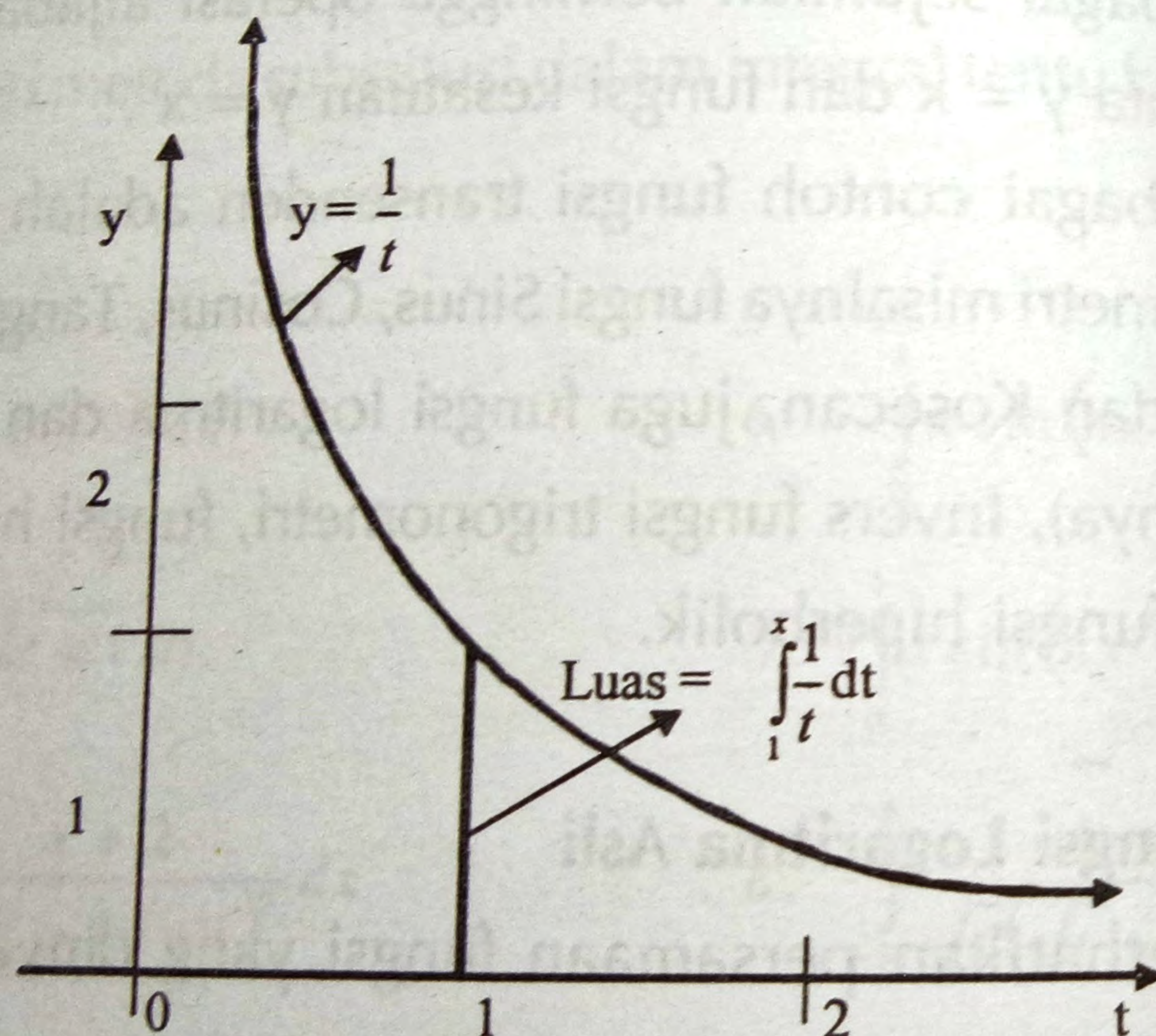
$$f(x) = \int_1^x t_n dt$$

¹ Koko Martono, *Kalkulus*, (Jakarta, Erlangga, 1999) h. 188

- Untuk $n > 0$ (positif), maka x dapat diganti sebarang bilangan real (fungsi tersebut ada)
- Untuk $n < 0$ (tetapi $\neq -1$), agar integralnya mempunyai arti, maka x hanya dapat diganti dengan bilangan real positif ($x > 0$)
- Dan bila $x = -1$, maka fungsi tersebut adalah:

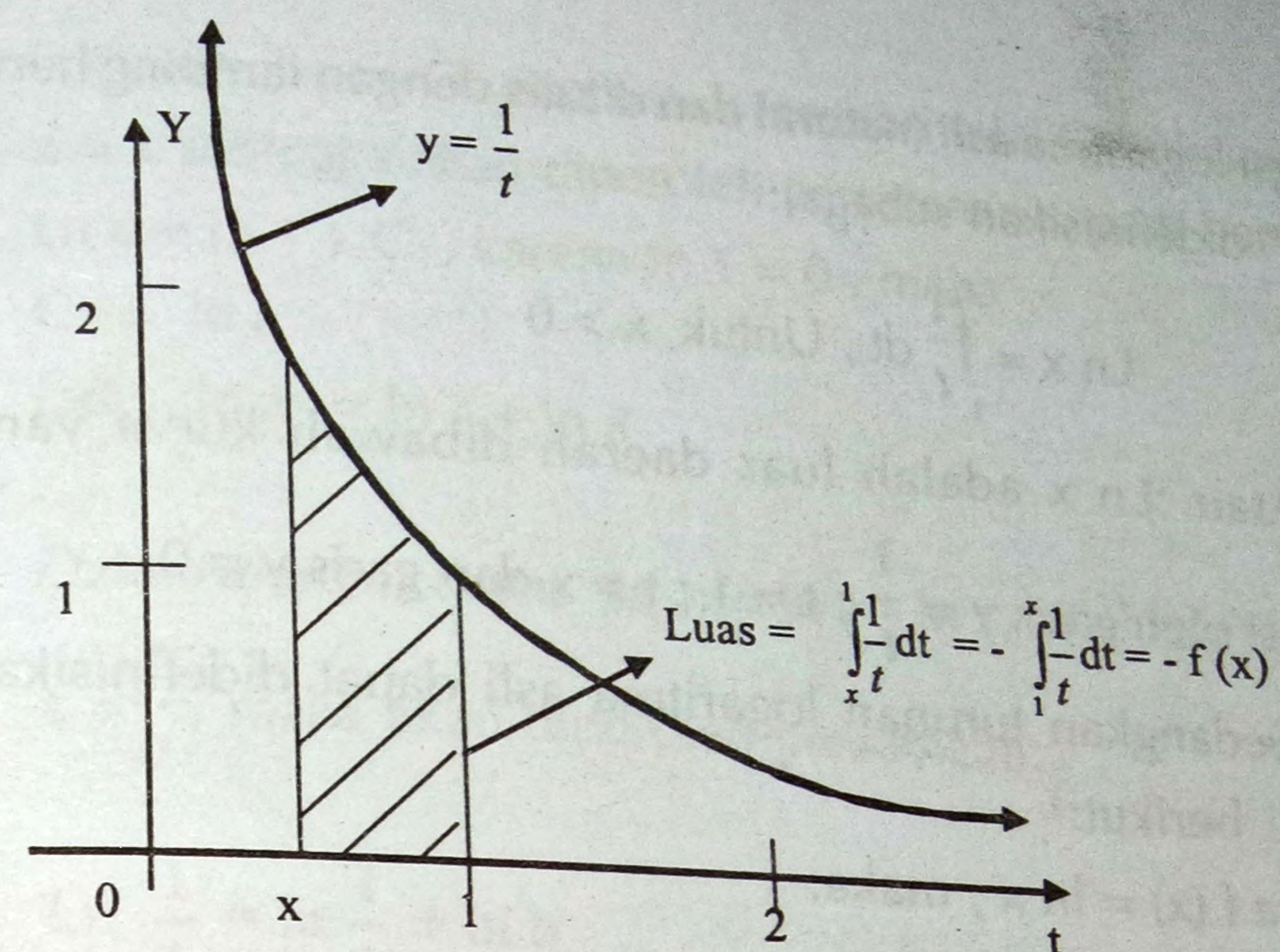
$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Dan untuk $x = 1$, maka $f(x) = f(1) = 0$ dan bila dalam ilustrasi grafik adalah seperti berikut:

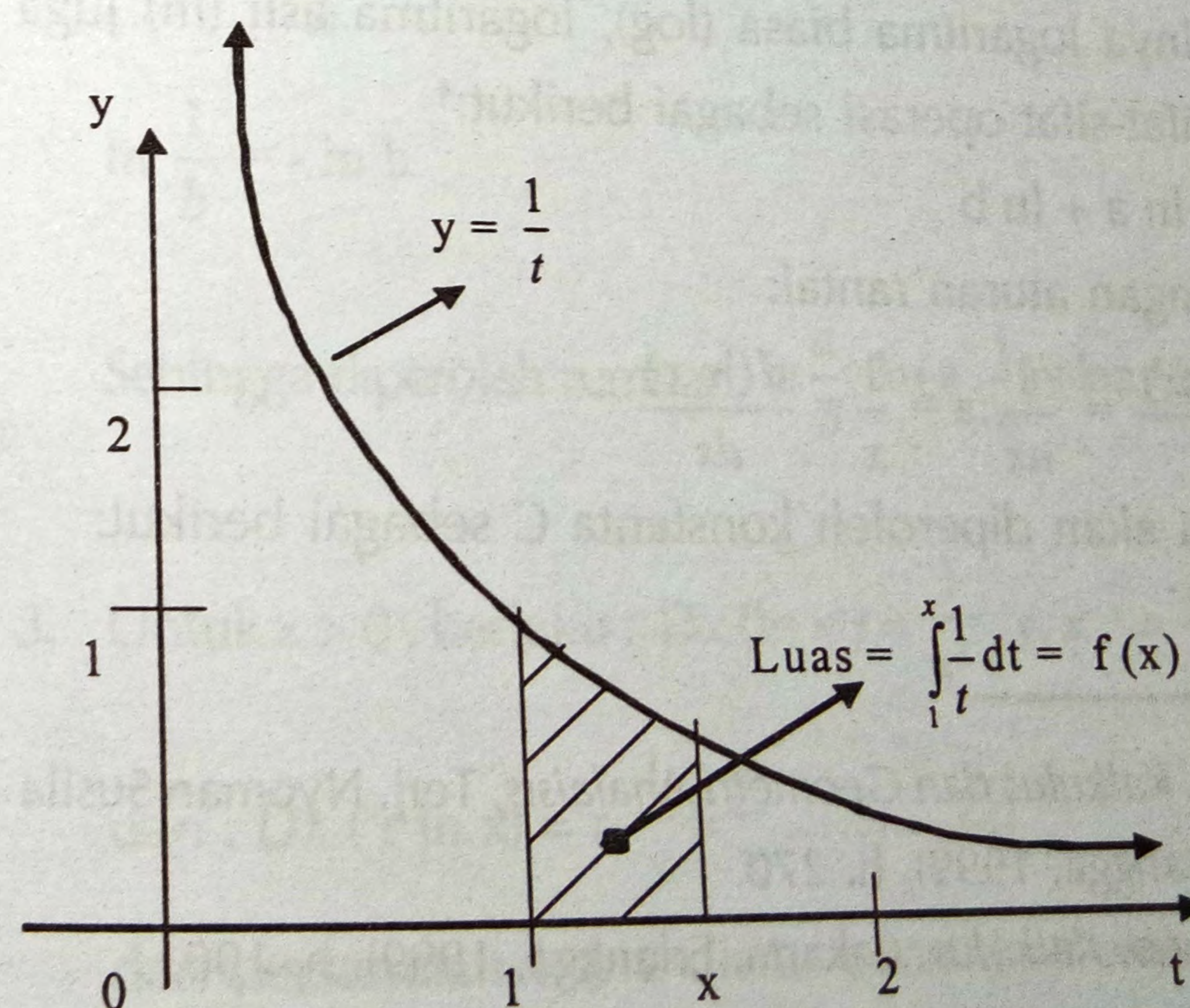


Sedangkan untuk $x < 1$ ($0 < x < 1$) dapat digambarkan sebagai berikut:

FUNGSI TRANSENDEN



Sedangkan untuk $x < 1$, ($0 < x < 1$) dapat digambarkan seperti berikut ini:



Fungsi logaritma asli (natural dan ditulis dengan lambing huruf "ln" didefinisikan sebagai:²

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \text{ Untuk } x > 0$$

Atau : $\ln x$ adalah luas daerah dibawah kurva yang dibatasi oleh garis $y = \frac{1}{t}$; $t = 1$; $t = x$ dan garis $y = 0$.

Sedangkan turunan logaritma asli dapat didefinisikan sebagai berikut:³

Jika $f(x) = \ln x$, maka:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Atau ditulis dengan cara laing

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}, \text{ dimana : } x > 0$$

Seperti halnya logaritma biasa (log), logaritma asli (ln) juga memiliki sifat-sifat operasi sebagai berikut:⁴

$$1. \ln ab = \ln a + \ln b$$

atau dengan aturan rantai:

$$\frac{d(\ln ax)}{dx} = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x} = \frac{d(\ln x)}{dx}$$

Sehingga akan diperoleh konstanta C sebagai berikut:

² E.J. Purcell, *Kalkulus dan Geometri Analaisis*, Terj. Nyoman Susila (Jakarta, Erlangga, 1999), h. 270.

³ Koko Martono, *Kalkulus*, (Jakarta, Erlangga, 1999), h. 190.

⁴ *Ibid.*, h. 190.

$\ln(ax) = \ln x + C$, dan untuk mencari nilai C, maka ambil $x = 1$ sehingga akan diperoleh persamaan seperti berikut:
 $\ln a = \ln 1 + C$, karena $\ln 1 = 0$, maka
 $C = \ln a$

$$\text{Jadi : } \ln ax = \ln a + \ln x$$

2. Dalam teorema diatas ($\ln ax = \ln a + \ln x$) bila kita misalkan $a = \frac{1}{b}$, maka akan diperoleh persamaan:

$$\ln \frac{1}{b} = \ln \frac{1}{b} + \ln b$$

$$\ln 1 = \ln \frac{1}{b} + \ln b$$

$$0 = \ln \frac{1}{b} + \ln b$$

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

Sehingga diperoleh rumuan: $\ln \frac{a}{b} = \ln(a \cdot \frac{1}{b}) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$

$$3. \text{ Untuk } x > 0, \text{ berlaku : } Dx(\ln x^r) = \frac{1}{x^r} \cdot r \cdot x^{r-1} = \frac{r}{x} \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{dan : } Dx(r \ln x) = r \cdot \frac{1}{x} = \frac{r}{x} \dots\dots\dots(2)$$

dari persamaan 1 & 2 diatas akan diperoleh persamaan:

$Dx (\ln x^r) = Dx (r \ln x)$
 Atau: $\ln x^r = r \ln x + C$, pada $x = 1$ maka $C = 0$,
 Sehingga⁵: $\ln x^r = r \ln x$

Contoh :

1. Tentukan turunan fungsi $y = \ln \frac{(1-x)}{(1+x)}$

Jawaban : $\frac{d}{dx} \left(\ln \frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} d \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$

$$= \frac{1-x}{1+x} \frac{(1+x)(-1) - (1-x).1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-2}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{-2}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{2}{x^2 - 1}$$

atau dengan cara lainnya:

$$\frac{d}{dx} \left(\ln \frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{d}{dx} \{ \ln (1-x) \}$$

$$\frac{d}{dx} (\ln (1+x)) = \frac{-1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x}$$

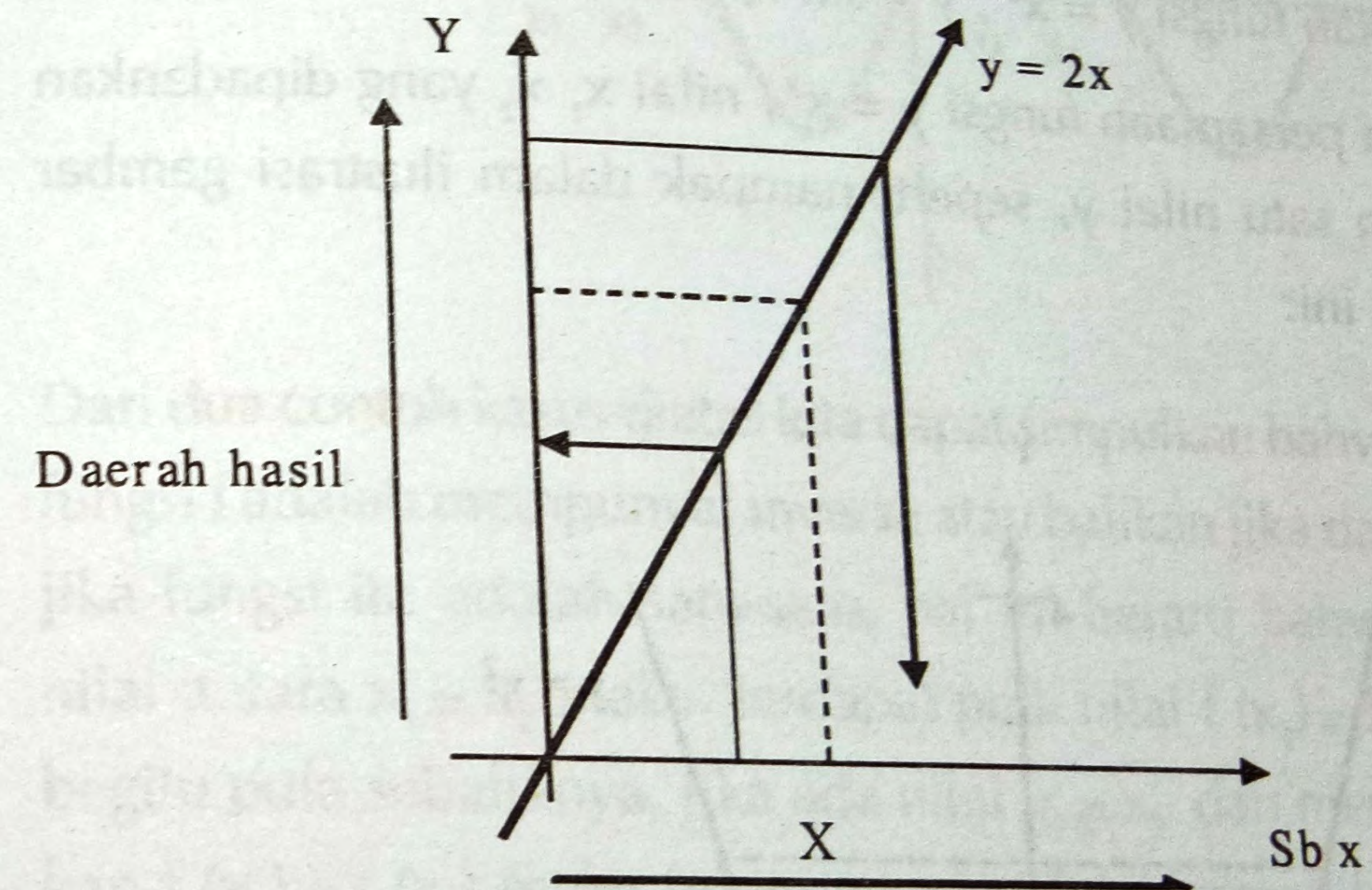
$$= \frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)}$$

⁵ E.J. Purcell, *Kalkulus dan Geometri Analaisis*, Terj. Nyoman Susila (Jakarta, Erlangga, 1999) h.375

$$\text{Atau : } = \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{x^2 - 1}$$

2.2. Fungsi Invers dan Turunannya

Suatu fungsi f yang memadankan suatu nilai x dalam daerah asalnya D . Dengan nilai tunggal y dalam daerah hasil R . Dan begitu pula sebaliknya untuk suatu nilai y dalam R , kita akan peroleh kembali x yang oleh f itu dipadankan dengan y , seperti dalam ilustrasi gambar berikut ini:



Daerah Asal

Fungsi yang tersebut diatas ini memadankan setiap nilai y dengan x dan dilambangkan dengan f^{-1} (dibaca Invers fungsi f , yang mana nilai f^{-1} tidak sama dengan $\frac{1}{f}$).⁶

⁶ *Ibid.*, h. 380

Dalam gambar
adalah inverse fungsi y , maka:

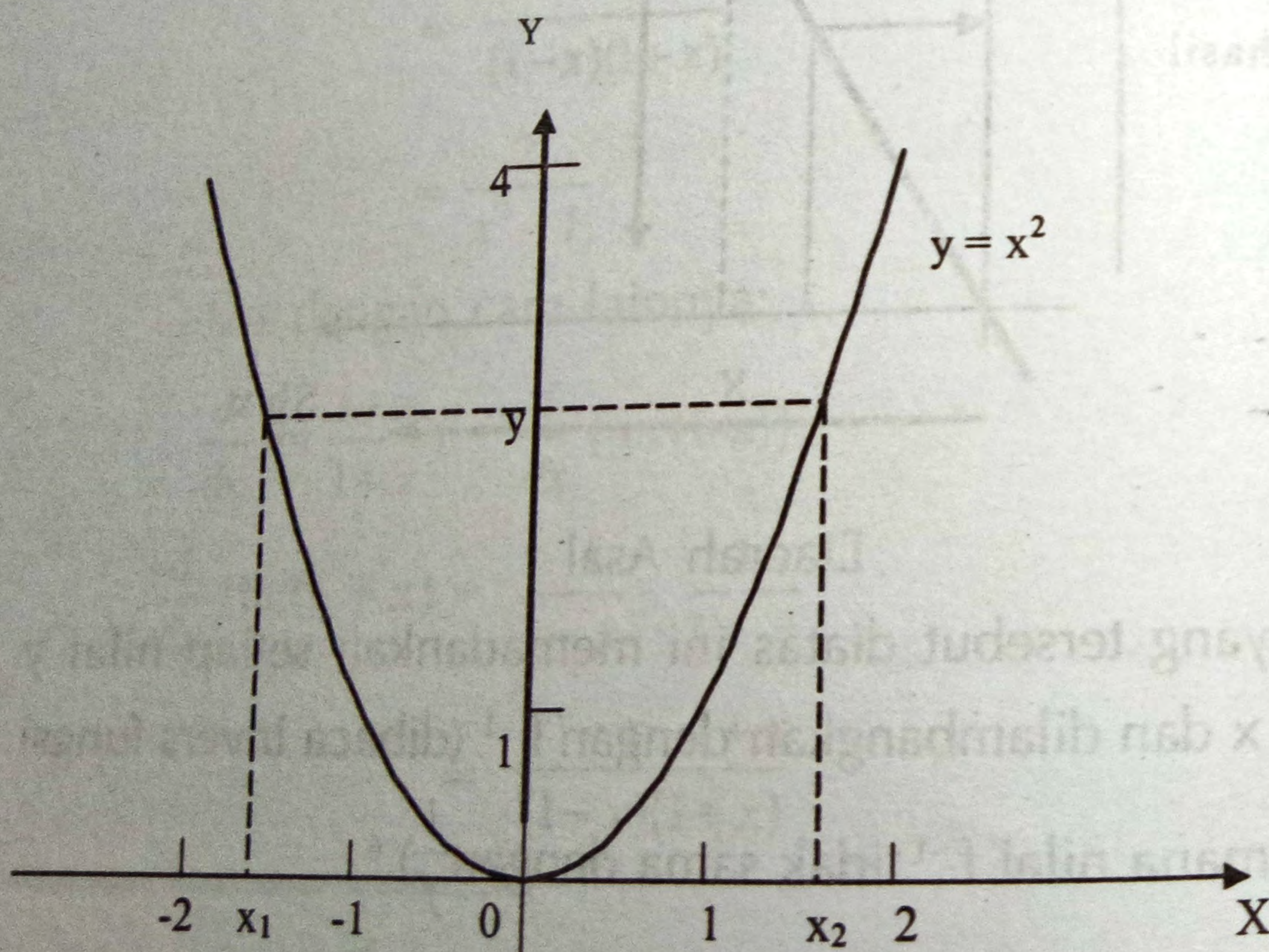
$$x = f^{-1}(y)$$

$$2x = y$$

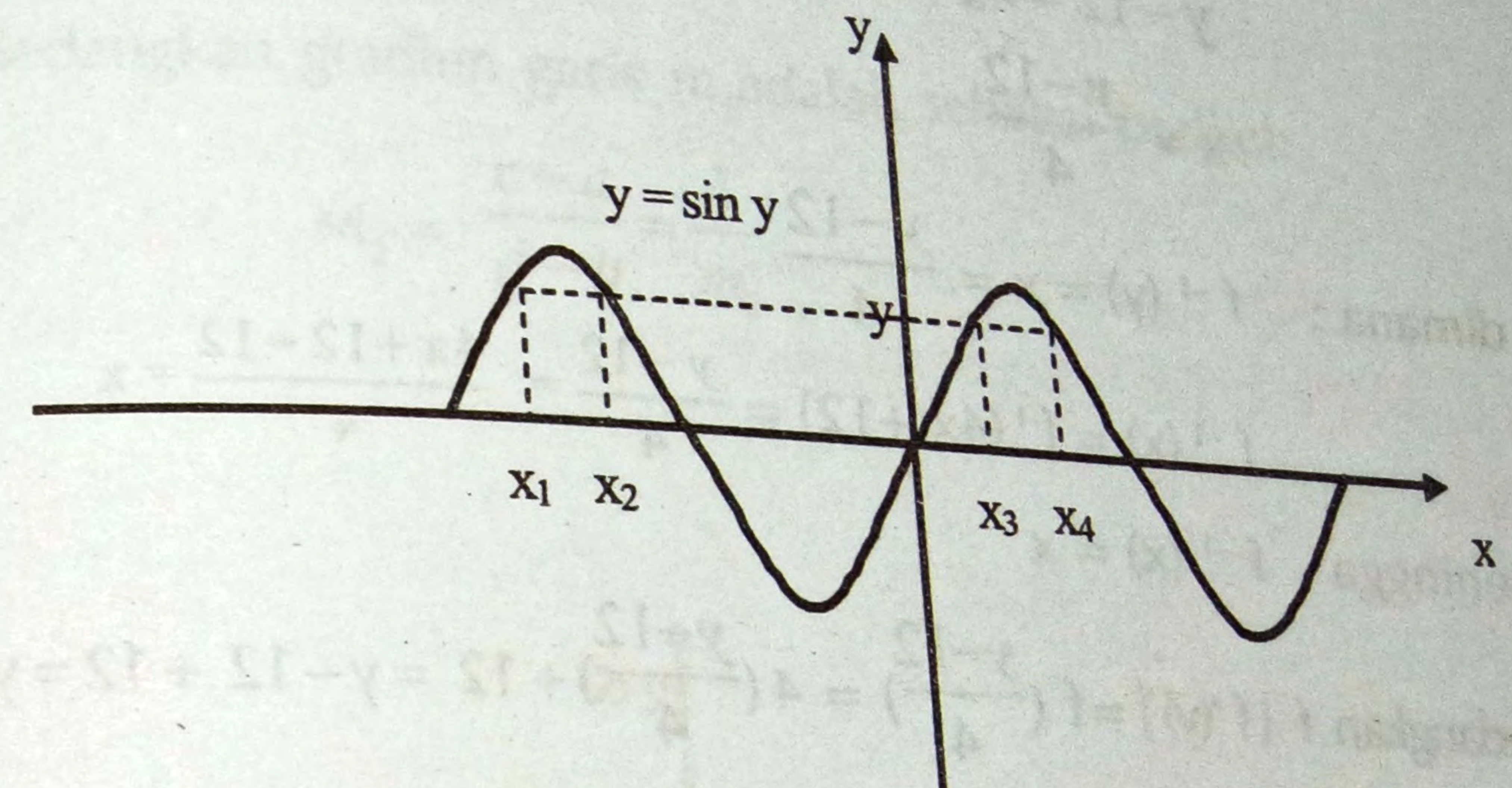
$$x = y/2 \text{ atau } f^{-1}(y) = 1/2 y$$

Tidak setiap fungsi memiliki invers atau ada suatu fungsi yang memadankan atau memetakan lebih dari satu nilai x dengan satu nilai y dan fungsi ini dikatakan tidak memiliki invers, misalkan fungsi $y = x^2$; $y = \sin x$, dan lain-lain.

Dalam persamaan fungsi $y = x^2$, nilai x_1 x_2 yang dipadankan dengan satu nilai y , seperti nampak dalam ilustrasi gambar berikut ini:



Dalam fungsi $y = \sin x$, terdapat nilai $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_4$ akan tetapi nilai tersebut dipadankan dengan satu nilai y yang akan tampak pada gambar berikut ini:



Dari dua contoh kasus diatas kita dapat simpulkan bahwa suatu fungsi f adalah mempunyai inverse atau balikan jika dan hanya jika fungsi itu adalah satu-satu, hal ini berarti bahwa untuk nilai antara $x_1 \neq x_2$ maka terdapat pula nilai $f(x_1) \neq f(x_2)$ dan begitu pula sebaliknya, jika ada nilai $x \neq x_2$ dan mengakibatkan $f(x_1) \neq f(x_2)$ maka fungsi tersebut tidak memiliki inverse. Bila fungsi f memiliki inverse f^{-1} , maka f^{-1} juga memiliki inverse yaitu f dan dapat dikatakan bahwa fungsi f dan f^{-1} merupakan pasangan fungsi inverse, dan dirumuskan sebagai berikut:⁷

$$f^{-1}[f(x)] = x \text{ dan } f[f^{-1}(y)] = y$$

⁷ Ibid., h. 281

Contoh:

Buktikan bahwa $f(x) = 4x + 12$ adalah fungsi yang memiliki inverse. Dan tentukan rumus untuk $f^{-1}(y) = y$,

Jawab : $f(x) = y = 4x + 12$
 $y - 12 = 4x$

$$x = \frac{y-12}{4}$$

dimana : $f^{-1}(y) = x = \frac{y-12}{4}$

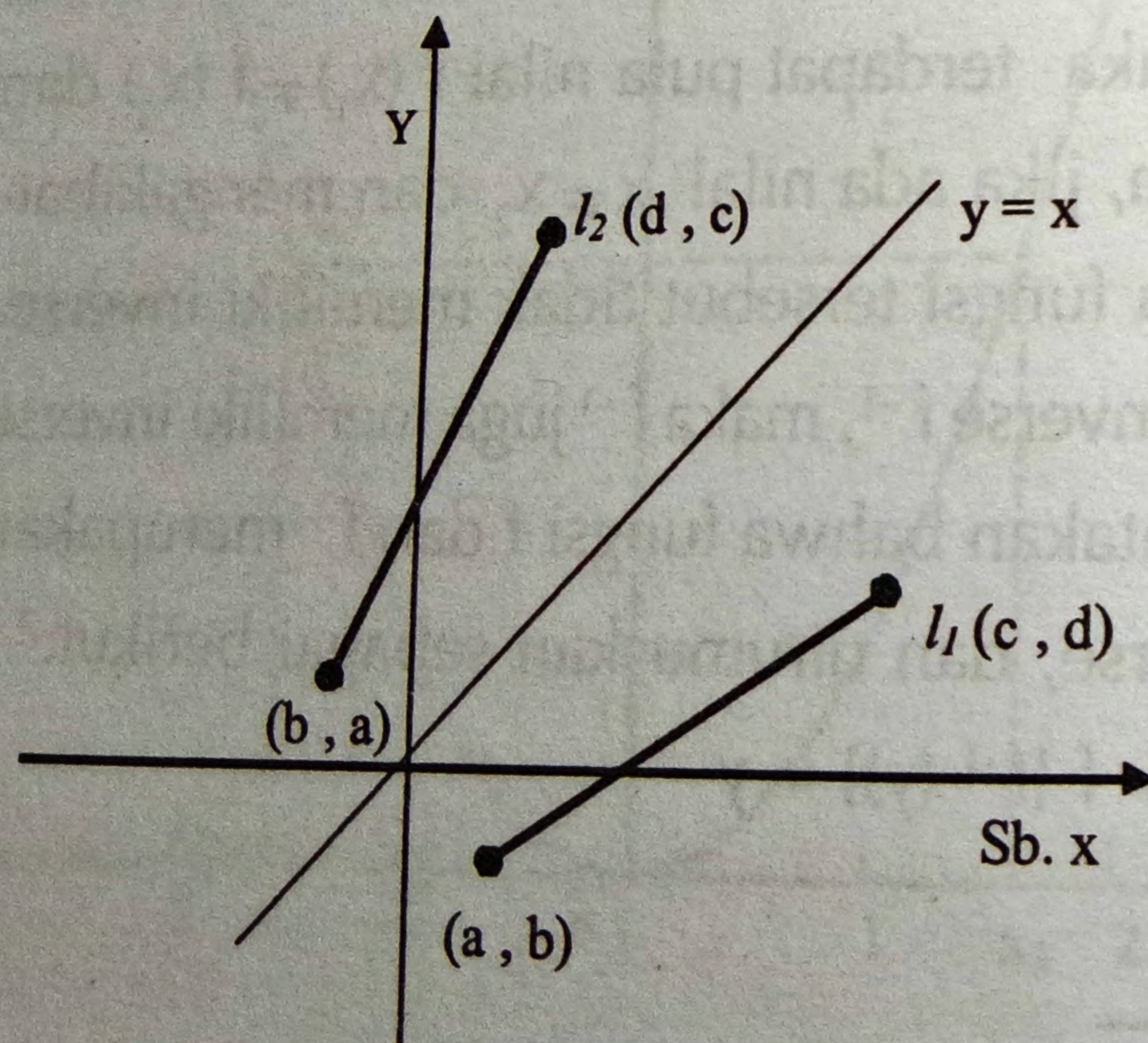
$$f^{-1}(x) = f^{-1}(4x+12) = \frac{y-12}{4} = \frac{4x+12-12}{4} = x$$

Sehingga $f^{-1}(x) = x$

Sedangkan $f[f^{-1}(y)] = f\left(\frac{y-12}{4}\right) = 4\left(\frac{y-12}{4}\right) + 12 = y - 12 + 12 = y$

Sehingga : $f[f^{-1}(y)] = y$

Turunan Fungsi Invers

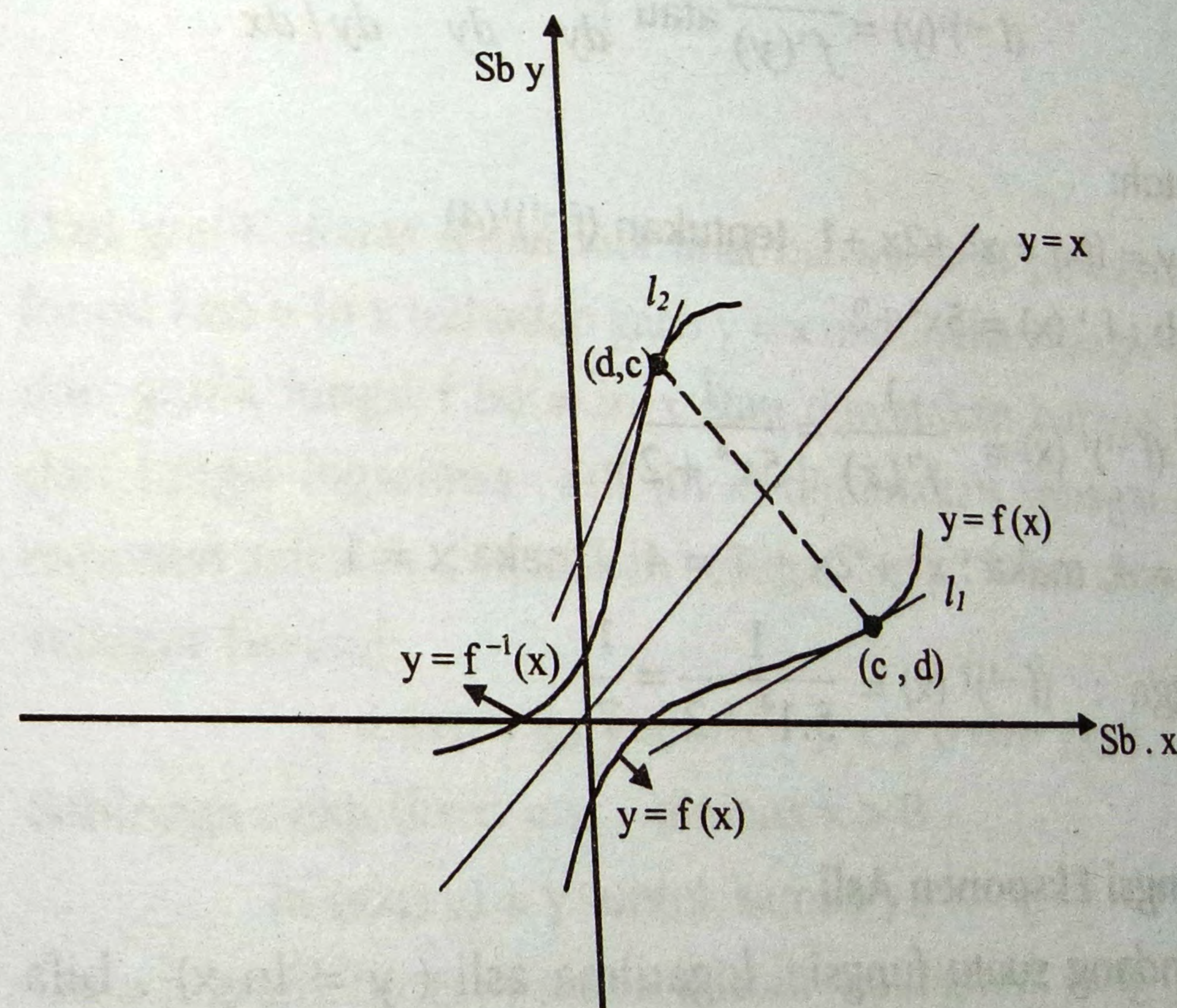


Garis l_2 adalah garis l_1 yang dicerminkan terhadap garis $y=x$. Kemiringan atau gradien dari garis l_1 adalah m_1 yang besarnya dapat dihitung dengan rumusan:

$$m_1 = \frac{d-b}{c-a}$$

Sedangkan gradien garis m_2 adalah sebagai berikut:

$$m_2 = \frac{c-a}{d-b} = \frac{1}{m_1}$$



Apabila l_1 adalah garis singgung grafik f di titik (c, d) maka l_2

adalah garis singgung grafik fungsi f^{-1} dititik (d, c)
 Gradien garis singgung dititik (c, a) maka

$$m_1 = f^{-1}(c)$$

gradien garis singgung dititik (d, c)

$$m_2 = (f^{-1})'(d)$$

$$m_2 = (f^{-1})'(d) = \frac{1}{f''(c)}$$

Dan apabila f dapat diturunkan dan monoton murni pada selang I , apabila $f'(x) \neq 0$ pada suatu x dalam I , maka f^{-1} dapat diturunkan dititik $y = f(x)$ pada daerah hasil f , berlaku:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ atau } \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

Contoh:

Jika $y = f(x) = x^5 + 2x + 1$ tentukan $(f^{-1})'(4)$

Jawab : $f^{-1}(x) = 5x^4 + 2$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{5x^4 + 2}$$

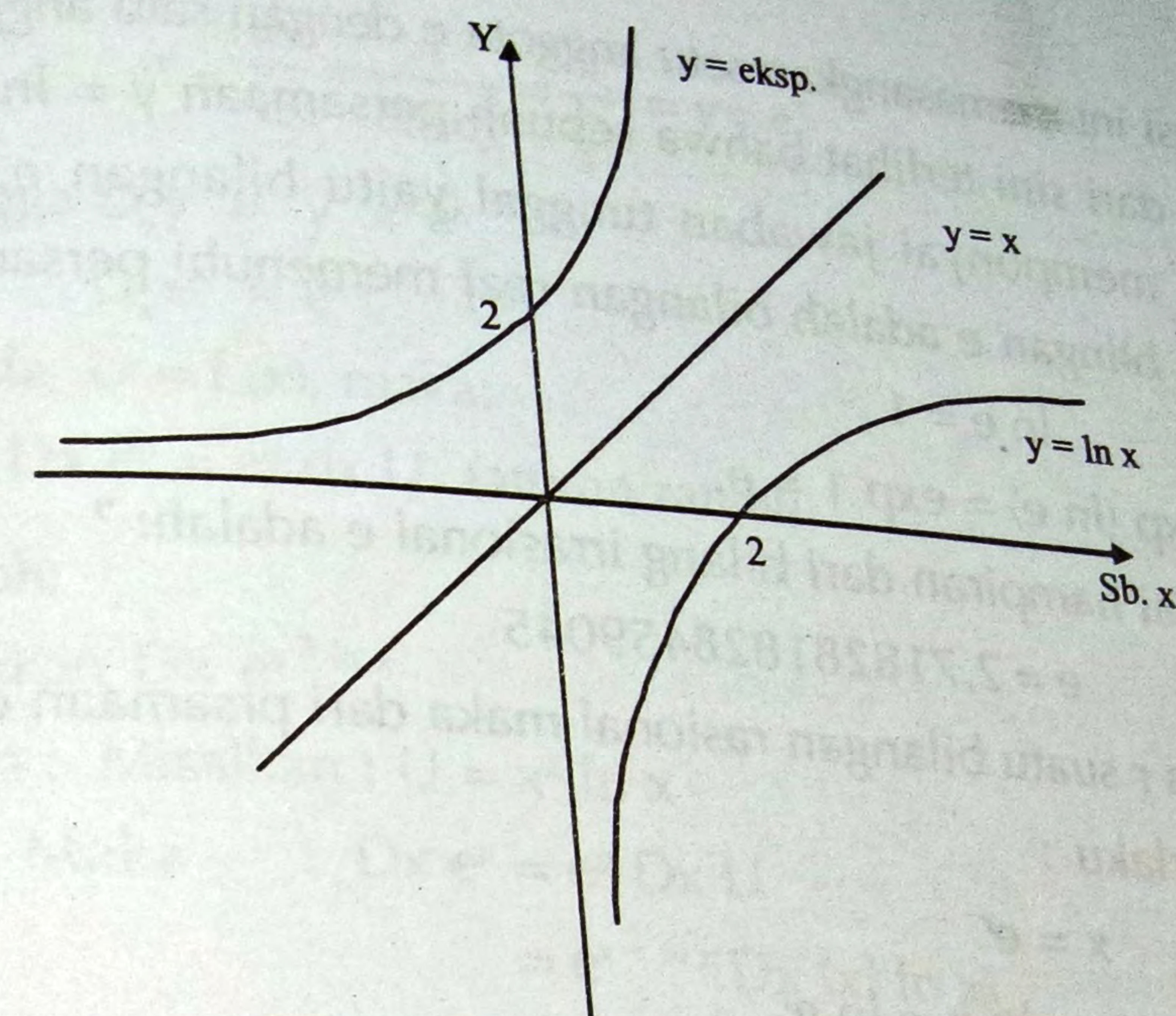
Jika $y = 4$, maka : $x^5 + 2x + 1 = 4$, maka $x = 1$

$$\text{Sehingga : } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{5 \cdot 1^4 + 2} = \frac{1}{7}$$

2.3. Fungsi Eksponen Asli

Pandang suatu fungsi; logaritma asli ($y = \ln x$). bila fungsi ini di cerminkan terhadap garis $y = x$ maka akan diperoleh sketsa.berikut ini:

FUNGSI TRANSENDEN



Dari grafik diatas dapat kita lihat bahwa hasil pencerminan fungsi $f(x) = \ln x$ terhadap garis $y = x$ merupakan fungsi invers dari grafik fungsi $f(x) = \ln x$ atau dinyatakan bahwa invers dari fungsi logaritma asli ($\ln x$) dinamakan sebagai fungsi eksponen asli dan dinyatakan sebagai "exp"⁸ dan dinyatakan sebagai berikut:

$$x = \exp y \Leftrightarrow y = \ln x ; x > 0 \text{ dan } y \in \mathbb{R}$$

Sehingga : $\exp(\ln x) = x$ dimana $x > 0$

$$\ln(\exp y) = y \text{ untuk semua } y \in \mathbb{R}$$

Dalam grafik fungsi $y = \ln x$ adalah suatu grafik yang monoton naik dan dikatakan bahwa fungsi ini mempunyai invers, karena

⁸ Koko Martono, *Kalkulus* (Bandung, Erlangga, 1999) h.192

fungsi ini memasangkan satu anggota c dengan satu anggota y .
 Dan dari sini terlihat bahwa sebuah persamaan $y = \ln x = 1$
 akan mempunyai jawaban tunggal yaitu bilangan e , yang
 mana bilangan e adalah bilangan real memenuhi persamaan:

$$\ln e = 1$$

$$\text{atau } \exp(\ln e) = \exp 1 = e.$$

dan nilai hampiran dari bilang irrasional e adalah: ⁹

$$e = 2,718281828459045$$

Dan jika r suatu bilangan rasional maka dari persamaan diatas
 akan berlaku :

$$x = e^r$$

$$y = \ln x = \ln e^r$$

$$\text{sehingga : } e^r = y^{-1} = \exp(\ln e^r)$$

$$e^r = \exp(\ln e^r)$$

$$= \exp(r \ln e) \quad (\text{dimana } \ln e = 1)$$

$$e^r = \text{eks. } r.$$

dan jika r sebagai bilangan real maka :

$$x = \exp y$$

$$\text{maka : } x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x, \quad x > 0 \text{ \& } y \in R$$

$\exp$ dan $\ln$ adalah berkebalikan, maka $\exp x = e^x$.

dan andaikan $y = e^x$, maka $x = \ln y$.

$$\text{Sehingga } \frac{dx}{dy} = \frac{d(\ln y)}{dy} = \frac{1}{y}$$

⁹ E.J. Purcell, *Kalkulus dan Geometri Analaisis*, Terj. Nyoman Susila
 (Jakarta, Erlangga, 1999) h.387

$$\text{Atau } y^1 = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{1/y} = y = e^x$$

$$\text{Sehingga } D_x y = y = e^x$$

$$\text{Atau } D_x e^x = e^x \quad (10)$$

Apabila $U = f(x)$, maka:

$$D_x e^u = e^u D_x U \quad (\text{aturan rantai})$$

Contoh:

Tentukan $D_x e^{x^2 \ln x}$

Jawab : Misalkan : $U = x^2 \ln x$

$$\begin{aligned} \text{Maka : } D_x e^u &= e^u D_x U \\ &= e^{x^2 \ln x} D_x (x^2 \ln x) \end{aligned}$$

$$\text{Dimana : } D_x U.V = U.dv + V du$$

$$\text{Sehingga : } D_x e^u = e^{x^2 \ln x} \left(x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln x \right)$$

$$D_x e^u = e^{x^2 \ln x} (x + 2x \ln x)$$

$$D_x e^u = e^{x^2 \ln x} \cdot x (1 + 2 \ln x)$$

$$\text{Dimana : } 2 \ln x = \ln x^2$$

$$\text{Sehingga : } D_x e^u = x \cdot e^{x^2 \ln x} (1 + \ln x^2)$$

Dan dari rumus $D_x e^x = e^x$, maka dapat diperoleh rumus anti
 differensial sebagai berikut: $\int e^u du = e^u + C$

Contoh :

$$\text{Tentukan: } \int x^2 e^{-x^3} dx$$

¹⁰ *Ibid.*, h.389

Jawab : Misalkan $U = -x^3$ maka, $Du/dx = -3x^2$ atau $Du = -3x^2 \cdot dx$
 Jadi : $\int x^2 e^{-x^3} dx = -1/3 \int e^{-x^3} (-3x^2 dx)$

$$= -1/3 \int e^u du$$

$$= -1/3 e^u + C$$

$$= -1/3 \cdot e^{-x^3} + C$$

2.4. Fungsi Exponen Umum dan Fungsi Logaritma Umum

Jika $a = e^b \Leftrightarrow b = \ln a$ maka :

$$a = e^{\ln a}, a > 0$$

dan untuk : $a^x = (e^{\ln a})^x$

$$a^x = e^{x \ln a} ; \text{Dimana : } a > 0$$

$$\ln a^x = \ln (e^{x \ln a})$$

$$\ln a^x = x \ln a \cdot \ln e \text{ (karena } \ln e^u = u \ln e \text{)}$$

$$\ln a^x = x \ln a \text{ (karena } \ln e = 1 \text{)}$$

Turunan fungsi eksponensial Umum

$$D_x A_x = D_x (e^{x \ln a})$$

$$D_x A_x = e^{x \ln a} D_x (x \ln a)$$

$$D_x A_x = a^x \ln a$$

Sehingga : $D_x a^x = a^x \ln a \cdot 1$

$$D_x a^x = a^x \ln a$$

Contoh :

Tentukanlah dy/dx jika : $y = (x^4 + 2)^5 + 5x^{4+2}$

Jawab : $dy/dx = 5(x^4 + 2)^4 \cdot 4x^3 + 5x^{4+2} \ln 5 \cdot 4x^3$

$$Dy/dx = 4x^3 [5(x^4 + 2)^4 + 5x^{4+2} \ln 5]$$

$$Dy/dx = 4x^3 [5(x^4 + 2)^4 + 5 \cdot 5x^{4+1} \ln 5]$$

$$Dy/dx = 20x^3 [(x^4 + 2)^4 + 5x^{4+1} \ln 5]$$

Jika $a > 0$, $b > 0$, x dan y bilangan real, maka akan berlaku:¹¹

$$1. a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$$

$$2. \frac{a^x}{b^y} = a^{x-y}$$

$$3. (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$4. (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Fungsi Logaritma

Jika fungsi $f(x) = a^x$ adalah fungsi yang monoton pada selang I dan jika $0 < a < 1$, maka $f(x) = a^x$ akan menurun dan jika $a > 1$ maka fungsi $f(x) = a^x$ akan naik dan $f(x)$ mempunyai fungsi invers yang dinamakan:

" Fungsi logaritma dengan Bilangan pokok atau bilangan dasar a "

Andaikan a bilangan positif dan $a \neq 1$, maka:

$$Y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Dan seandainya $a = e$ maka $f(x) = e^x$ sehingga:

$$A = e^b \Leftrightarrow b = \ln a$$

$$X = e^y \Leftrightarrow y = \ln x$$

$$Y = \log_e x \Leftrightarrow x = e^y \rightarrow y = \ln x$$

¹¹ Ibid., h.398

Sehingga : $\log_e x = \ln x$
 " Fungsi $f(x) = e^x$ adalah fungsi logaritma dengan bilangan pokok atau dasar e "
 apabila $y = \log_a x$, maka $x = a^y$, sehingga:
 $\ln x = \ln a^y$
 $\ln x = y \ln a$

Sehingga : $y = \frac{\ln x}{\ln a}$ dan $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Turunan Fungsi Logaritma (bilangan dasar a)

Untuk $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$$D_x \log_a x = D_x \frac{\ln x}{\ln a}$$

Dimana $D_x \ln x = 1/x$, maka :

$$D_x \log_a x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

Contoh :

Tentukan dy/dx bila $y = \log_{10}(x^4 + 13)$.

Jawab : $U = x^4 + 13$, maka $dU/dx = 4x^3$

Maka $y = \log_{10} U$

$$Dy/du = Du = \log_{10} U du$$

$$Dy/du = \frac{1}{U \ln 10} du.$$

$$Dy/du = \frac{1}{(x^4 + 13) \ln 10} 4x^3$$

$$Dy/dx = \frac{4x^3}{(x^4 + 13) \ln 10}$$

Fungsi a^x , x^a , x^x

$F(x) = a^x$ adalah fungsi eksponen dan

$$D_x (a^x) = a^x \ln a$$

$F(x) = x^a$ adalah fungsi pangkat, dan

$$D_x (x^a) = a x^{a-1}$$

$F(x) = x^x$ atau $y = x^x$ (bila kedua ruas di ln-kan) maka:

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$D_x (\ln x) = D_x (x \ln x)$$

$$1/y \cdot D_x y = x \cdot 1/x + 1 \cdot \ln x$$

$$D_x y = y (x/x + \ln x)$$

$$D_x y = y (1 + \ln x) ; \text{dimana } y = x^x$$

$$\text{Maka : } D_x y = x^x (1 + \ln x)$$

Contoh :

Tentukan dy/dx jika $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$

Jawab : $\ln y = \ln (x^2 + 1)^{\sin x}$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln (x^2 + 1)$$

$$D_x \ln y = D_x (\sin x \cdot \ln (x^2 + 1))$$

$$1/y \cdot dy/dx = \sin x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} + \cos x \cdot \ln (x^2 + 1)$$

$$dy/dx = y \left(\frac{2x \cdot \sin x}{x^2 + 1} + (\cos x) \ln (x^2 + 1) \right)$$

Dimana : $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$

Maka : $dy/dx = (x^2 + 1)^{\sin x} \left(\frac{2x \cdot \sin x}{x^2 + 1} + (\cos x) \ln (x^2 + 1) \right)$

2.5. Pertumbuhan dan Peluruhan

Persamaan fungsi eksponensial juga bisa digunakan untuk memperkirakan populasi jumlah penduduk. Misalkan penambahan Δy populasi (Kelahiran-kematian) dalam jangka pendek Δt sebanding dengan banyaknya jumlah penduduk pada awal jangka waktu itu dan sebanding dengan panjangnya waktu itu sendiri atau dalam persamaan: $\Delta y = k y \Delta t$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k \cdot y \quad \text{atau} \quad \frac{d_y}{d_t} = k \cdot y$$

Dimana untuk populasi penduduk dunia, $k \approx 0,0198$ (data Statistik)¹²

Dari persamaan diatas:

$$\frac{d_y}{y} = k \cdot d_t$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k \cdot dt$$

$$\ln y = k \cdot t + C$$

$y = y_0$ pada saat $t = 0$ sehingga:

$$\ln y_0 = 0 + C$$

atau $C = \ln y_0$, sehingga :

$$\ln y = k \cdot t + C$$

¹² Ibid., h. 400

$$\ln y = k \cdot t + \ln y_0$$

$$\ln y - \ln y_0 = k \cdot t$$

$$\ln \frac{y}{y_0} = k \cdot t$$

Dan dalam bentuk eksponen : $\frac{y}{y_0} = e^{kt}$

$$\text{Atau : } y = y_0 \cdot e^{kt}$$

Contoh :

Pada 1 Januari 1975, penduduk dunia berjumlah 4 milyar. Berapa jumlah penduduk dunia pada tahun 2000 ?

Jawab :

$$Y_0 = 4 \text{ M}$$

$$T = 2000 - 1975 = 25 \text{ thn}$$

$$\text{Maka : } y = 4 \cdot e^{(0,0198) \cdot 25}$$

$$Y \approx 6,6 \text{ milyar}$$

Peluruhan Radioaktif

Zat radioaktif akan mengalami peluruhan. Peluruhan zat radioaktif berjalan dengan laju yang sebanding dengan banyaknya zat pada saat itu.

Proses ini memenuhi persamaan:¹³

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y \quad \text{Dimana } k = \text{negatif}$$

Contoh :

Karbon 14 adalah salah satu zat radioaktif yang mengalami

¹³ Ibid., h.402

peluluhan, Setengah umurnya adalah 5730 tahun (artinya zat tersebut memerlukan 5730 thn untuk menyusut menjadi setengahnya. Apabila pada saat awal ada 10 gram, berapa sisanya setelah 2000 tahun ?

Jawab: $\frac{1}{2} = 1 \cdot e^{k \cdot (5730)}$
 $\ln \frac{1}{2} = \ln e^{k \cdot (5730)}$
 $\ln 1 - \ln 2 = \ln e^{k \cdot (5730)}$
 $0 - \ln 2 = 5730 k$
 $k = \frac{-\ln 2}{5730} \approx 0,000121$

Jadi : $y = 10 e^{-0,000121 \cdot t}$

Pada $t = 2000$ thn, maka :

$$Y = 10 e^{0,000121 \cdot (2000)}$$

$$Y \approx 7,80 \text{ gram}$$

Bunga Majemuk

Bila kita menyimpan uang di bank Rp. \$ 100 dengan bunga majemuk 12 % maka modal kita akan bertambah tiap bulan seperti berikut :

Bulan I : $\$ 100 (1 + 1/100)$

Bulan II : $\$ 100 (1 + 1/100)^2$

Bulan III : $\$ 100 (1 + 1/100)^3$

Bulan XI : $\$ 100 (1 + 1/100)^{11}$

Atau bila modal kita A_0 disimpan dengan bunga majemuk 100 r sebanyak n kali tiap tahun, maka setelah t tahun akan sebanyak $A(t)$, dengan :

$$A(t) = A_0 (1 + r/n)^{n \cdot t}$$

Contoh :

Andaikan johan menyimpan uang \$ 500 dengan bunga majemuk 13 % tiap hari, berapa uang tersebut setelah 2 tahun ?

Jawab :

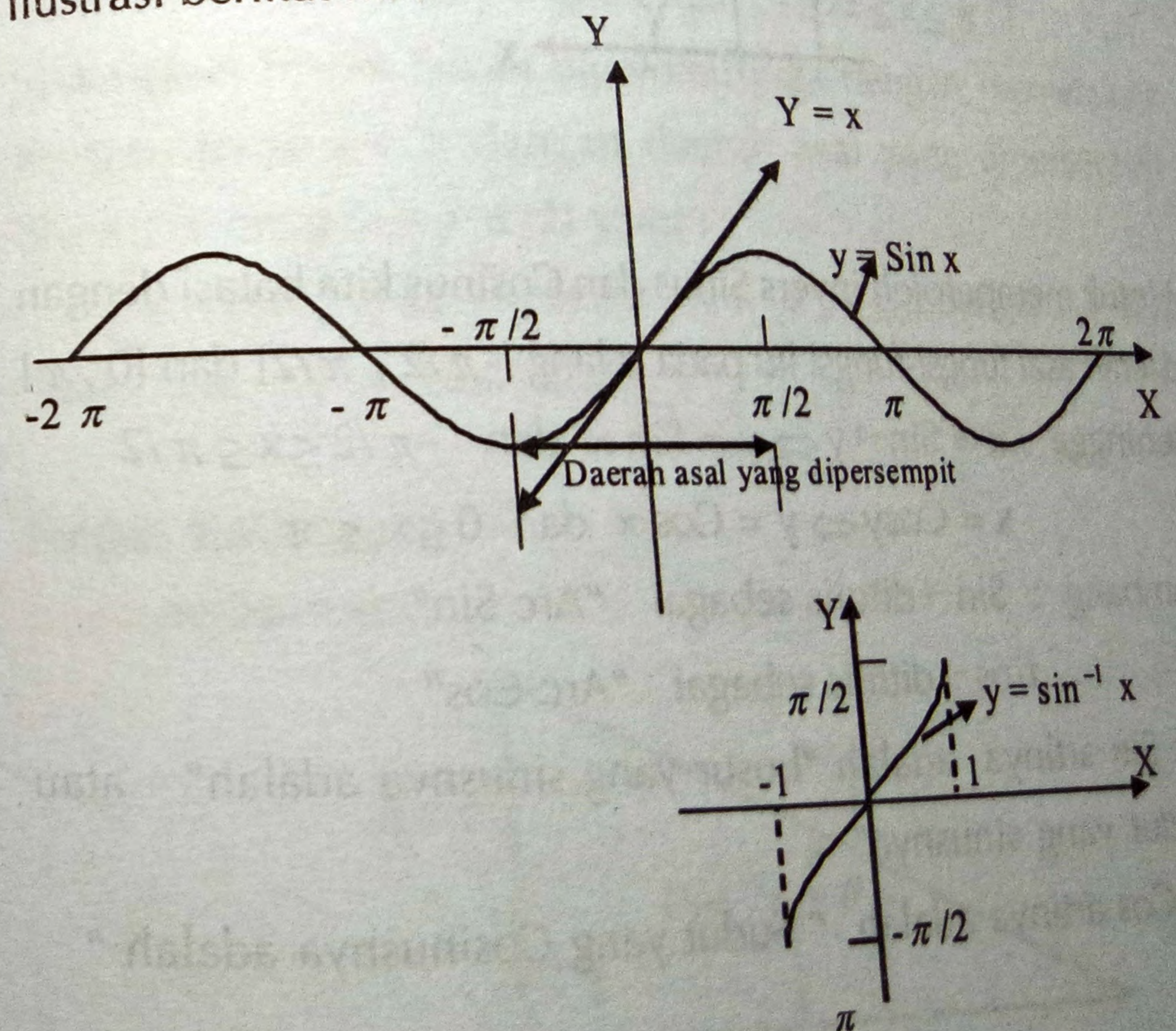
$$R = 0,13 \text{ dan } n = 365 \text{ hari (1 thn)}$$

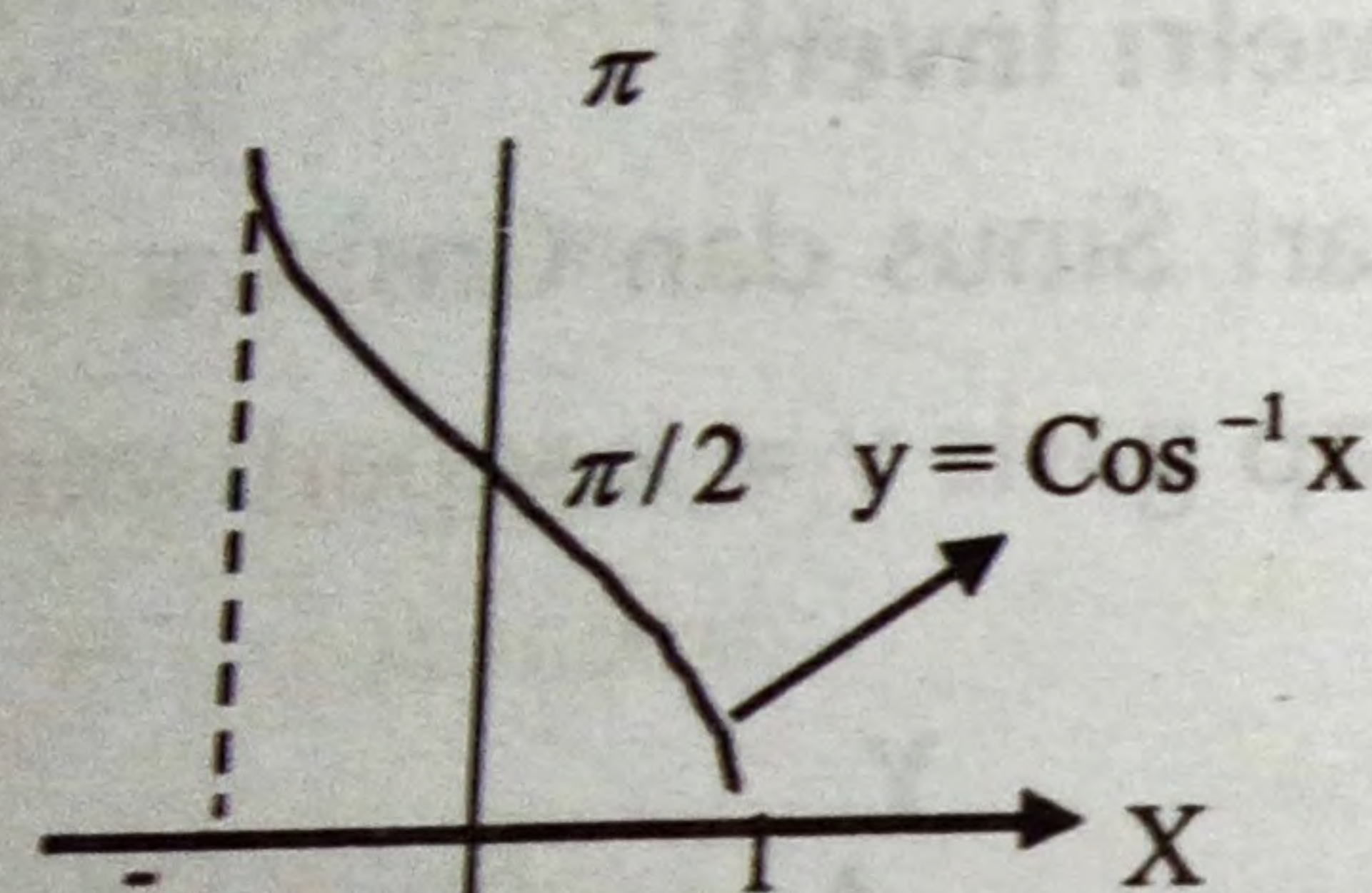
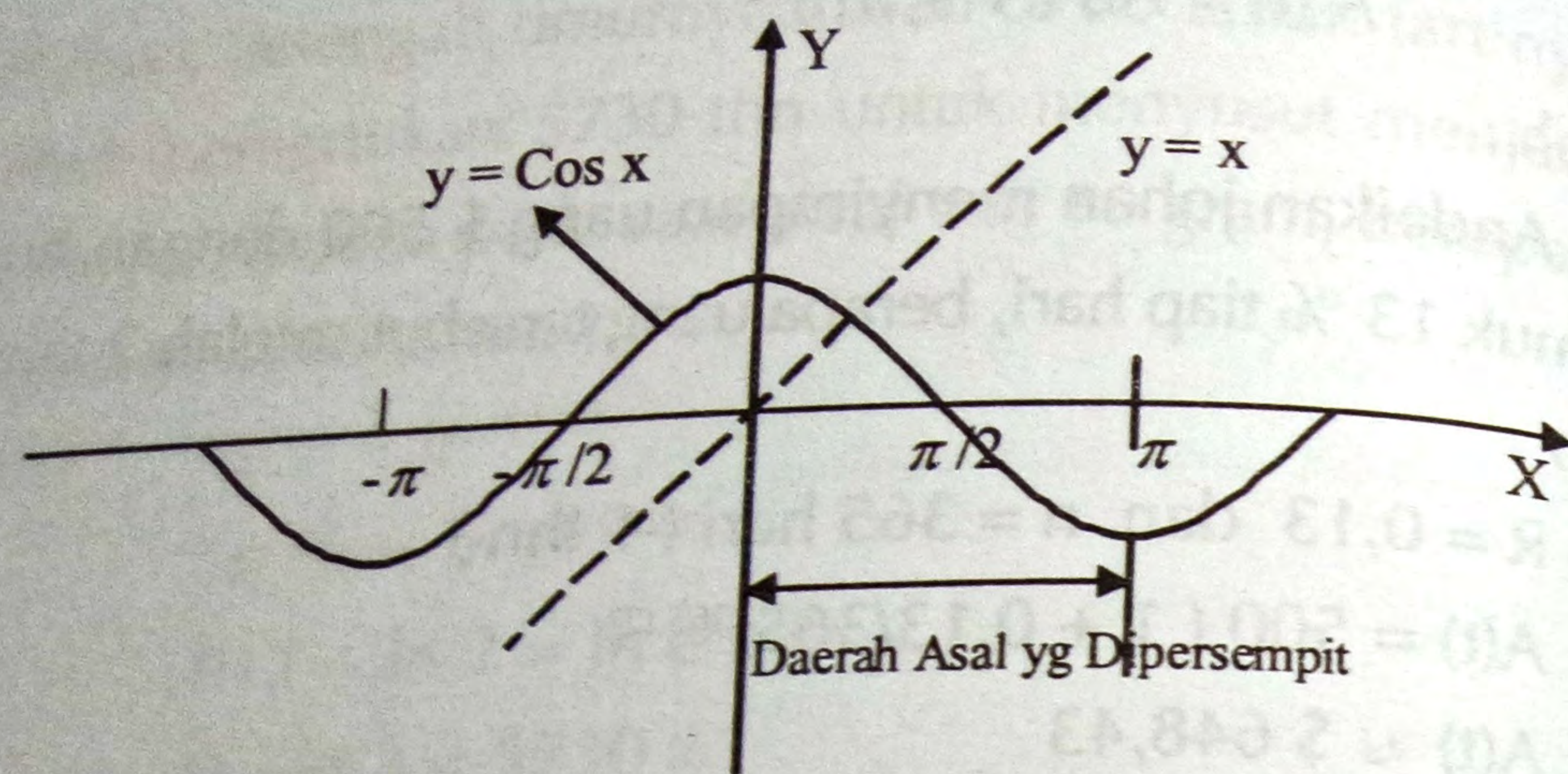
$$A(t) = 500 (1 + 0,13/365)^{365 \cdot (2)}$$

$$A(t) \approx \$ 648,43$$

2.6. Fungsi Trigonometri Invers

Fungsi invers dari Sinus dan Cosinus diperoleh dengan pencerminan terhadap garis $y = x$ seperti yang tampak dalam ilustrasi berikut ini :





Untuk memperoleh invers Sinus dan Cosinus kita batasi dengan daerah asal fungsi-fungsi itu pada selang $[-\pi/2, \pi/2]$ dan $[0, \pi]$
 Sehingga : $x = \sin^{-1} y \Leftrightarrow y = \sin x$ dan $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

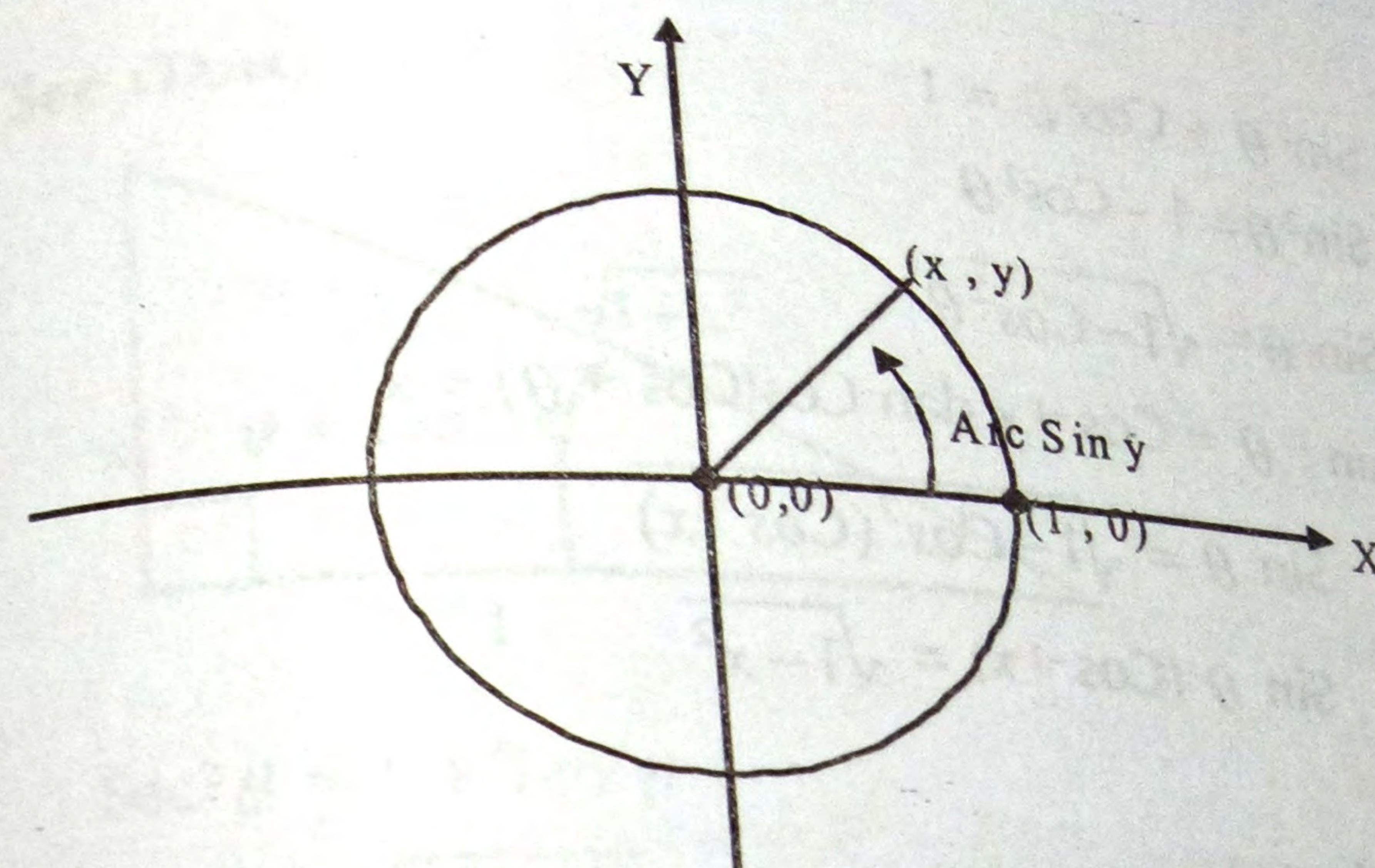
$$x = \cos y \Leftrightarrow y = \cos x \text{ dan } 0 \leq x \leq \pi$$

Lambang : $\sin^{-1}$ ditulis sebagai "Arc Sin"

$\cos^{-1}$ ditulis sebagai "Arc Cos"

Arc Sin artinya adalah "busur yang sinusnya adalah" atau "Sudut yang sinusnya"

Arc Cos artinya adalah "Sudut yang Cosinusnya adalah"



Demikian pula dengan invers tangen yaitu diperoleh dengan memetakan grafik $y = \tan x$ terhadap garis $y = x$ dengan daerah asal yang dipersempit $(-\pi/2, \pi/2)$

$$\text{Yaitu : } x = \tan^{-1} y \Leftrightarrow y = \tan x \text{ dan } -\pi/2 < x < \pi/2$$

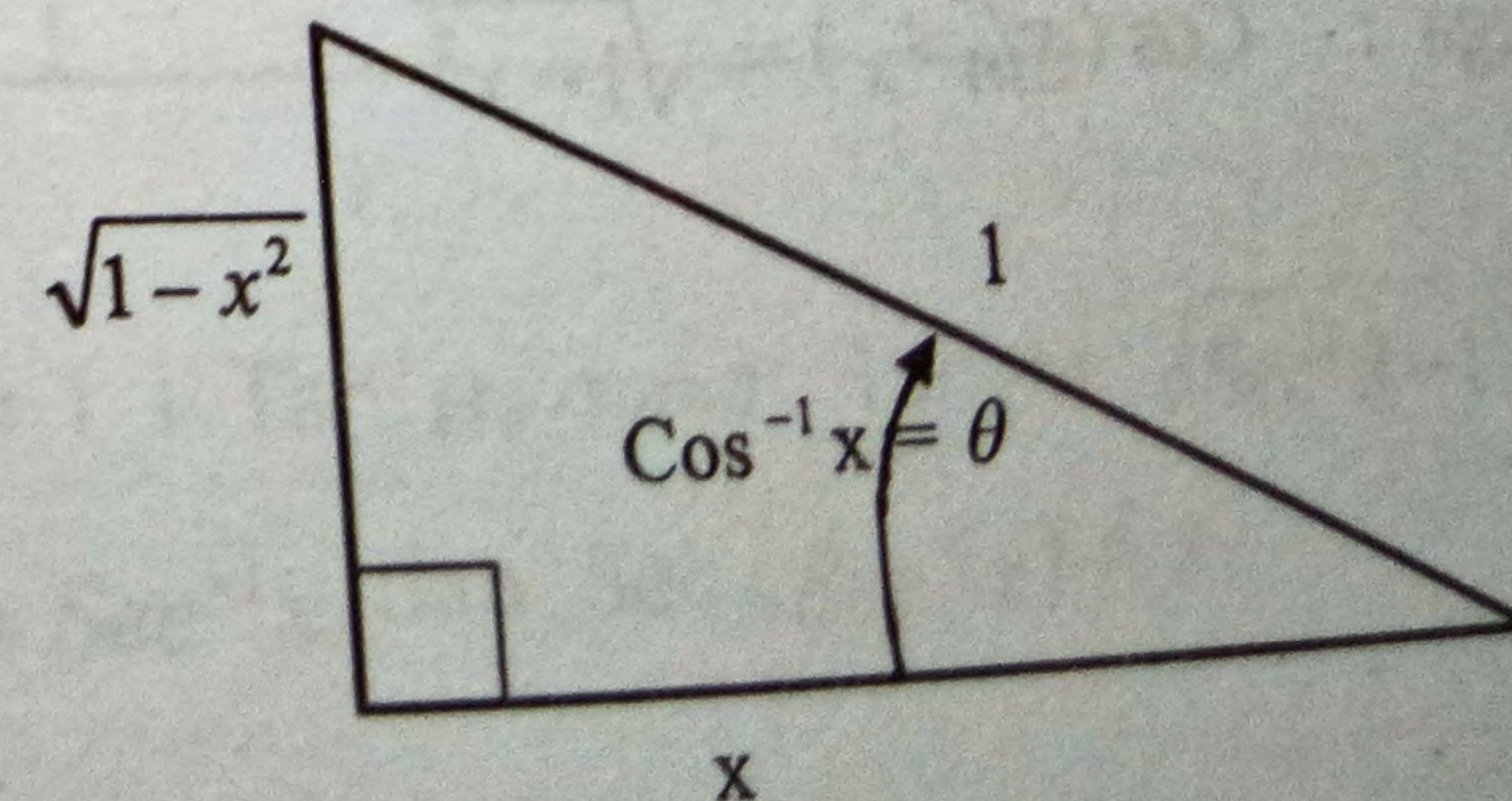
Sedangkan invers Sekan diperoleh juga dengan memetakan dengan garis $y = x$ dengan daerah asal yang dipersempit $(0 \leq x \leq \pi \text{ dengan } x \neq \pi/2)$ yaitu :

$$x = \sec^{-1} y \Leftrightarrow y = \sec x \text{ dan } 0 \leq x \leq \pi \text{ dengan } x \neq \pi/2$$

$$\text{Dan } \sec^{-1} y = \cos^{-1}(1/y)$$

Empat Kesamaan

$$1. \sin \theta (\cos^{-1} x)$$



$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

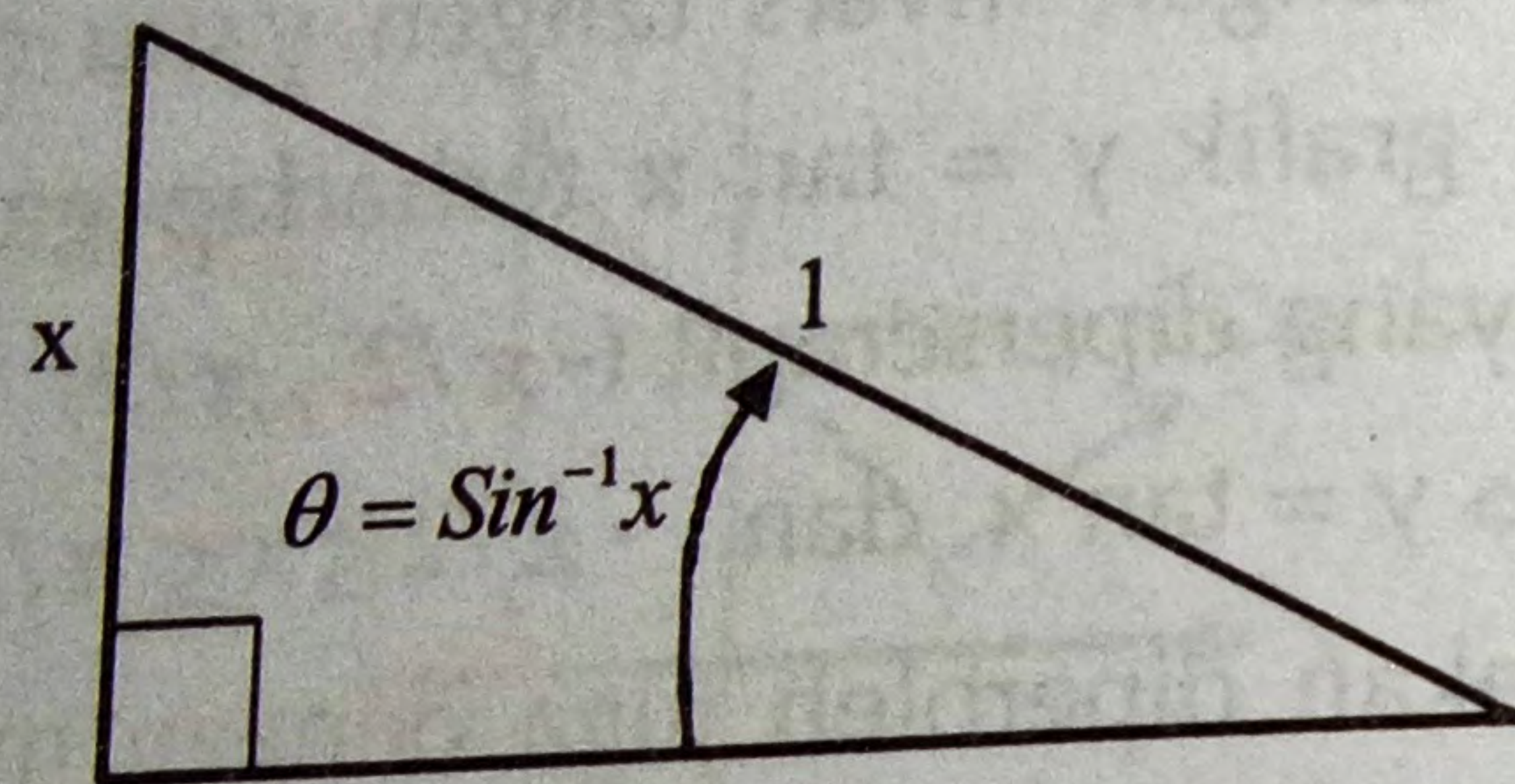
$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

Misalkan : $\theta = \cos^{-1} x$ dan $\cos(\cos^{-1} \theta) = x$

$$\text{Maka : } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)}$$

$$\sin \theta (\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$$

II. Cos ($\sin^{-1} x$)



$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

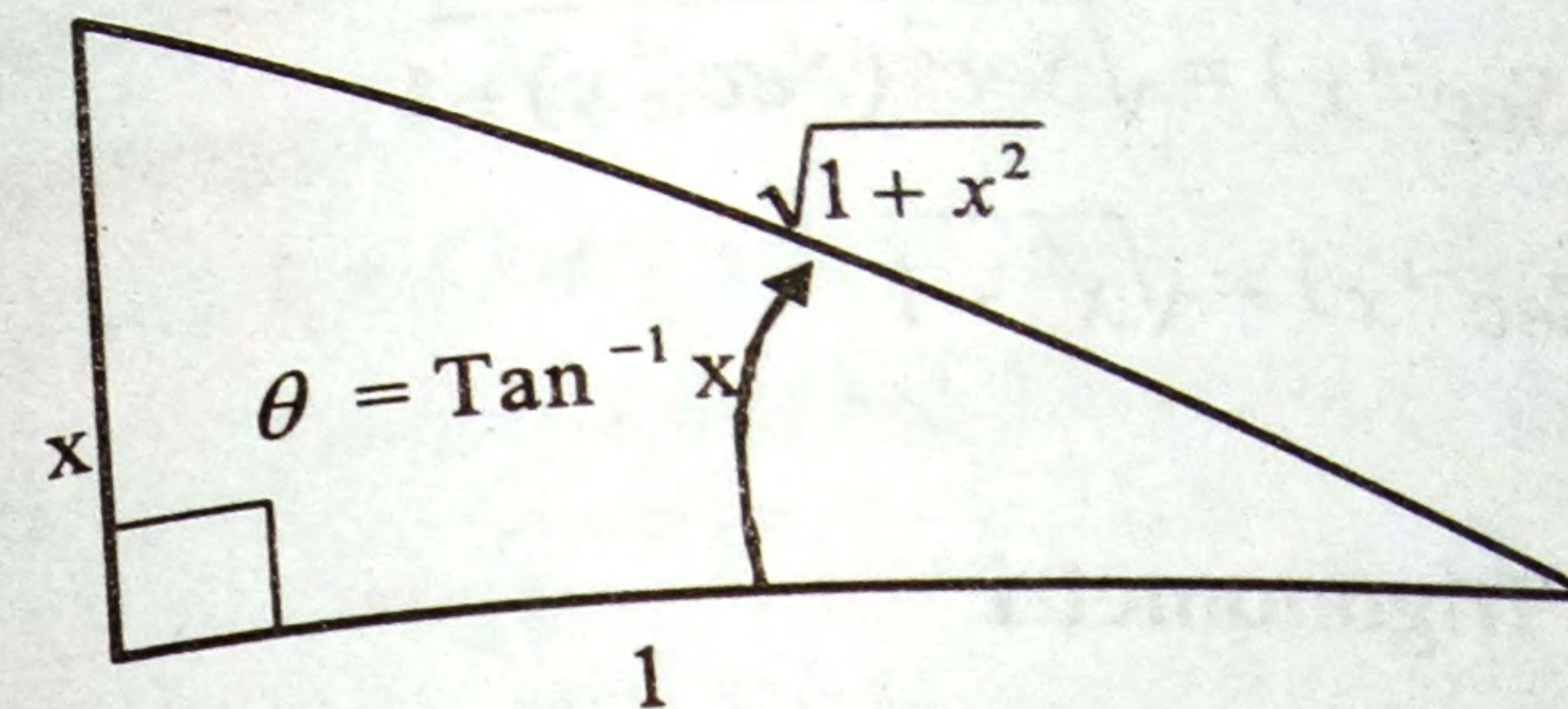
Jika $\theta = \sin^{-1} x$ dan $\sin(\sin^{-1} x) = x$

$$\text{Maka : } \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)}$$

$$\text{Sehingga : } \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$$

III. Sec (Tanx)



$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$$

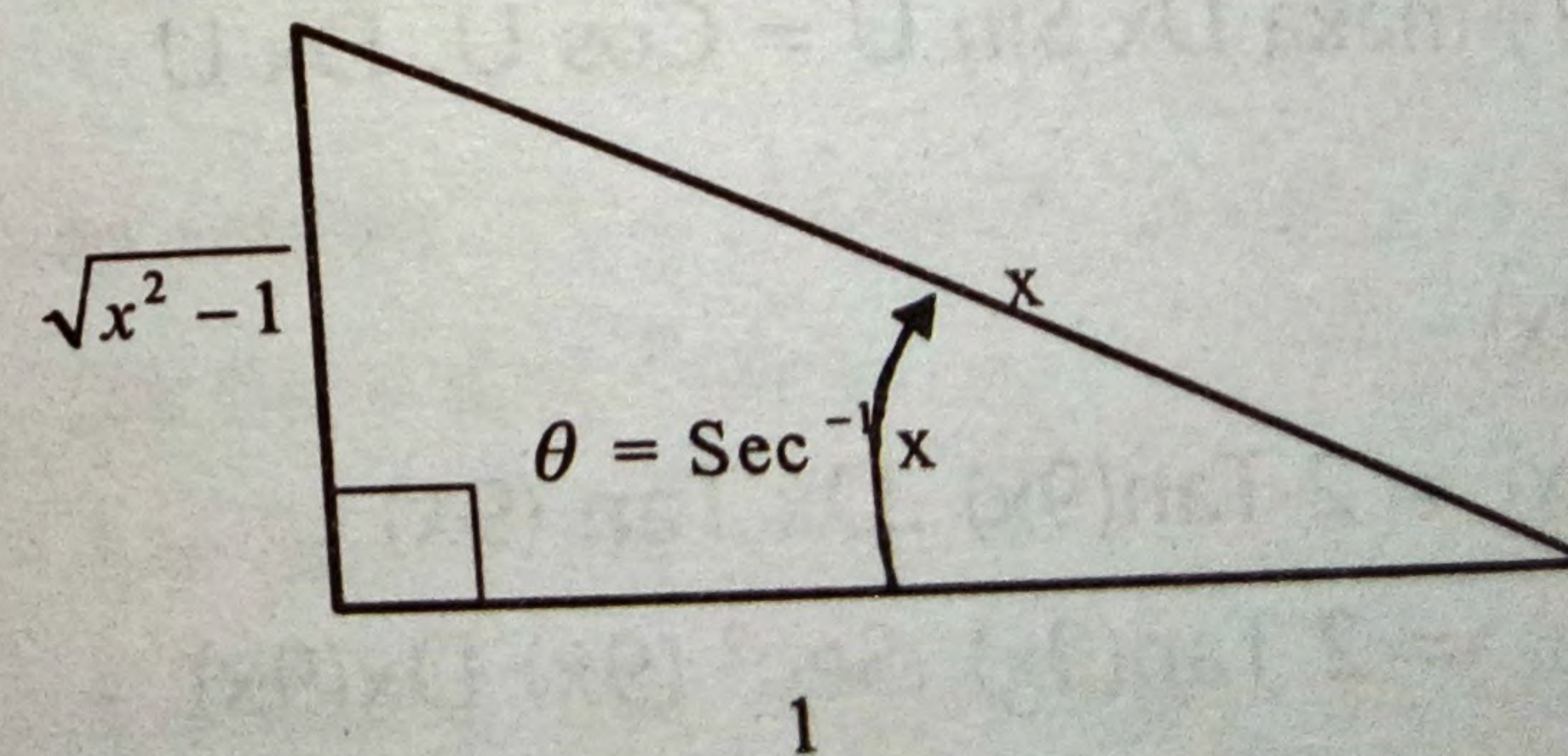
Jika $\theta = \tan^{-1} x$ dan $\tan(\tan^{-1} x) = x$

$$\text{Maka : } \sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1 + \tan^2(\tan^{-1} x)}$$

$$\text{Sehingga : } \sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1 + x^2}$$

IV. Tan (Sec⁻¹ x)



$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta, \text{ maka: } \tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$$

$$\text{Jika } \theta = \sec^{-1} x \text{ dan } \sec(\sec^{-1} x) = x$$

$$\text{Maka : } \tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$$

$$\tan (\sec^{-1} x) = \sqrt{\sec^2 (\sec^{-1} x) - 1}$$

$$\text{Sehingga : } \tan (\sec^{-1} x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

2.7. Turunan Fungsi Trigonometri

Selain Sinus dan Cosinus, yang termasuk dalam fungsi trigonometri lainnya adalah : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

Turunan fungsi trigonometri dapat disajikan sebagai berikut:¹⁴

$$Dx \sin x = \cos x \quad Dx \cos x = -\sin x$$

$$Dx \tan x = \sec^2 x \quad Dx \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$Dx \sec x = \sec x \tan x \quad Dx \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$$

Fungsi Komposit¹⁵

Misalkan : $U = f(x)$, maka $Dx \sin U = \cos U \cdot Dx U$

Contoh :

Tentukan $Dx \tan^2(9x)$

$$\begin{aligned} \text{Jawab : } Dx \tan^2(9x) &= 2 \tan(9x) \cdot Dx \tan(9x) \\ &= 2 \tan(9x) \cdot \sec^2(9x) Dx(9x) \\ &= 2 \tan(9x) \cdot \sec^2(9x) \cdot 9 \\ &= 18 \tan(9x) \cdot \sec^2(9x) \end{aligned}$$

¹⁴ Ibid., h.416

¹⁵ Ibid., h. 416

Invers Fungsi Trigonometri (Differensial)

Misalkan $y = \sin^{-1} x$, maka $x = \sin y$

1. Sehingga : $Dx x = Dx \sin y$

$$1 = \cos y Dx y ; \text{ dimana : } y = \sin^{-1} x$$

$$1 = \cos (\sin^{-1} x) \cdot Dx(\sin^{-1} x) ; \text{ dimana } \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$1 = \sqrt{1-x^2} \cdot Dx (\sin^{-1} x)$$

$$Dx (\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. Misalkan $y = \cos^{-1} x$, maka $x = \cos y$

$$Dx (x) = Dx \cos y$$

$$1 = -\sin y Dx (y)$$

$$1 = -\sin (\cos^{-1} x) \cdot Dx \cos^{-1} x ; \text{ dimana: } \sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$1 = -(\sqrt{1-x^2}) Dx \cos^{-1} x$$

$$\text{Sehingga : } Dx \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Misalkan : $y = \tan^{-1} x$, maka : $x = \tan y$

$$Dx (x) = Dx \tan y$$

$$1 = \sec^2 y \cdot Dx y$$

$$1 = \sec^2 (\tan^{-1} x) \cdot Dx \tan^{-1} x ; \text{ Dimana : } \sec (\tan^{-1} x) =$$

$$1 = (1+x^2) \cdot Dx \tan^{-1} x$$

$$Dx \tan^{-1} x = \frac{1}{(1+x^2)}$$

4. Misalkan : $y = \sec^{-1} x$, maka : $x = \sec y$

$$Dx.x = Dx \sec y$$

$$1 = \sec y \cdot \tan y \cdot Dy$$

$$1 = \sec(\sec^{-1} x) \cdot \tan(\sec^{-1} x) \cdot D(\sec^{-1} x)$$

$$\text{Dimana : } \sec(\sec^{-1} x) = x \text{ dan } \tan(\sec^{-1} x) = \pm \sqrt{x^2 - 1} (+; \text{ jika } x > 1 \text{ dan } - \text{ jika } x < 1)$$

$$\text{Sehingga : } 1 = x \cdot (\pm \sqrt{x^2 - 1}) Dx (\sec^{-1} x)$$

$$1 = \pm x \sqrt{x^2 - 1} Dx (\sec^{-1} x)$$

$$\text{Maka : } Dx (\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} \text{ Dimana : } |x| > 1$$

Contoh :

Tentukan $Dx \sin^{-1}(3x-1)$

$$\begin{aligned} \text{Jawab : } Dx \sin^{-1}(3x-1) &= \frac{1}{\sqrt{1-(3x-1)^2}} Dx (3x-1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-9x^2 + 6x}} \end{aligned}$$

2.8. Fungsi Hiperbola dan Inversnya

Fungsi Sinus hiperbola dan Cosinus hiperbola dapat didefinisikan sebagai berikut:¹⁶

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

¹⁶ Ibid., h.421

Turunan Fungsi Hiperbola

$$Dx \sinh x = Dx \left(\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

$$Dx \cosh x = Dx \left(\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

Dan dalam bentuk lainnya dinyatakan sebagai berikut:

$$Dx \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$Dx \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$Dx \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$Dx \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$$

Contoh :

Tentukan $Dx \cosh^2(3x-1)$

$$\begin{aligned} \text{Jawab: } Dx \cosh^2(3x-1) &= 2 \cosh(3x-1) Dx \cosh(3x-1) \\ &= 2 \cosh(3x-1) \sinh(3x-1) Dx(3x-1) \\ &= 6 \cosh(3x-1) \sinh(3x-1) \end{aligned}$$

Turunan Invers Fungsi Hiperbola

Invers fungsi hiperbola dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x = \sinh^{-1} y \Leftrightarrow y = \sinh x$$

$$x = \cosh^{-1} y \Leftrightarrow y = \cosh x$$

$$x = \tanh^{-1} y \Leftrightarrow y = \tanh x$$

$$x = \operatorname{sech}^{-1} y \Leftrightarrow y = \operatorname{sech} x$$

Berikut ini kita akan cari Invers fungsi hiperbola:

Misalkan: $y = \cosh x$, ini berarti:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (ruas kiri dan kanan dikalikan dengan 2e)}$$

$$2y e = (e/2) \cdot (2e) + (e^{-x}/2) \cdot (2e^x)$$

$$2y e^x = (e^x)^2 + 1$$

$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$ (bentuk polynomial : dari rumus abc akan didapat)

$$\text{Rumus } a, b, c : x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Sehingga : } e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1};$$

$$\text{Dimana : } \sqrt{4y^2 - 4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{y^2 - 1} = 2 \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\text{Sehingga : } e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2}$$

$$e^x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 1}}{1}$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Jika : $e^x = a$ maka $x = \ln a$

$$\text{Maka: } x = \ln (y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

Agar $x \geq 0$ maka diambil tanda +, sehingga:

Jika $y = \cosh x \Rightarrow x = \cosh^{-1} y$, shg:

$$\cosh^{-1} y = \ln (y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Dan dengan cara yang sama, akan diperoleh inversnya fungsi-fungsi hiperbola:

$$1. \sinh^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$2. \cosh^{-1} = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) \text{ untuk } x \geq 1$$

$$3. \tanh^{-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ untuk } -1 < x < 1$$

$$4. \operatorname{sech}^{-1} = \ln \left(\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x} \right) \text{ untuk } 0 < x \leq 1$$

Turunan Fungsi Hiperbola

Dan dari tiap-tiap fungsi hiperbola diatas dapat diturunkan sebagai berikut:

$$1. D_x \sinh^{-1} x = D_x \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} D_x (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$D_x \sinh^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Dengan cara yang sama dengan pembuktian diatas, kita akan peroleh rumus-rumus turunan fungsi hiperbola sebagai berikut:

2. $D_x \cosh^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ dimana : $x > 1$
3. $D_x \tanh^{-1} = \frac{1}{1-x^2}$ dimana $-1 < x < 1$
4. $D_x \operatorname{sech}^{-1} = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$ dimana : $0 < x < 1$

2.9. Soal – Soal

A. Buktikan kesamaan berikut ini:

1. $e^x = \cosh x + \sinh x$
2. $e^{-x} = \cosh x - \sinh x$
3. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
4. $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
5. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

B. Tentukan $D_x y$ dari persamaan berikut ini :

1. $y = \sinh^2 x$
2. $y = \cosh(x^2 - 1)$
3. $y = x^2 \sinh x$
4. $y = \sinh 4x \cdot \cosh 2x$
5. $y = e^x \cosh x$
6. $y = \cosh^{-1}(x^3)$
7. $y = x \sinh^{-1}(2x)$
8. $y = \sinh(\cos x)$
9. $y = \sinh^{-1}(\sin x)$
10. $y = \ln(\sinh^{-1} x)$

C. Hitunglah integral berikut :

1. $\int x \cosh(x^2 + 3) dx$
2. $\int \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

3. $\int e^x \sinh e^x dx$
4. $\int \tanh x \ln(\cosh x) dx$
5. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \cosh 2x$,
 $y = 0$, $x = 0$ dan
 $x = \ln 3$

BAB III

BENTUK TAK TENTU DAN INTEGRAL TAK WAJAR

3.1 Bentuk Tak Tentu Limit Fungsi

Kita telah mempelajari limit fungsi trigonometri bahwa;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Perhatikan bentuk limit ini untuk $x \rightarrow 0$, limit pembilang dan limit penyebutnya nol. Bentuk demikian dinamakan bentuk tak tentu $0/0$. Kita mengenal macam-macam bentuk tak tentu limit fungsi., yaitu $0/0, \infty/\infty, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$

A. Bentuk Tak Tentu

Andaikan $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \lim_{x \rightarrow u} g(x) = 0$ dan limitnya ada, maka:

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aturan di atas disebut dengan aturan L'Hopital untuk bentuk $0/0$

Contoh: 1. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$

Jawab :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{2x - 1} = \frac{6}{5}$$

2. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$

Jawab :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 2x}{1/(1+x)} \\ &= 2/1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

B. Bentuk Tak Tentu

Andaikan $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)| = \infty$ dan

Jika $\lim_{x \rightarrow \infty} [f'(x)/g'(x)]$ ada, maka:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Contoh :

Apabila a bilangan riil yang positif buktikan bahwa n :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$$

Jawab : Misalkan diambil nilai $a = 2,5$ maka :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2,5}}{e^x} = 0 \text{ dengan aturan L Hopital, yaitu } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

maka:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2,5x^{1,5}}{e^x} = 0 \text{ dengan aturan L Hopital, maka :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2,5)(1,5)x^{0,5}}{e^x} = 0 \text{ dengan aturan L Hopital, maka :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2,5)(1,5)(0,5)x^{-0,5}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2,5)(1,5)(0,5)}{(x^{0,5})e^x} = 0$$

$$\frac{(2,5)(1,5)(0,5)}{(\infty^{0,5})e^\infty} = 0$$

C. Limit Bentuk Taktentu ($0 \cdot \infty$) dan ($\infty - \infty$)

Andaikan suatu persamaan fungsi berbentuk seperti berikut:

$$A(x) \rightarrow 0 \text{ dan } B(x) \rightarrow \infty$$

Maka perkalian limit dari dua persamaan fungsi tersebut adalah:

$$\lim A(x) \cdot B(x) = 0 \cdot \infty$$

Untuk menyelesaikan bentuk perkalian tersebut, kita akan menggunakan bentuk atau aturan L' Hopital dengan

mengubahnya ke bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$

Contoh:

Selesaikan persamaan berikut ini:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tan x \cdot \ln \sin x)$$

Jawab:

$$\tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$\text{Maka: } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\tan x \cdot \ln \sin x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{1}{\cot x} \cdot \ln \sin x \right)$$

Dengan aturan L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{-\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x / \sin x}{-1 / \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\sin x} \left(-\frac{\sin^2}{1} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x (-\sin x) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

3.2. Integral Tak Wajar (Improper) Batas Tak Terhingga

Suatu bentuk fungsi $f(x)$ akan mempunyai nilai yang terhingga pada selang a dan b , dan dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan sebagai berikut:

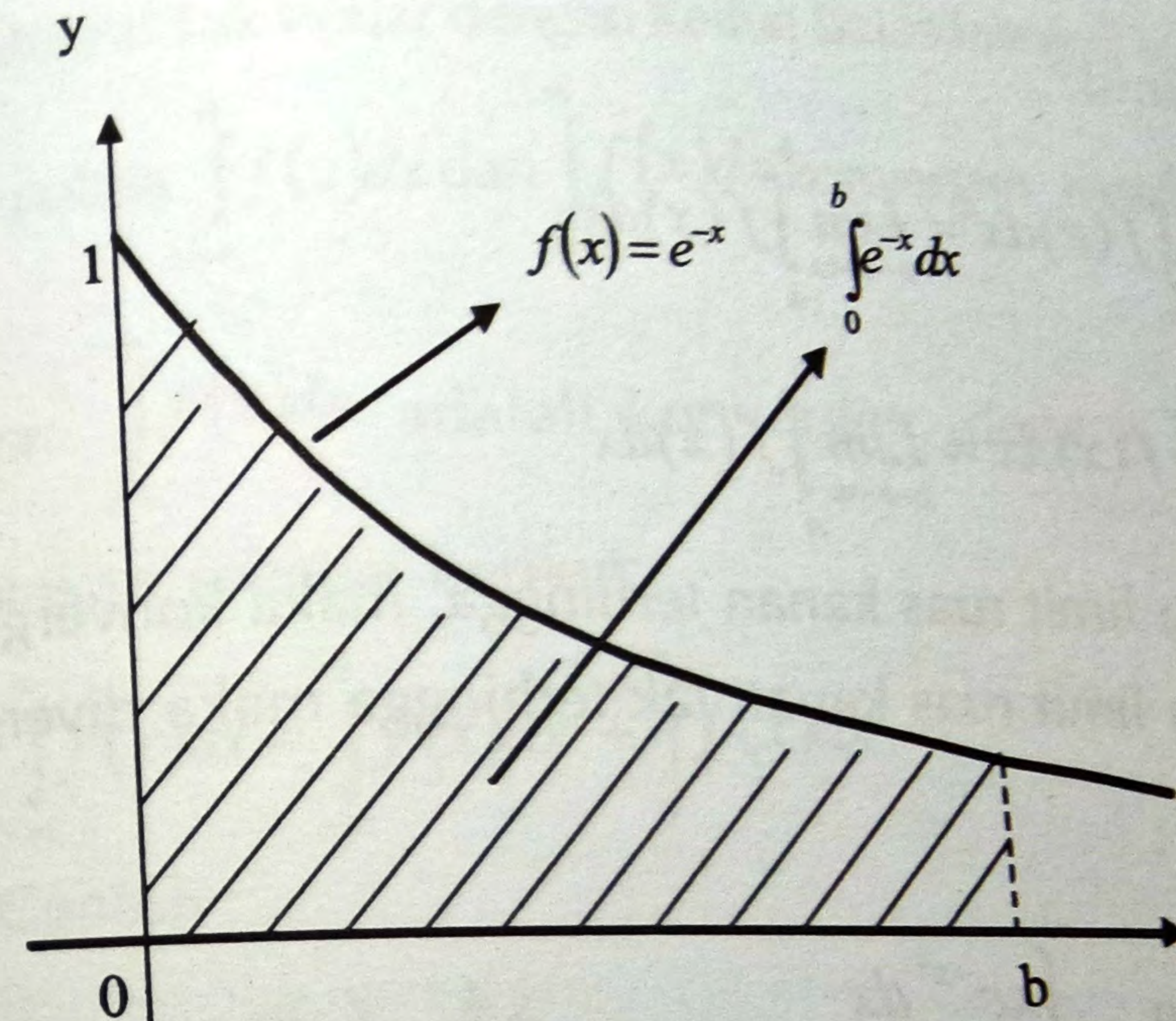
$$\int_a^b f(x) dx = L$$

Akan tetapi banyak bentuk pada penerapan integral dalam ilmu Fisika, Ekonomi, Teori Peluang yang menghendaki batas atau selang a , b menjadi tak terhingga, seperti dalam contoh

persamaan berikut:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

Suatu batas tak terhingga grafik pada selang dapat kita lihat pada grafik berikut ini:



$$\int_0^b e^{-x} dx = - \int_0^b e^{-x} (-dx)$$

Misalkan : $u = -x$

$$du = -1 dx$$

$$\text{Sehingga : } \int_0^b e^{-x} dx = - \int_0^b e^{-x} (-dx)$$

$$= - \int_0^b e^u du = -e^u \Big|_0^b = -e^{-x} \Big|_0^b = e^{-b} - (-e^0) = 1 - e^{-b}$$

Karena $\lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1 - \frac{1}{e^\infty} = 1 - 0 = 1$

Sehingga kita dapat mendefinisikan persamaan sebagai berikut:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

Dedinsi:

$$1. \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$2. \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

- Bila limit ruas kanan terhingga, maka konvergen
- Bila limit ruas kanan tak terhingga maka divergen

Contoh :

Tentukan : $\int_{-\infty}^{-1} x e^{-x^2} dx$

Jawab :

$$\int_{-\infty}^{-1} x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} x e^{-x^2} dx$$

Dimana : $\int_a^{-1} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_a^{-1} e^{-x} (-2x dx)$

Misalkan : $u = -x^2$ maka $du = -2x dx$

Sehingga : $-\frac{1}{2} \int_a^{-1} e^{-x} (-2x dx) = -\frac{1}{2} \int_a^{-1} e^u du$

$$= -\frac{1}{2} e^u \Big|_a^{-1} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{-1} = -\frac{1}{2} e^{-1} - \left(-\frac{1}{2} e^{-a^2} \right) = -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-a^2}$$

Maka : $\int_{-\infty}^{-1} x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-a^2} \right] = -\frac{1}{2e}$

3.3. Integral Tak Wajar dengan Kedua Batas Integral tak Terhingga

Apabila $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ dan $\int_0^\infty f(x) dx$ konvergen, maka dikatakan

bahwa : $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ adalah konvergen, dengan persamaan

dinyatakan sebagai berikut:

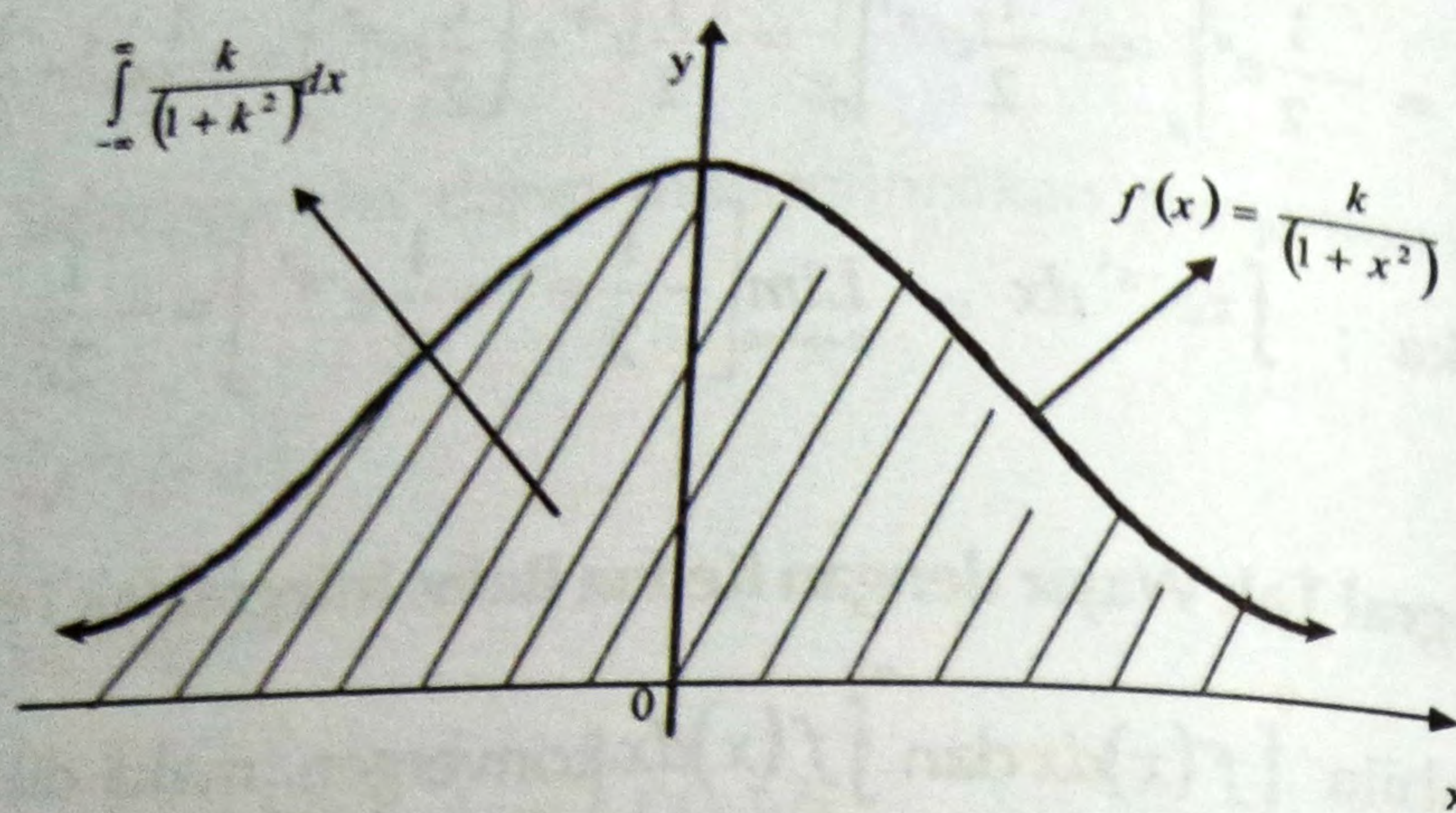
$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx$$

Contoh :

Fungsi $f(x) = \frac{k}{(1+k^2)}$ kita jumpai dalam teori peluang.

Fungsi ini disebut dengan kepadatan Cauchy. Konstanta k dipilih sedemikian rupa sehingga luas dibawah kurva f pada selang $(-\infty, \infty)$ adalah 1, maka tentukan k.

Jawab :



Menurut ketentuan luas dibawah kurva diketahui bahwa:

$$\int_0^{\infty} \frac{k}{(1+k^2)} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^b \frac{k}{(1+k^2)} dx$$

Dan dari table No. 17¹ diketahui : $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$

$$\text{Maka: } \lim_{b \rightarrow \infty} [k \tan^{-1} x]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} k \tan^{-1} b = k \frac{\pi}{2}$$

Dan dari bentuk simetri untuk $\int_{-\infty}^0 \frac{k}{(1+k^2)} dx = k \frac{\pi}{2}$ (simetri dengan

batas $(0, \infty)$)

$$\text{Jadi } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{(1+k^2)} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{k}{(1+k^2)} dx + \int_0^{\infty} \frac{k}{(1+k^2)} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{(1+k^2)} dx = k \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2} = k\pi$$

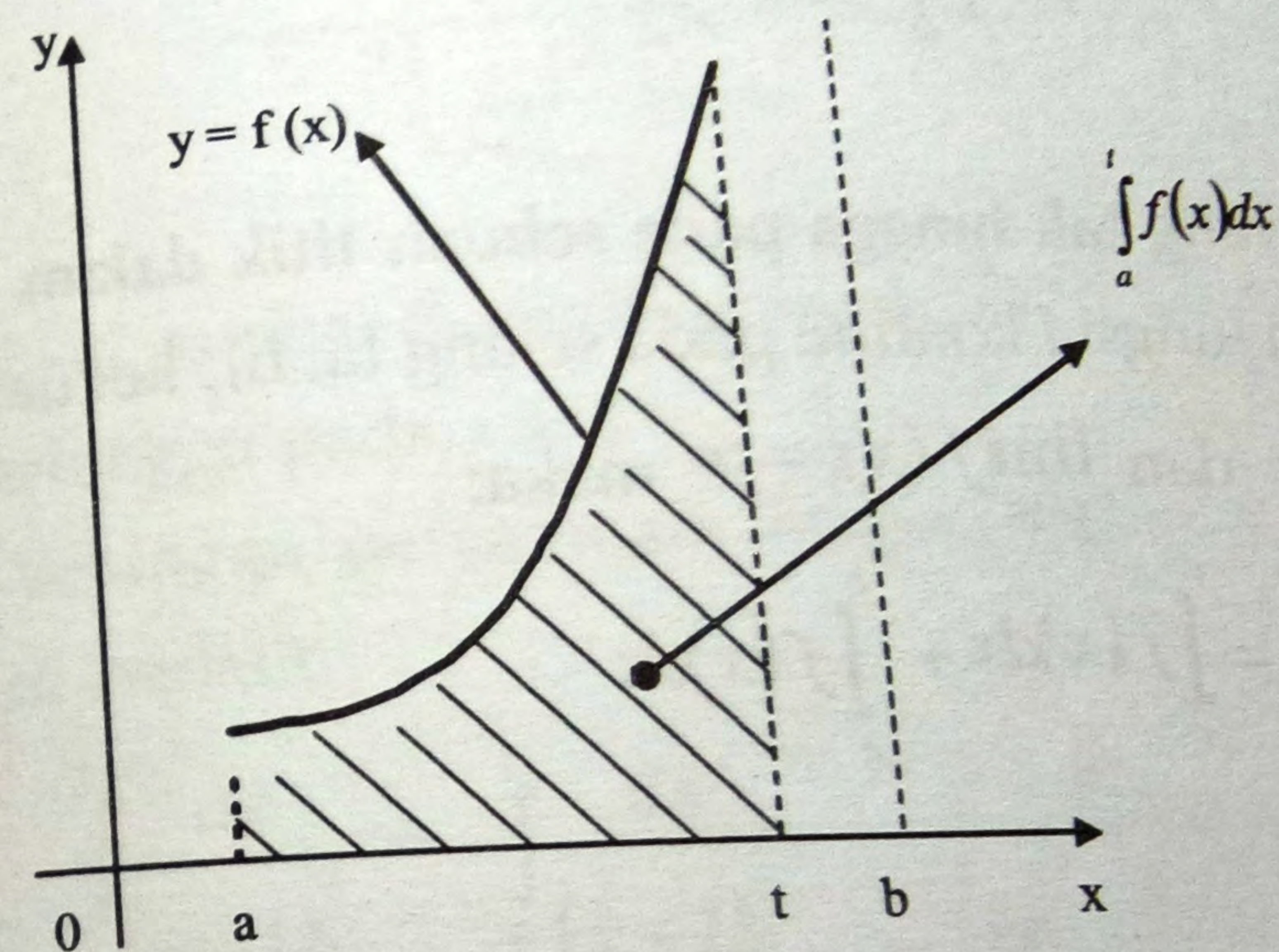
¹ Purcel, *Kalkulus dan Geometri Analisis Jilid 1*, Erlangga, Jakarta, h.592

3.4. Integral tak Terhingga pada titik ujung selang

Jika f kontinu pada selang setengah buka $[a, b)$ dan andaikan $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$ maka:²

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x) dx$$

Atau seperti pada ilustrasi gambar berikut ini :



Contoh : Hitunglah integral tak wajar berikut ini:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \text{ dalam selang } [0, 2)$$

Jawab : Integral menuju tak terhingga apabila x menuju 2

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{t \rightarrow 2} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

² Ibid, h. 490.

Dari table no.16³: diperoleh persamaan:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga : } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \right]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\sin^{-1} \left(\frac{t}{2} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{0}{2} \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

3.5. Integral yang tak hingga pada sebuah titik dalam

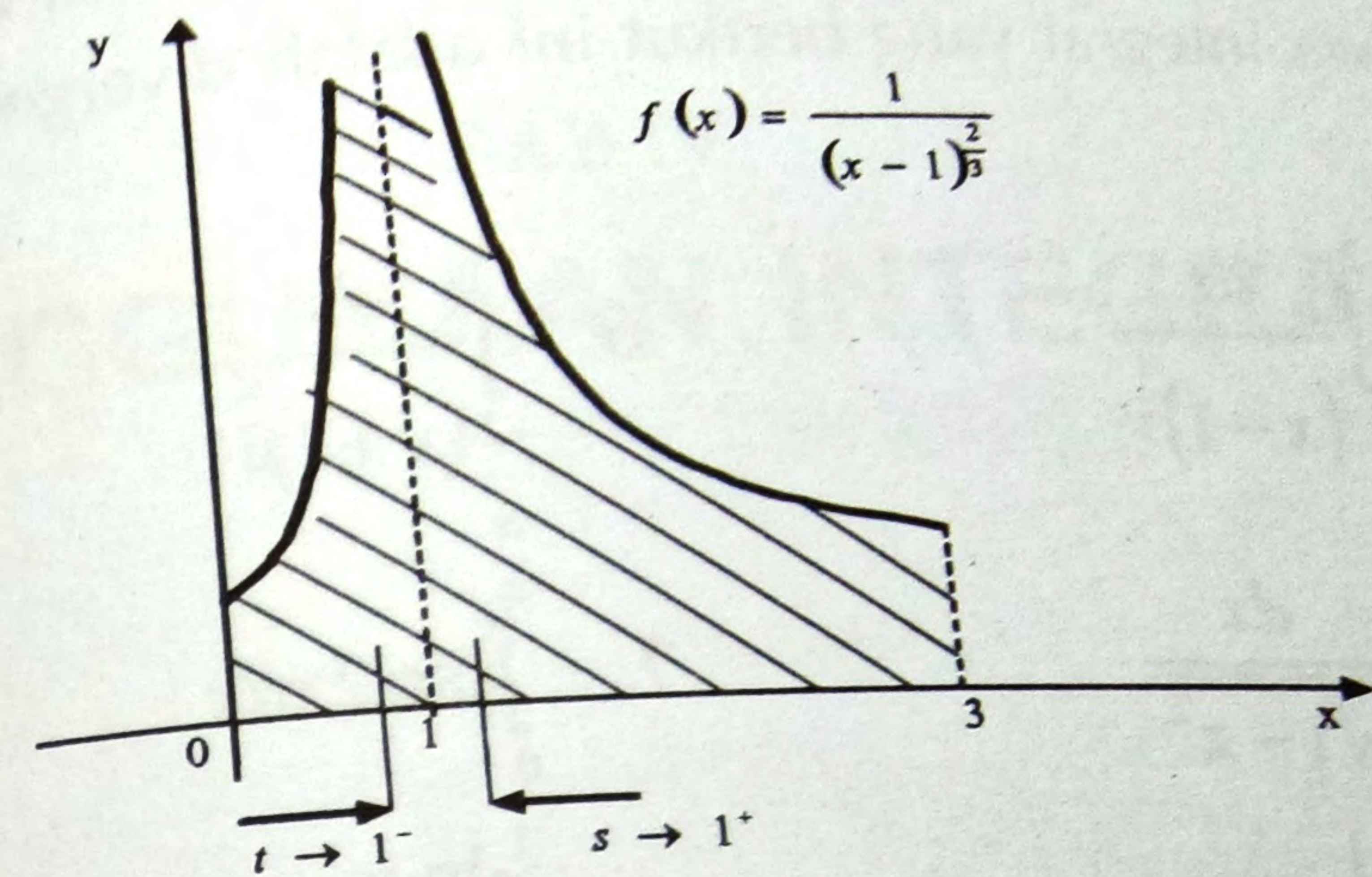
Andaikan fungsi f kontinu pada selang $[a, b]$, kecuali di c dimana: $a < b < c$ dan $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = \infty$ maka:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Contoh :

$$\text{Hitung Integral : } \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

Jawab:



Dari gambar diatas di simpulkan bahwa integral menuju tak terhingga pada $x = 1$

Sehingga persamaan integral dapat di perhitungkan seperti berikut:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[3(x-1)^{\frac{1}{3}} \right]_0^t + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left[3(x-1)^{\frac{1}{3}} \right]_s^3 \\ &= 3 \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[(t-1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right] + 3 \lim_{s \rightarrow 1^+} \left[2^{\frac{1}{3}} - (s-1)^{\frac{1}{3}} \right] \\ &= 3 + 3(2^{\frac{1}{3}}) \approx 6,78 \end{aligned}$$

3.6. Soal – Soal

Hitunglah integral tak wajar berikut ini atau buktikan bahwa integral yang berikut ini adalah divergen.

1. $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$

2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\int_{-3}^2 \frac{1}{x^4} dx$

4. $\int_2^4 \frac{dx}{(3-x)^{\frac{2}{3}}}$

5. $\int_{-3}^0 \frac{x}{(x^2-4)^{\frac{2}{3}}} dx$

6. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)^{\frac{4}{3}}}$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan 2x dx$

8. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$

9. $\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$

10. $\int_0^3 \frac{x}{9-x^2} dx$

BAB IV

PENGUNAAN INTEGRAL

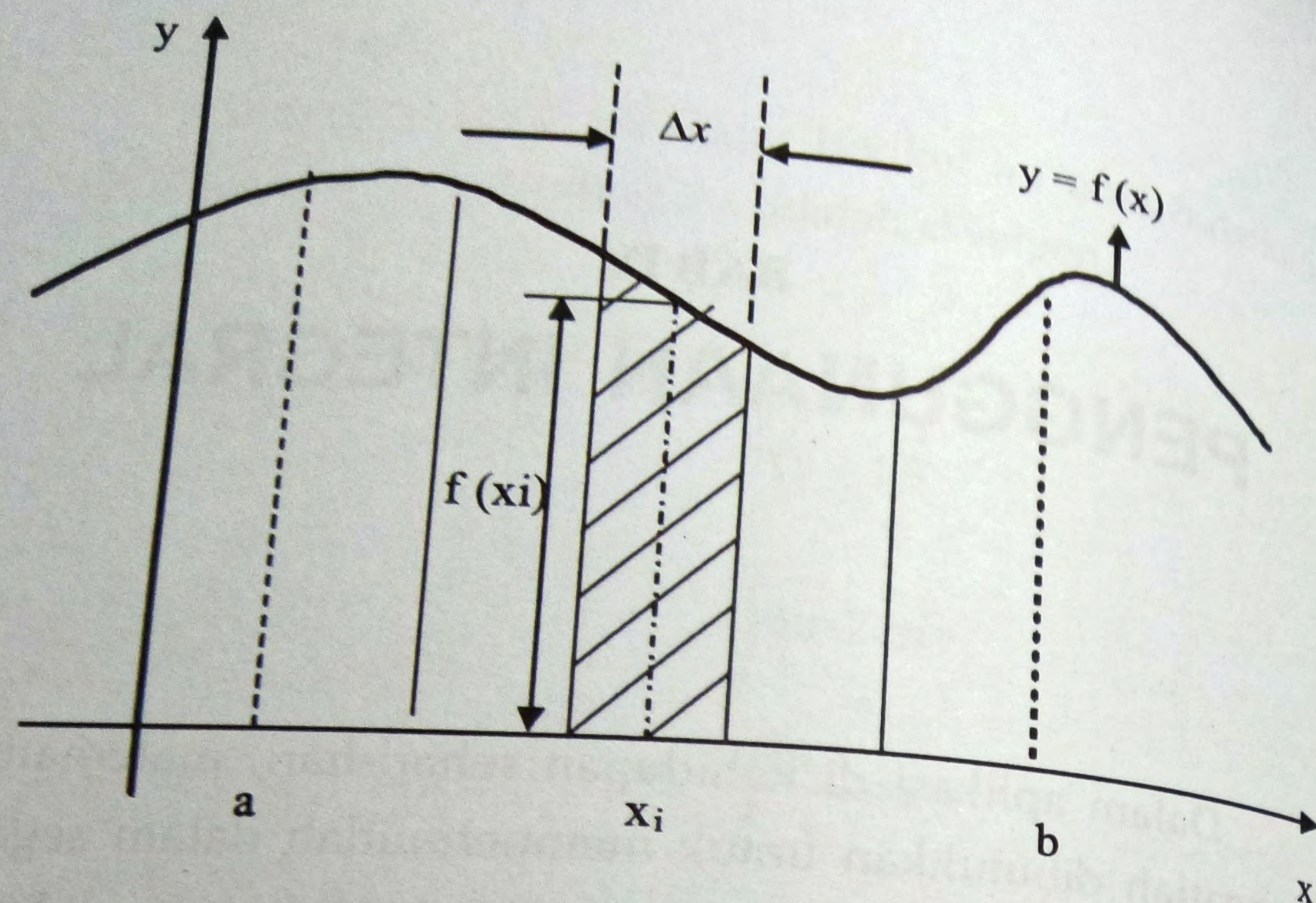
Dalam aplikasi di kehidupan sehari-hari, matematika sangatlah dibutuhkan untuk mempermudah dalam segala bidang kehidupan. Hal ini karena seseorang tidak pernah lepas dari ilmu hitung.

Differensial integral merupakan salah satu bagian dari kalkulus yang sangat banyak fungsinya, misalkan dalam geometri, integral tentu banyak fungsinya diantaranya untuk menghitung luas suatu daerah, volume benda, panjang busur sangat banyak prioritas untuk melakukan. Demikian pula fisika digunakan integral untuk menetapkan pusat masa, kerja, dan volume zat cair.

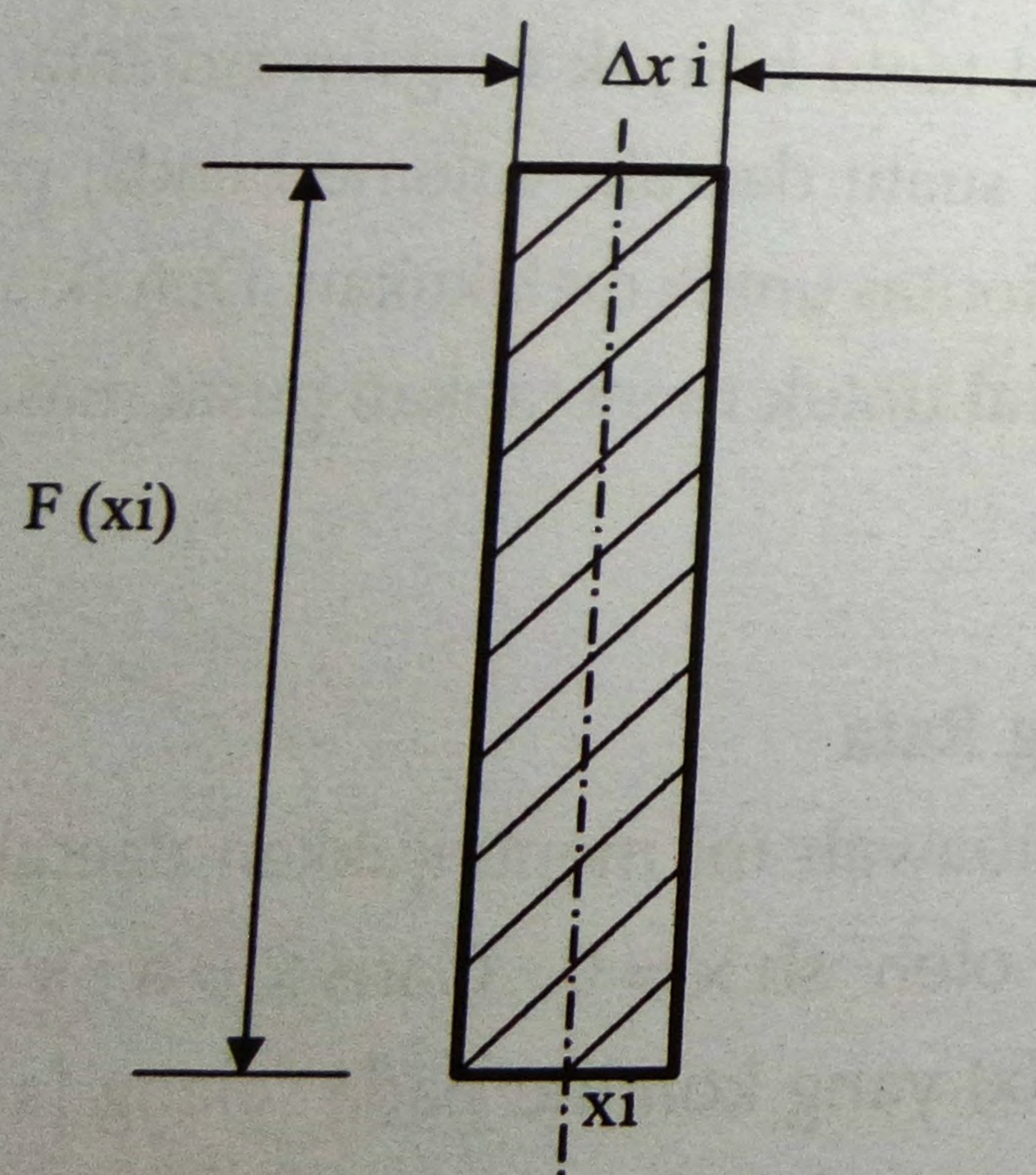
4.1. Luas Bidang Rata

Gambar dibawah ini menunjukkan daerah luas bidang D yang dibatasi oleh sb $x = 0$. Garis $x = a$; $x = b$ dan kurva itu. Yaitu $y = f(x)$ yang kontinu pada selang $[a, b]$ sehingga:

$$Dx = \{(x, y) : a < x < b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$



Dalam kasus diatas, kita akan dekati dengan rumus pendekatan luas poligon (luas persegi panjang) yaitu dengan jalan meninjau luas satu segmen seperti dalam gambar beriku itu :



Dimana luas daerah pada segmen ini adalah
 $A_i = f(x_i) \cdot \Delta x_i$

Nilai hasil rumusan ini akan mendekati luas actual dibawah kurva, dengan membagi luas are tersebut menjadi luas poligon-poligon yang jumlahnya mendekati tak terhingga, sehingga mengakibatkan Δx_i akan mendekati nol dan sehingga luas dibidang D atau luas area dibawah kurva akan bisa dihitung sehingga mendekati luas yang sebenarnya. Luas area dibawah kurva dapat didekati atau didefinisikan sebagai berikut:¹

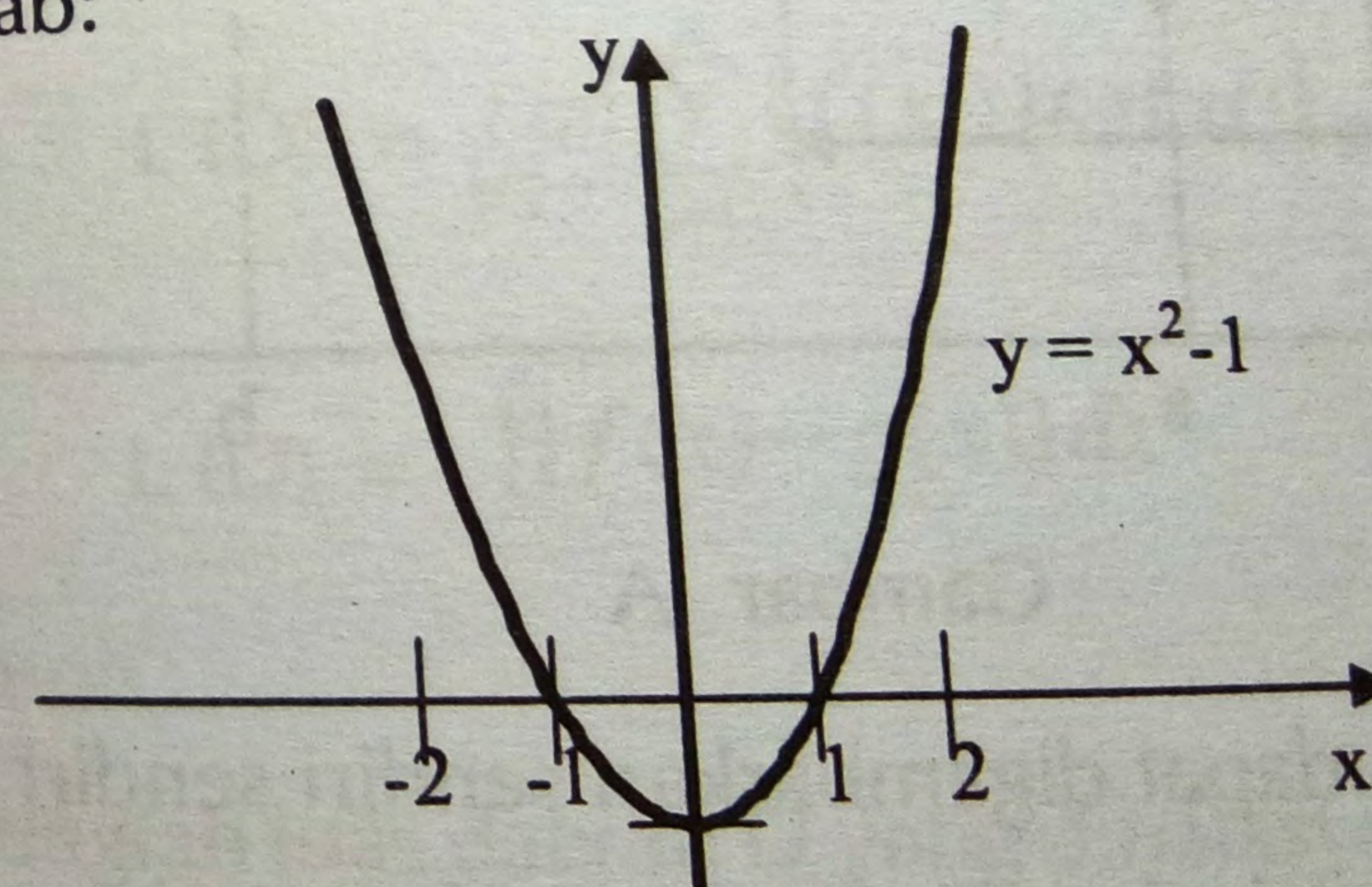
$$LD = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

Contoh :

Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh grafik $y = x^2 - 1$ dan sumbu x antara $x = -1$ dan $x = 1$

Jawab:



¹ E.J. Purcell, *Kalkulus dan Geometri Analaisis*, Terj. Nyoman Susila (Jakarta: Erlangga, 1999), h. 312.

$$A(R) = \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$$

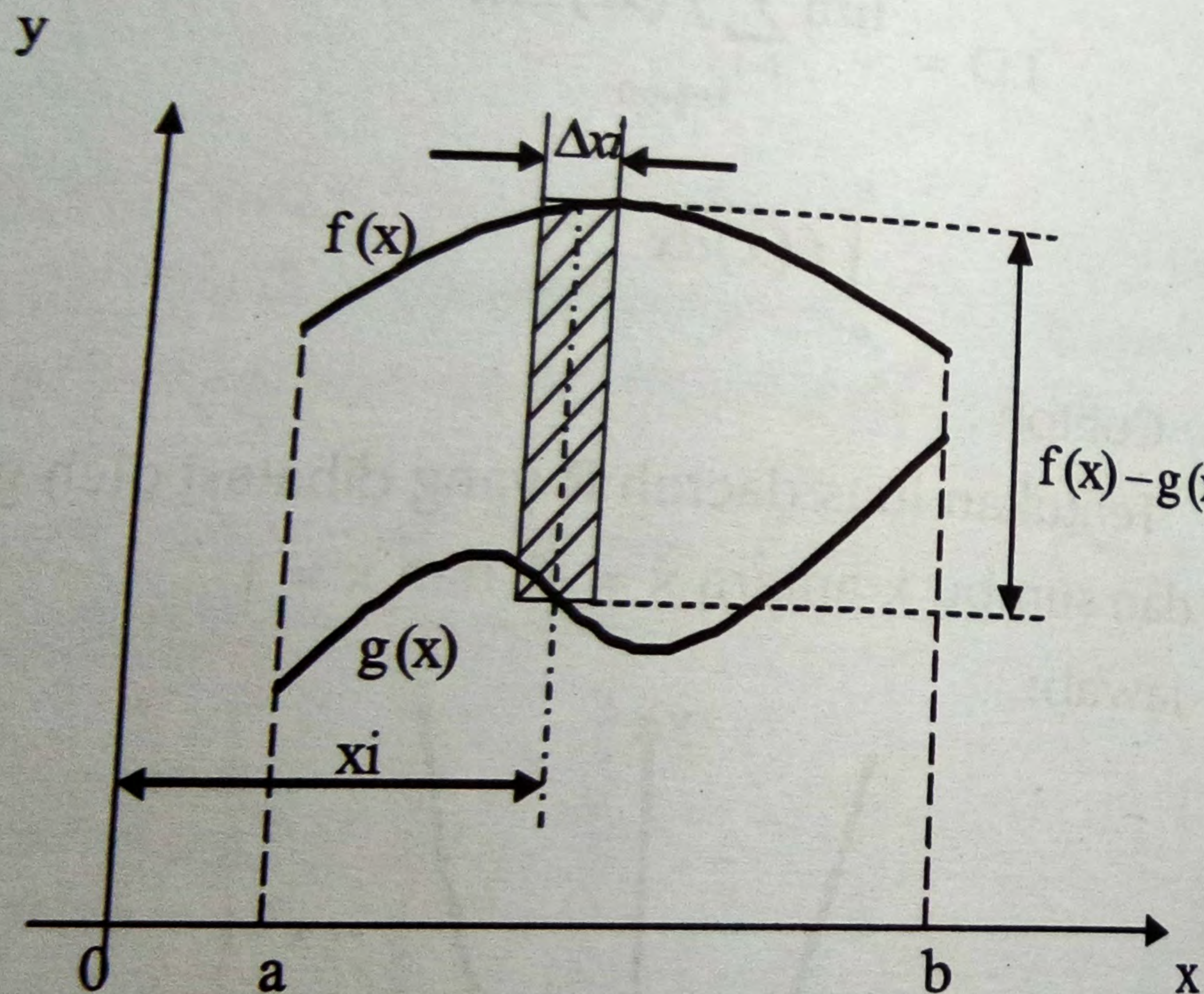
$$= [1/3 x^3 - x]$$

$$= (1/3 - 1) - (-1/3 + 1) = -2/3 - 2/3 = -4/3$$

(tanda - menyatakan bahwa luas berada dibawah kurva)

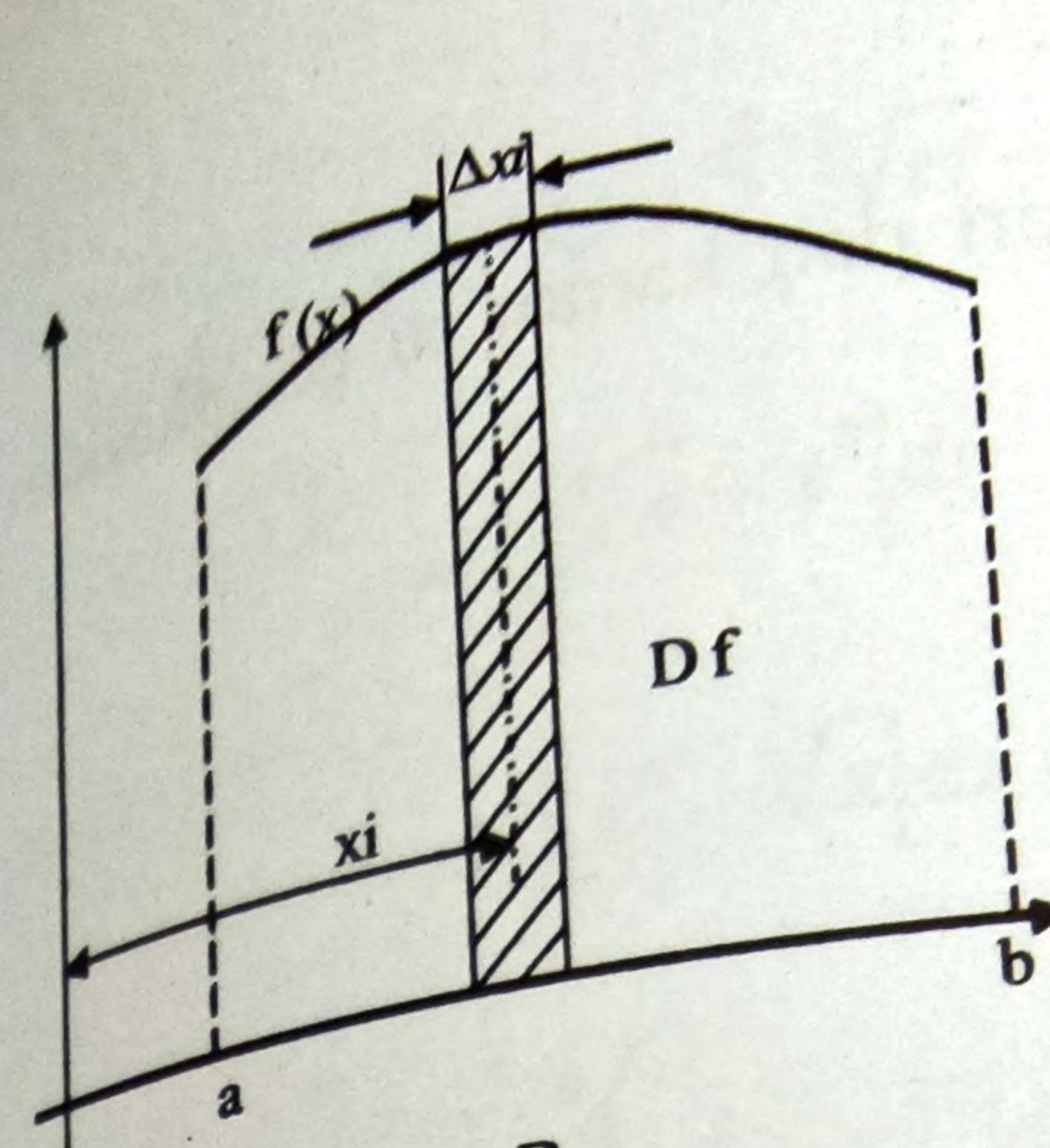
Luas Bidang di Antara Dua Kurva

Pandang suatu daerah D yang dibentuk oleh dua kurva yaitu $f(x)$ dan $g(x)$ dengan $f(x) \geq g(x)$. Pada selang (a, b) seperti pada sketsa gambar berikut ini:

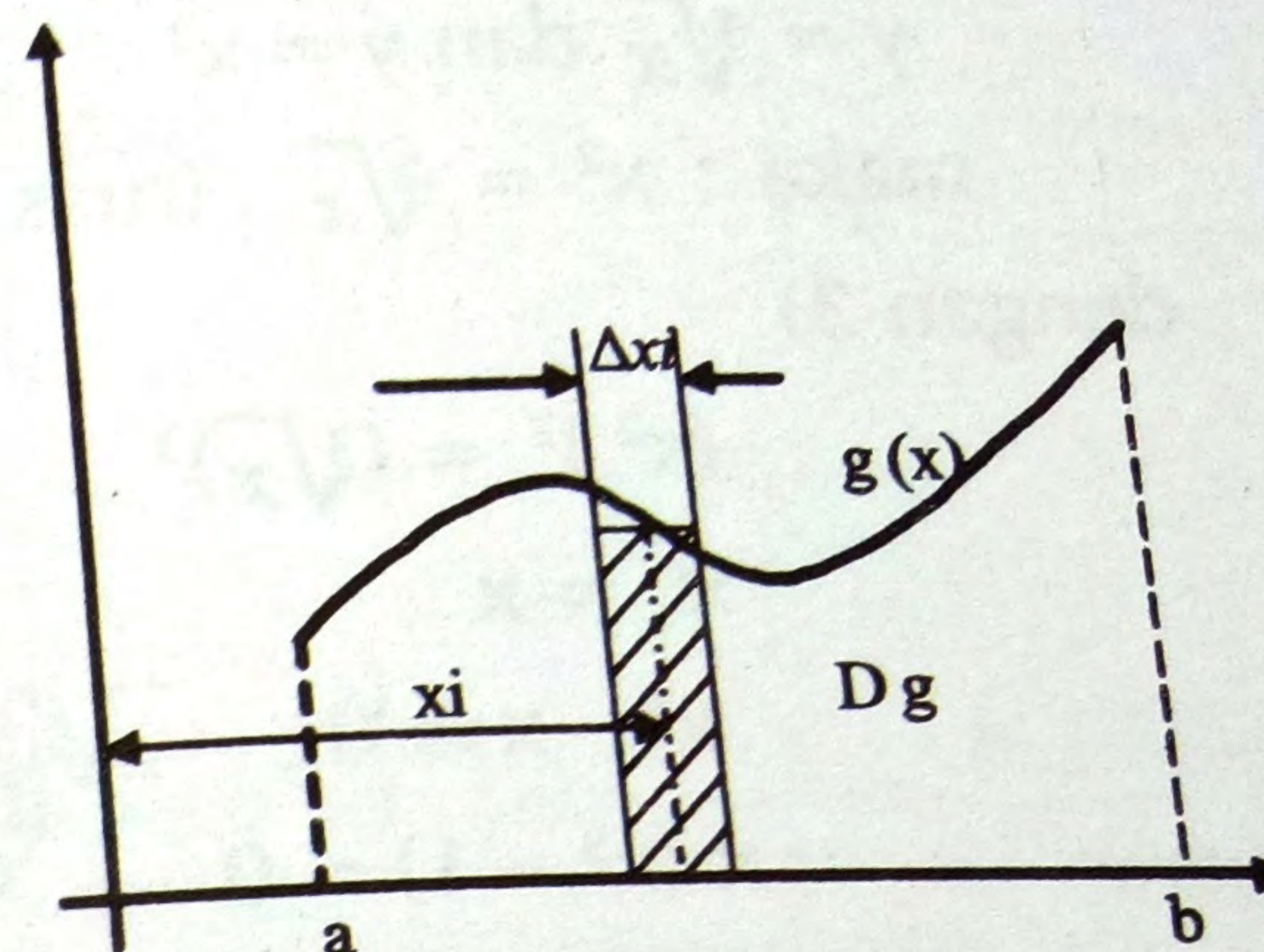


Gambar A

Kurva diatas dapat digambarkan sendiri sendiri menjadi dua kurva yang terpisah guna menunjukkan perhitungan luas area pada masing-masing kurva:



Gambar B



Gambar C

Luas daerah D yang dibentuk seperti gambar A, dapat ditentukan dengan jalan operasi pengurangan dari dua buah kurva yang dibentuk oleh gambar B dan C yaitu:

$$\text{Luas } D = Df - Dg$$

Dari gambar A, luas daerah ditunjukkan dengan:

$$\text{Luas } D = Df - Dg$$

$$= [f(x_i) \cdot \Delta x_i - g(x_i) \cdot \Delta x_i]$$

$$= [f(x_i) - g(x_i)] \cdot \Delta x_i$$

$$\text{atau : } L(D) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \{f(x_i) - g(x_i)\}$$

$$L(D) = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

Contoh :

Hitunglah luas daerah D yang dibatasi oleh grafik $y = \sqrt[3]{x}$, parabola $y = x^2$ dan garis $x = -1$

Jawab : Tentukan titik potong kedua fungsi tersebut yaitu:

$y = \sqrt[3]{x}$ dan $y = x^2$
 maka : $x^2 = \sqrt[3]{x}$ (ruas kiri dan kanan di pangkatkan dengan 3)

$$(x^2)^3 = (\sqrt[3]{x})^3$$

$$x^6 = x$$

$$x^6 - x = 0$$

$$x(x^5 - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x^5 - 1 = 0$$

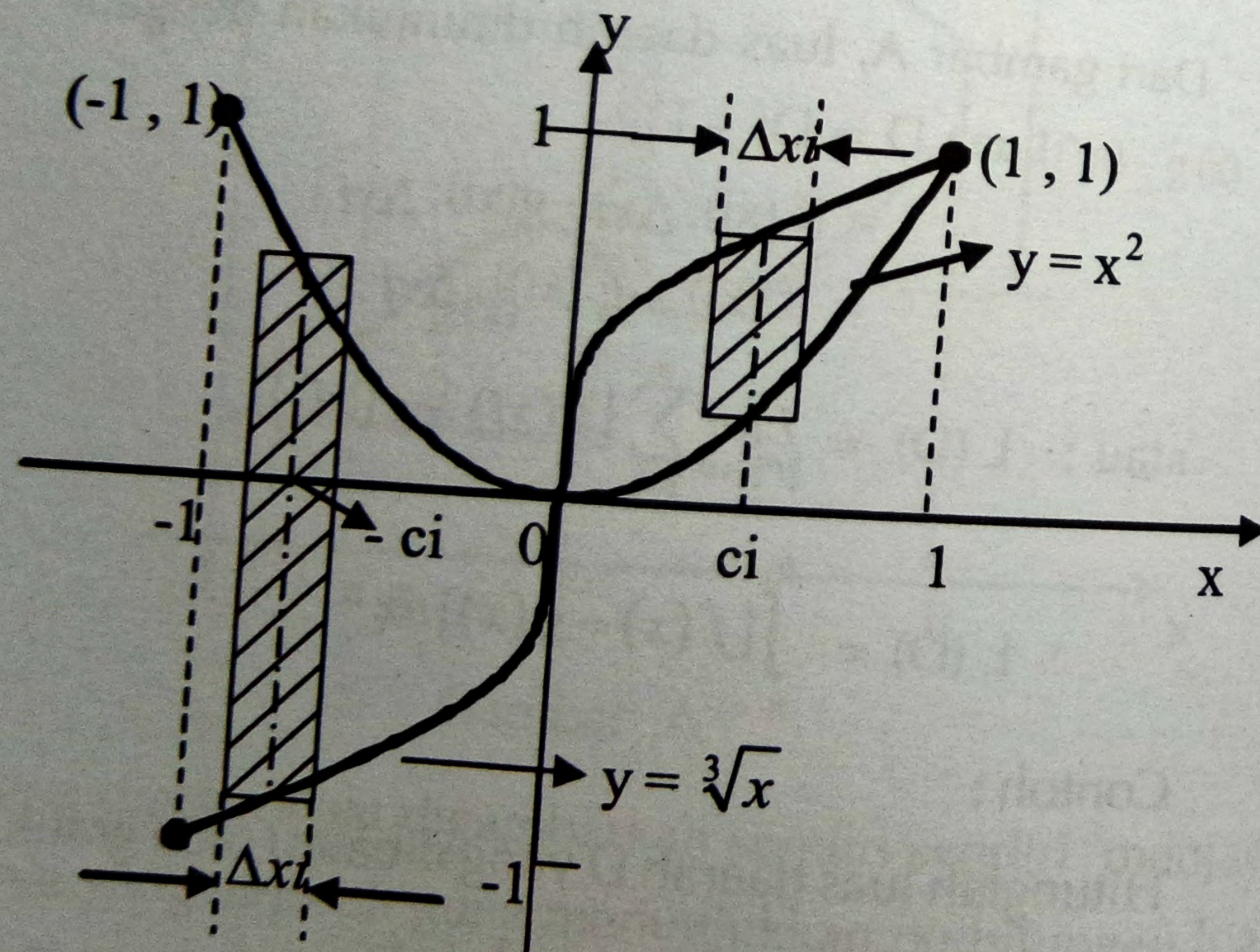
$$x = 1$$

Sehingga titik potong kedua kurva tersebut adalah:

$$x = 0 \text{ maka } y = 0^2 = 0 \text{ atau } (0, 0)$$

$$x = 1 \text{ maka } y = 1^2 = 1 \text{ atau } (1, 1)$$

Sketsa kedua grafik tersebut adalah:



$$\text{Sehingga : } L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\sqrt[3]{ci} - ci^2| \Delta xi$$

$$= \int_{-1}^1 |\sqrt[3]{x} - x^2| dx$$

$$= \int_{-1}^0 |x^2 - \sqrt[3]{x}| dx + \int_0^1 |\sqrt[3]{x} - x^2| dx$$

$$= \int_{-1}^0 \left(x^2 - x^{\frac{1}{3}} \right) dx + \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^2 \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1$$

$$= \{0 - [1/3 (-1)^3 - 3/4 (-1)^{4/3}]\} + \{[(3/4 (1)^{4/3} - 1/3 (1)^3)] - 0\}$$

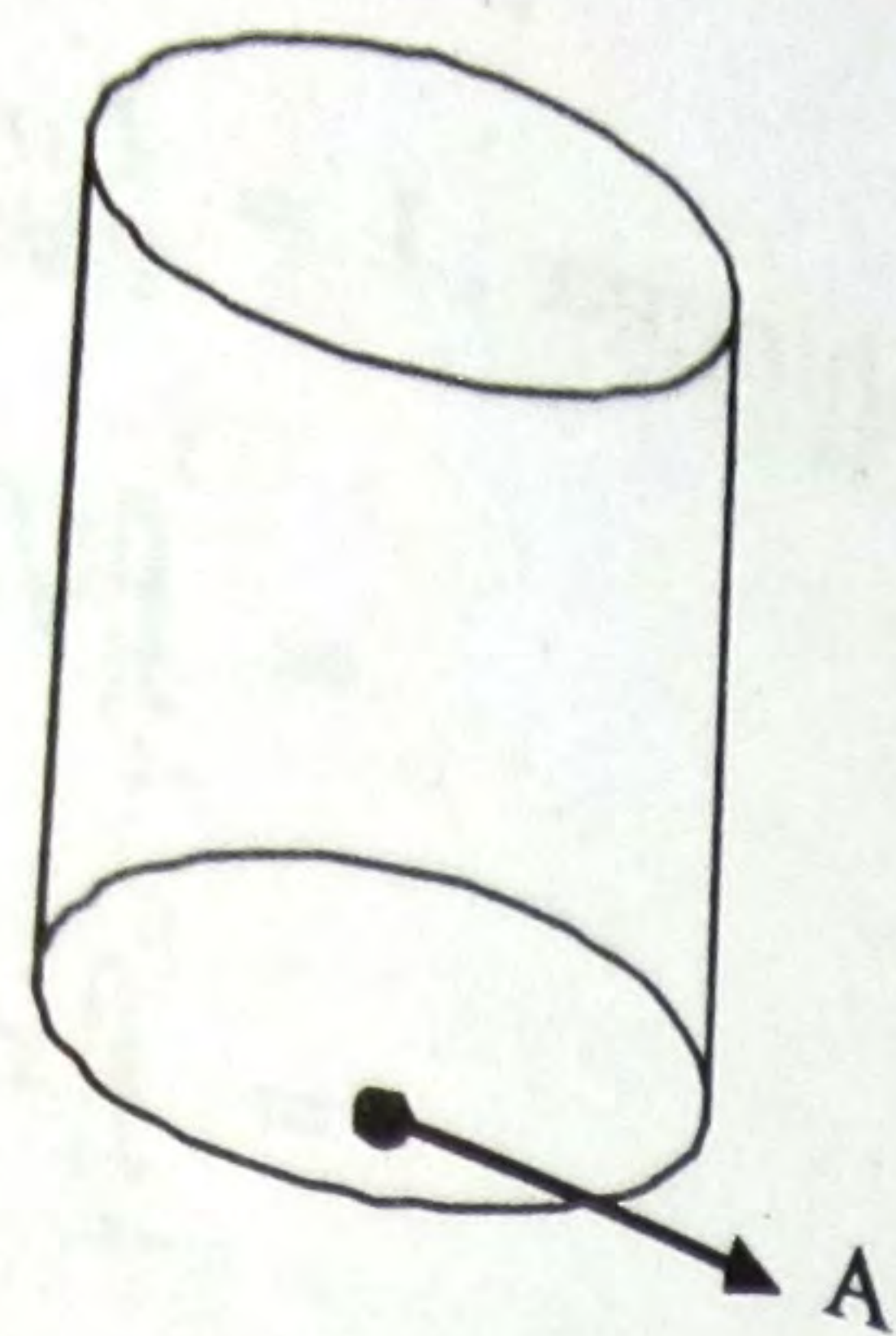
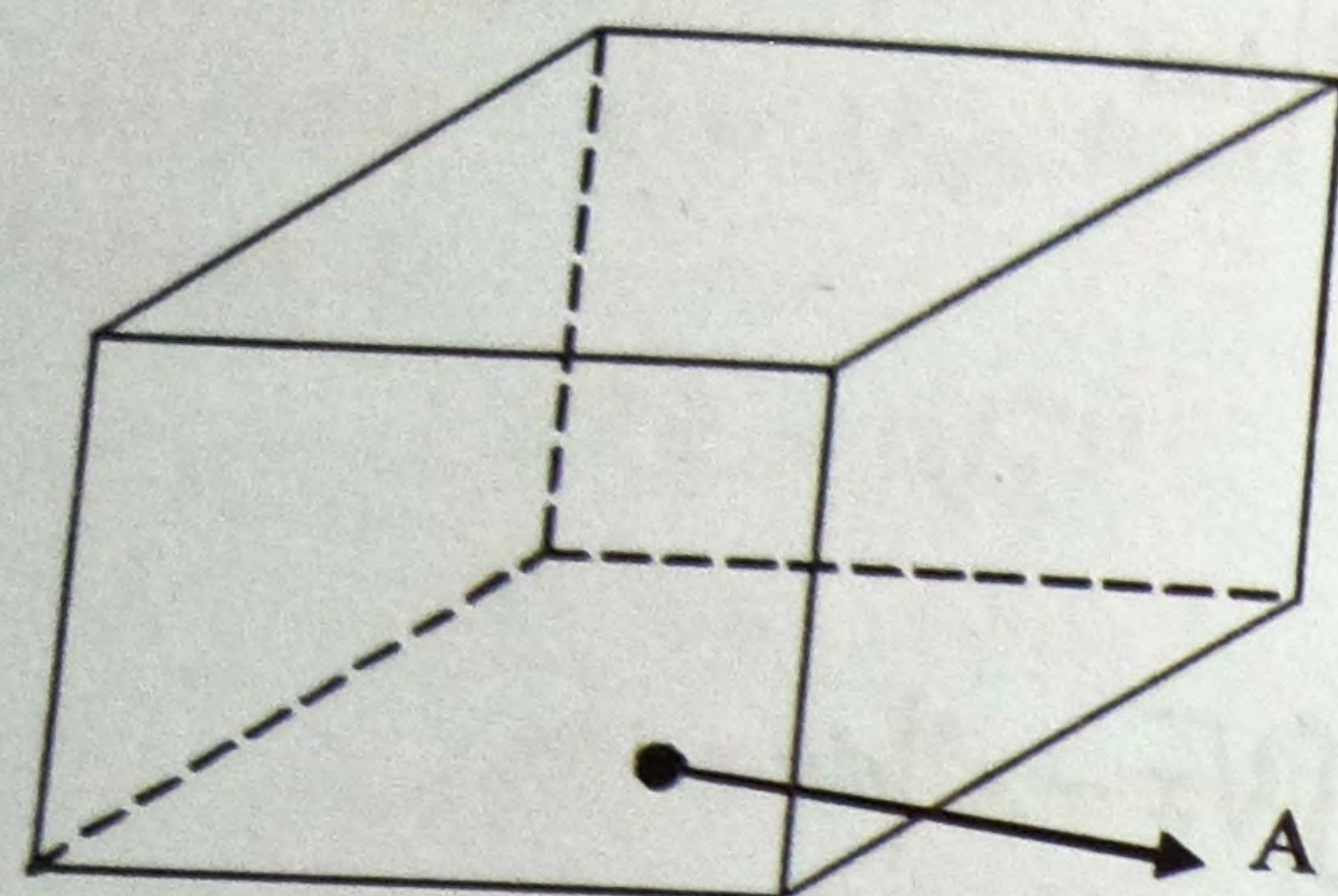
$$= -(-1/3 - 3/4) + (3/4 - 1/3)$$

$$= 4/12 + 9/12 + 9/12 - 4/12$$

$$= 18/12 = 1\frac{1}{2}$$

4.2. Volume Benda Pejal

Volume atau isi dari suatu benda adalah sesuatu yang sudah sering kita ketahui terutama untuk bentuk-bentuk seperti balok, tabung, kerucut, dan lainnya. Rumusan atau konsep dasar volume benda dapat dihitung berdasarkan luas A (luas alas) dan dengan tinggi (h) seperti gambar berikut ini:

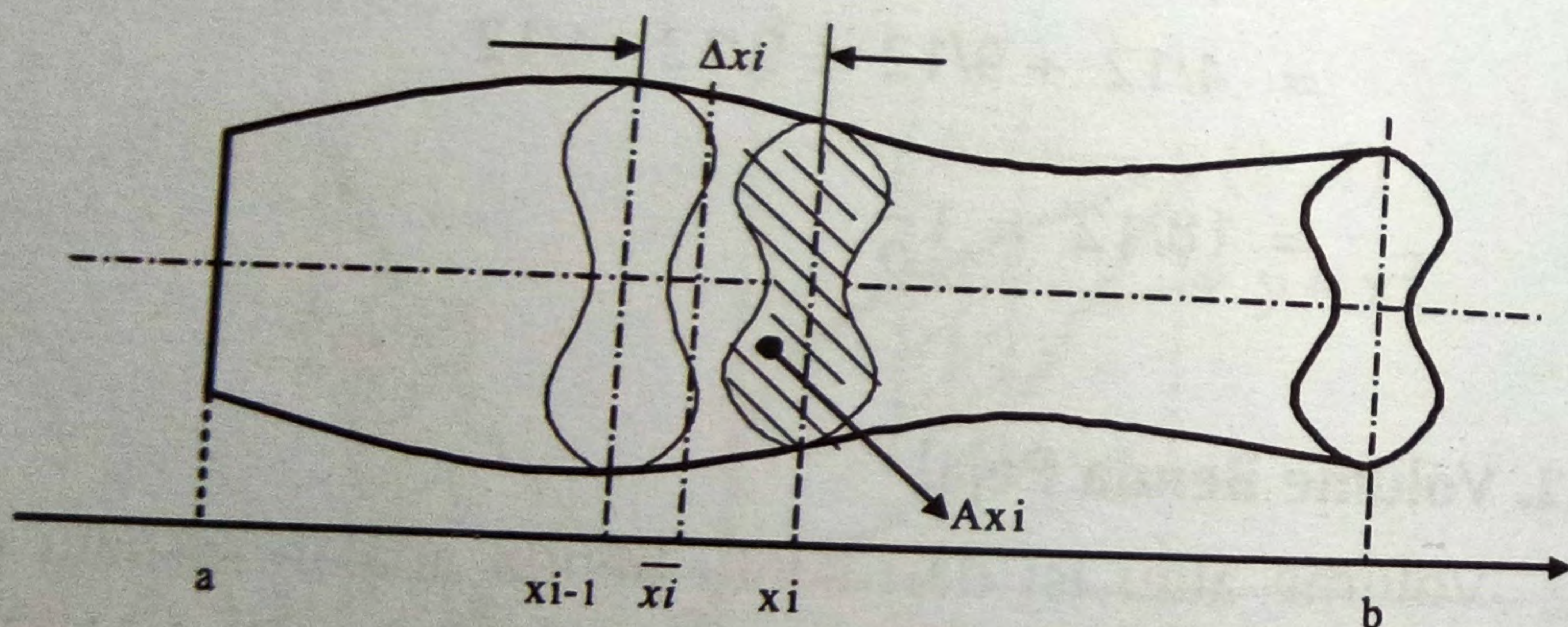


Rumusan perhitungan volume benda menganut konsep:²

$$V = A \cdot t$$

Atau Volume = Luas alas x Tinggi

Konsep dasar ini akan kita gunakan pada perhitungan benda dengan permukaan yang tidak teratur seperti dalam gambar berikut ini:



Untuk penghitungan volume benda seperti tergambar diatas, kita akan ambil satu lempeng kecil dengan ordinat $\bar{x}_i$ yang memiliki tebal Δx_i dengan luas alas A_{x_i} , maka volume lempeng tersebut dapat didekati dengan rumus:

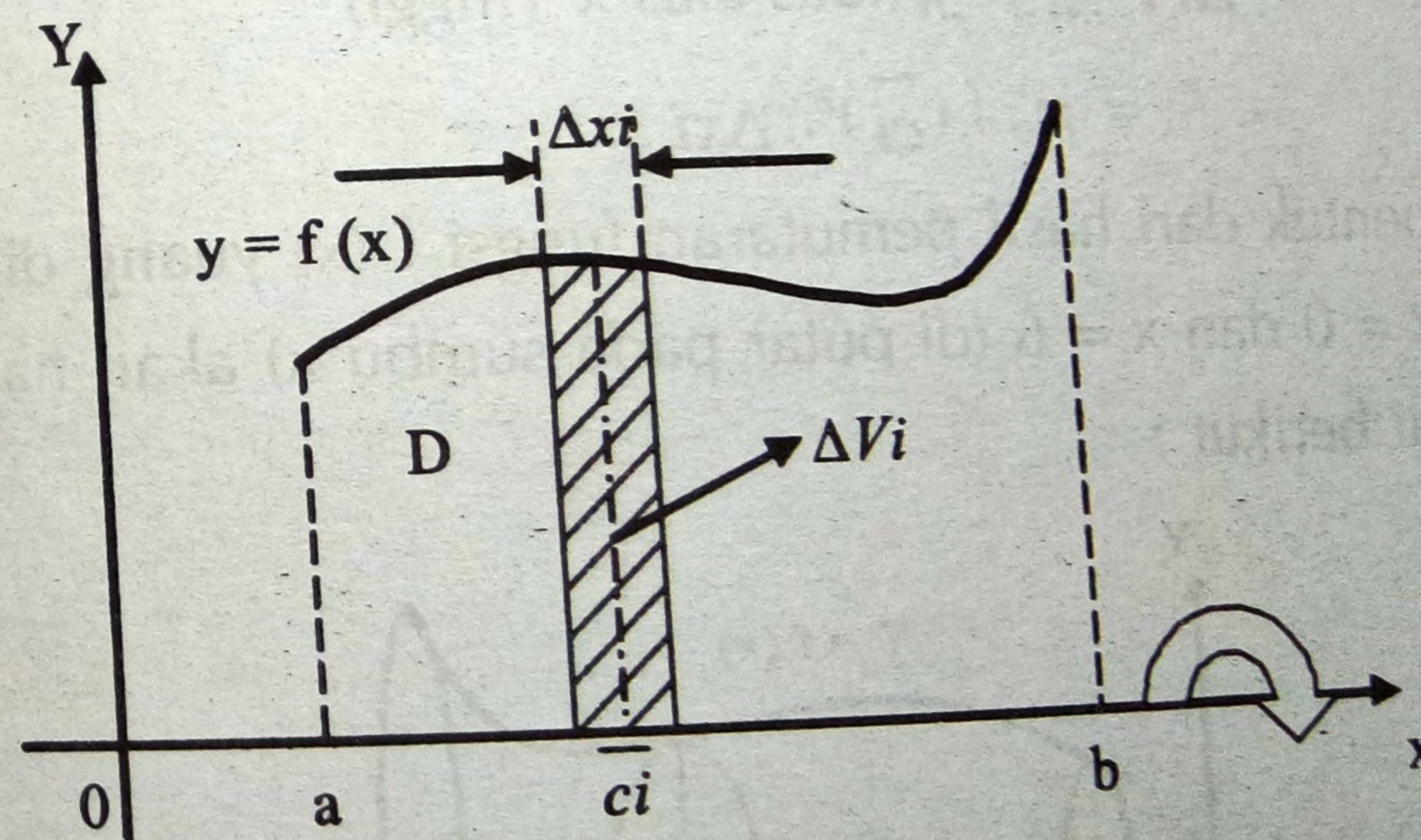
² Ibid., h. 320.

$\Delta V_i \approx A(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i$, dimana : $x_{i-1} \leq \Delta x_i \leq x_i$
Volume benda sesungguhnya akan lebih didekati bila kita bagi benda tersebut menjadi n bagian lempeng dimana $n \approx \infty$ sehingga Δx_i akan mendekati nol, sehingga akan kita peroleh rumusan integral tentu sebagai rumus untuk mencari volume benda dengan permukaan yang tidak teratur:³

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

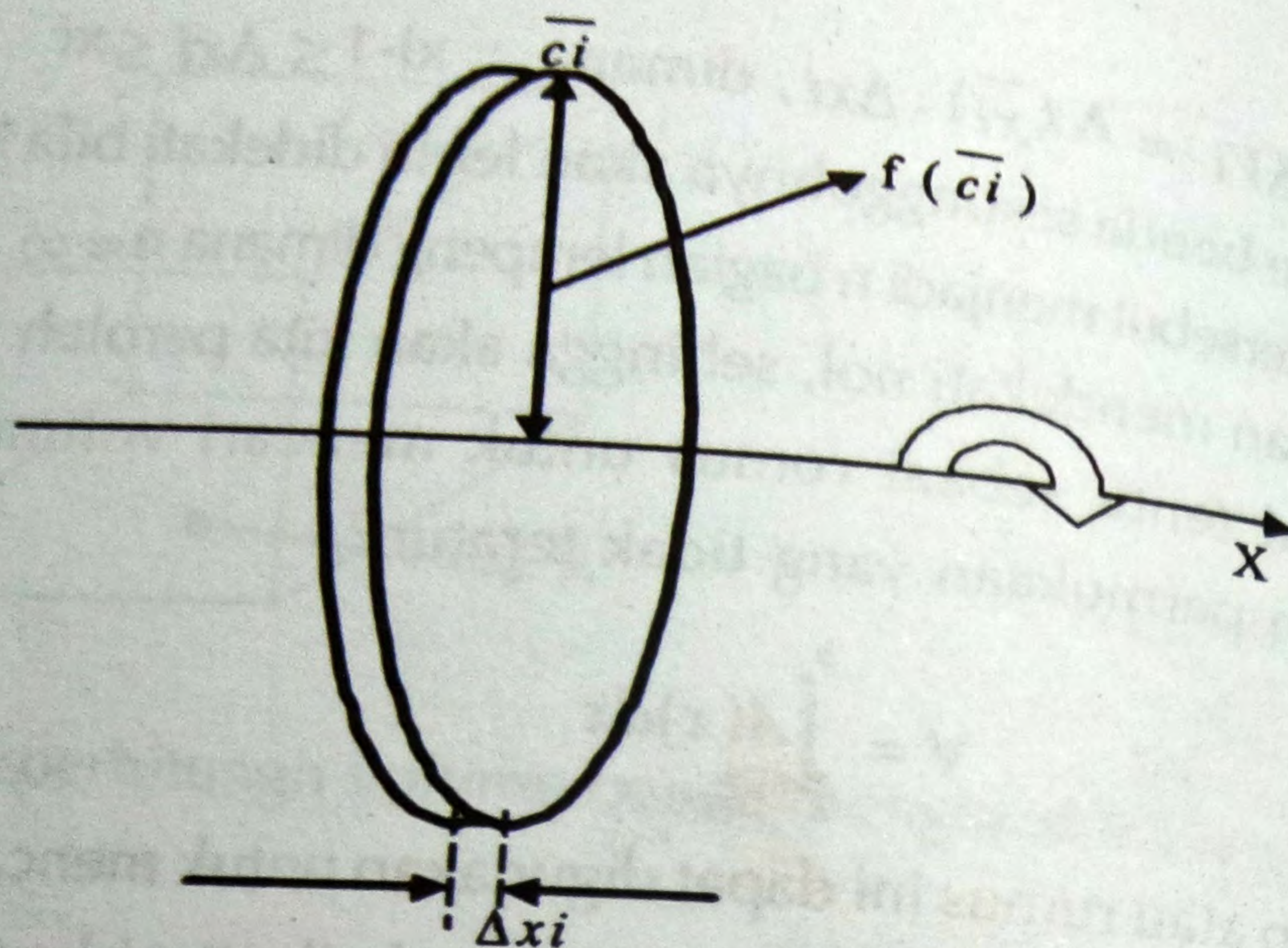
Konsep atau rumus ini dapat digunakan untuk mencari volume benda putar dengan cara seperti pada ilustrasi berikut ini:

"Suatu fungsi $y = f(x)$ yang dibatasi oleh garis $x = a$ dan $x = b$ akan kita putar dengan sumbu x sebagai sumbu putarnya seperti nampak dalam ilustrasi berikut ini:



Elemen lempengan dengan ordinat $\bar{c}_i$ (diputar mengelilingi sumbu x sebagai sumbu putar) akan nampak sebagai berikut:

³ Ibid., h. 321.

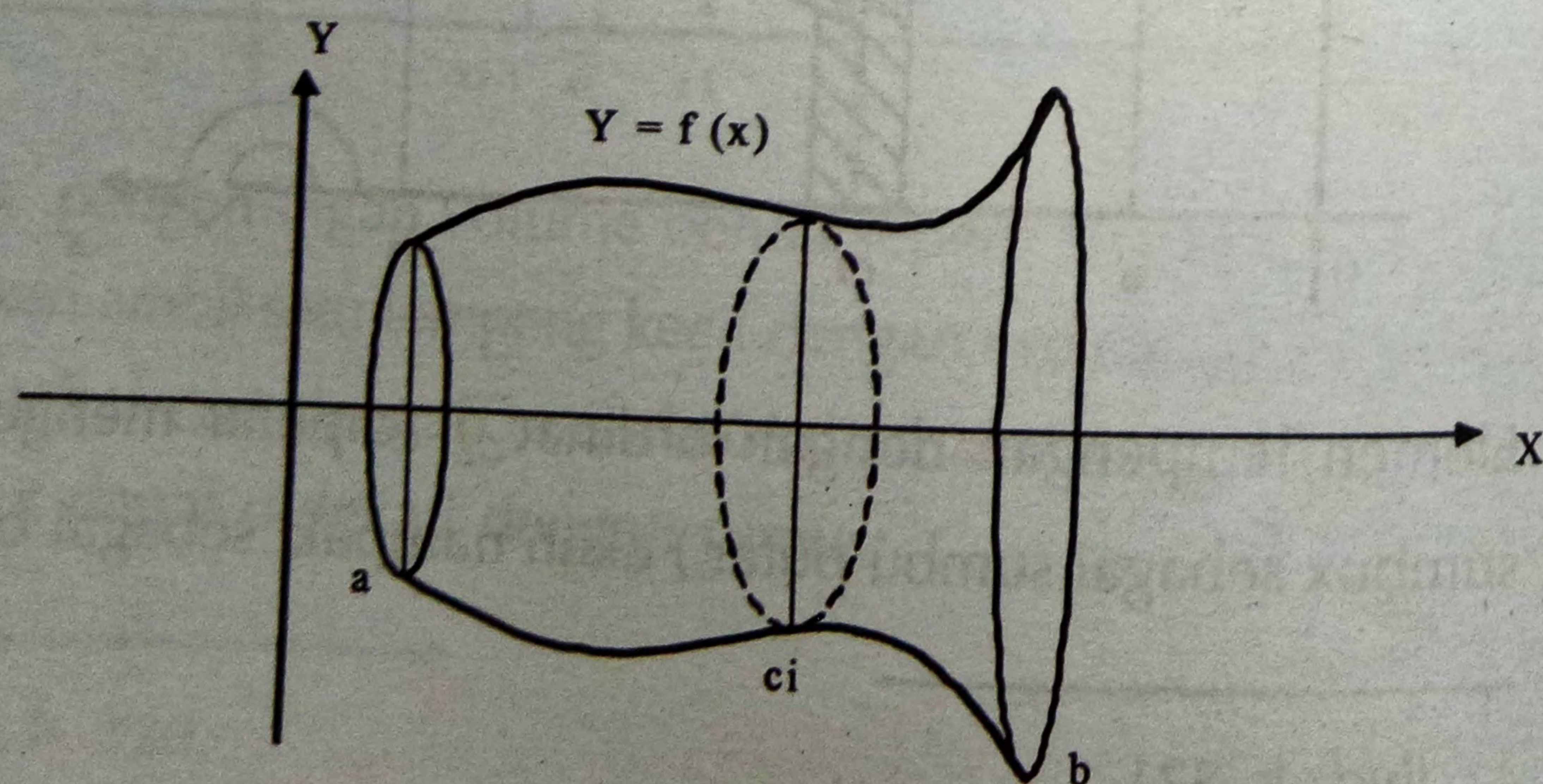


Dan dari sini terlihat bahwa elemen tersebut nampak menjadi suatu cakram lingkaran dengan jari-jari cakram $f(\bar{c}_i)$ dan tebalnya Δx_i sehingga volume elemen cakram tersebut adalah:

$$\Delta V_i = \pi \cdot r^2 \cdot h \text{ (luas alas x Tinggi)}$$

$$= \pi \cdot f(\bar{c}_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

Dan bentuk dari hasil pemutaran fungsi $f(x)$ yang dibatasi oleh $x = 0$ dan $x = 6$ (di putar pada sumbu x) akan nampak sebagai berikut :



Dan volume benda putar ini akan dapat di dekati bila n buah cakram lingkaran yang jumlahnya mendekati tak terhingga, sehingga tebal masing-masing elemen cakram () akan mendekati nol dan volume benda putar tersebut adalah:

$$V \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi f(c_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

Dan bila $n \rightarrow \infty$ maka $\Delta x_i \rightarrow 0$

$$V \approx \sum_{i=1}^n \Delta v_i = \sum_{i=1}^{\infty} \pi f(c_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

$$V \approx \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \pi f(c_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

$$V \approx \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

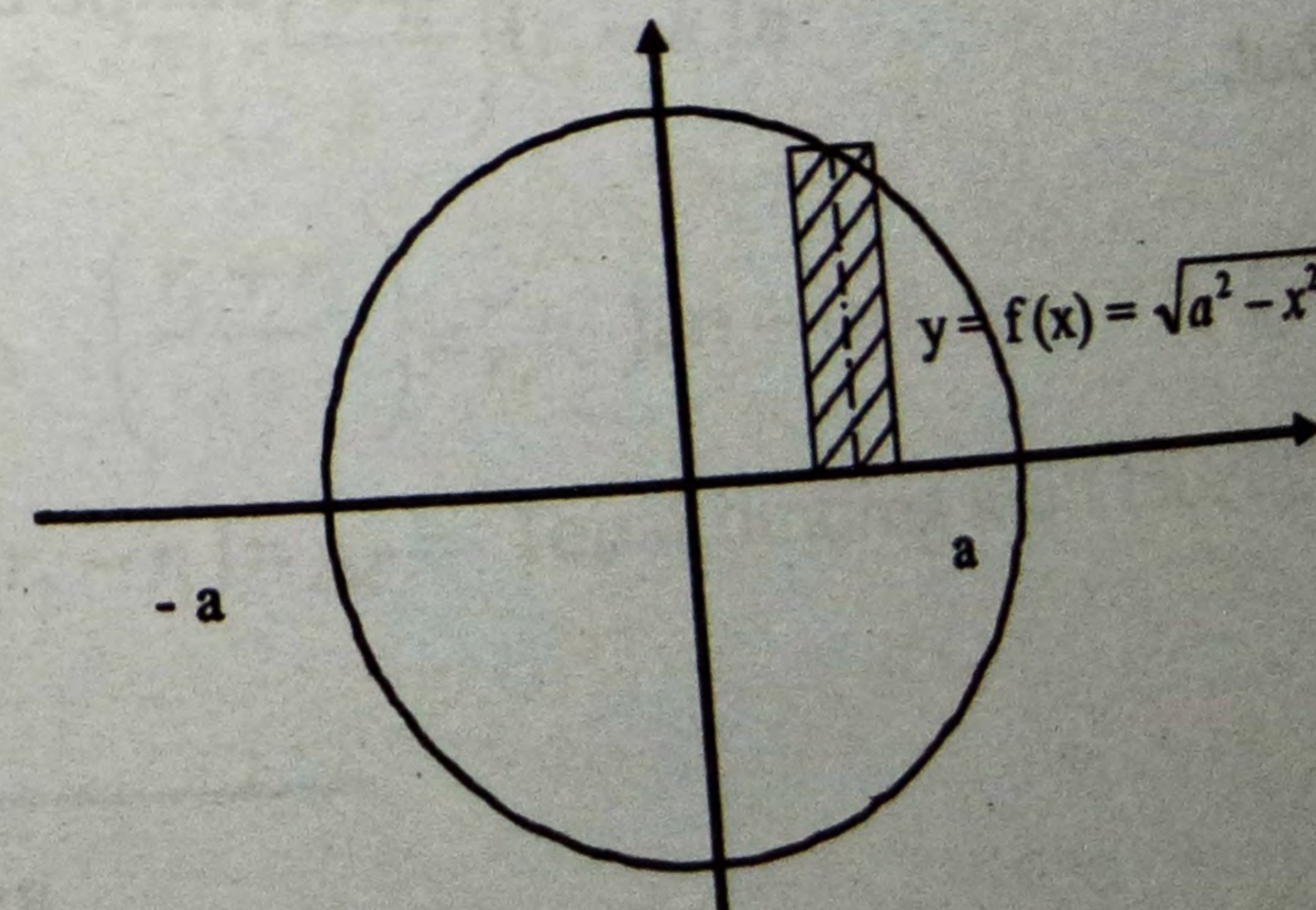
$$V \approx \pi \int_a^b f(x) dx$$

Contoh :

Buktikan bahwa volume bola dengan jari-jari a adalah: $\frac{4}{3} \pi a^3$

πa^3

Jawab:



Sebuah bola adalah hasil dari pemutaran kurva $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ yang diputar terhadap sumbu x sebagai sumbu putar sehingga volume bola dapat kita hitung sebagai berikut:

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \pi(\sqrt{a^2 - x^2}) \cdot \Delta x_i$$

$$V = \pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$$

$$V = \pi \left(a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-a}^a$$

$$V = \pi \{ (a^3 - \frac{1}{3} a^3) - (-a^3 + \frac{1}{3} a^3) \}$$

$$V = \pi \{ (a^3 - \frac{1}{3} a^3 + a^3 - \frac{1}{3} a^3) \}$$

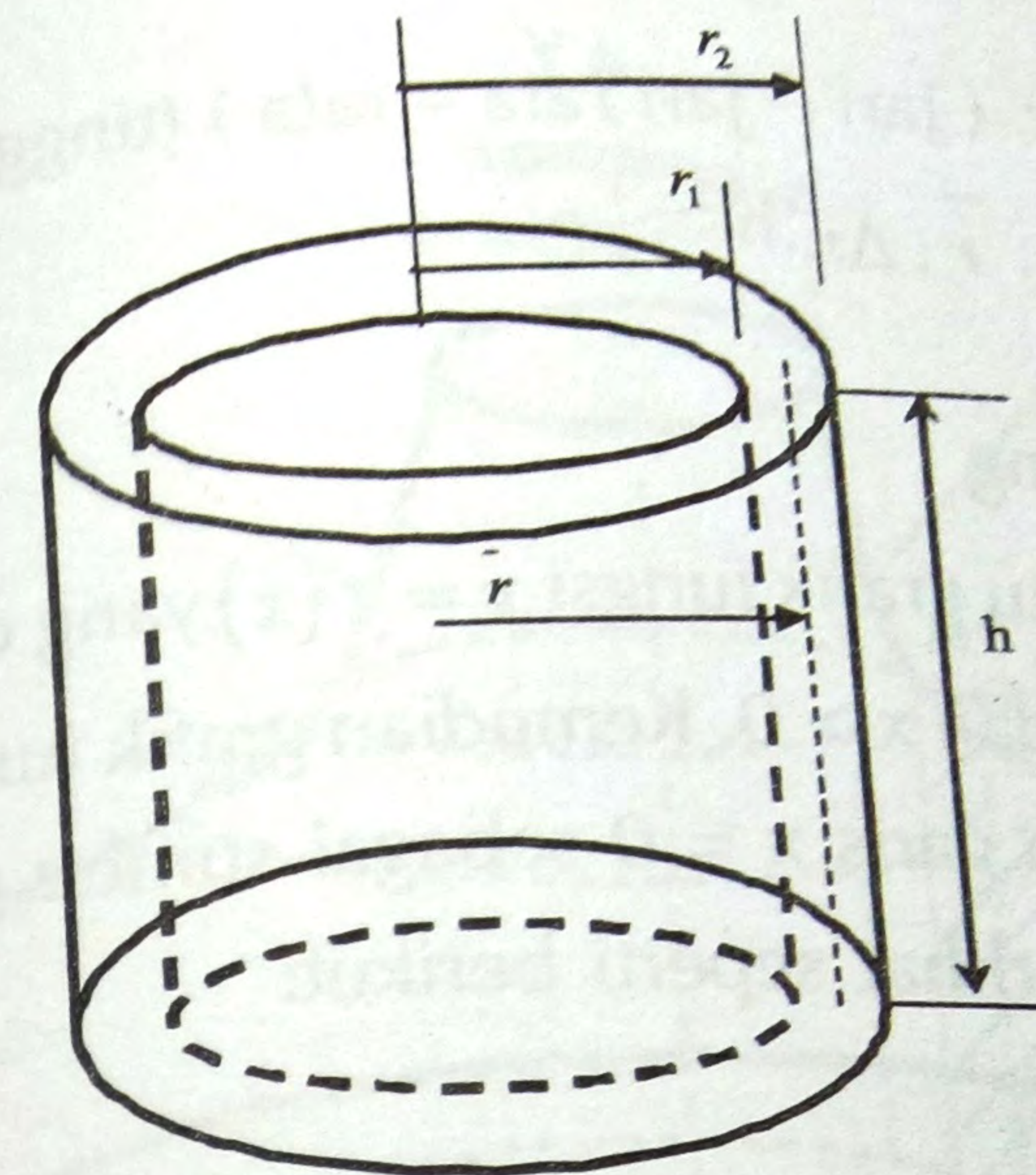
$$V = \pi (2a^3 - \frac{2}{3} a^3)$$

$$V = \pi (\frac{6}{3} a^3 - \frac{2}{3} a^3)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3$$

4.3. Volume Benda Putar.

Perhatikan gambar berikut ini adalah suatu tabung yang memiliki kulit tabung dengan ketebalan kulit tabung t , berikut ini akan kita uraikan berapa volume dari kulit tabung tersebut.



Volume dari kulit tabung tersebut dapat kita hitung dengan konsep volume yang sama dengan volume tabung (benda pejal) seperti yang telah diuraikan sebelumnya. Yang membedakan adalah luas alasnya, yaitu luas alas dari kulit tabung.⁴

Volume = Luas alas x tinggi

$$V = (\pi \cdot r_2^2 - \pi \cdot r_1^2) h$$

$$V = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h$$

$$V = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) (r_2 - r_1) h$$

Dimana : $\left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) = \bar{r}$ = Jari - jari rata - rata

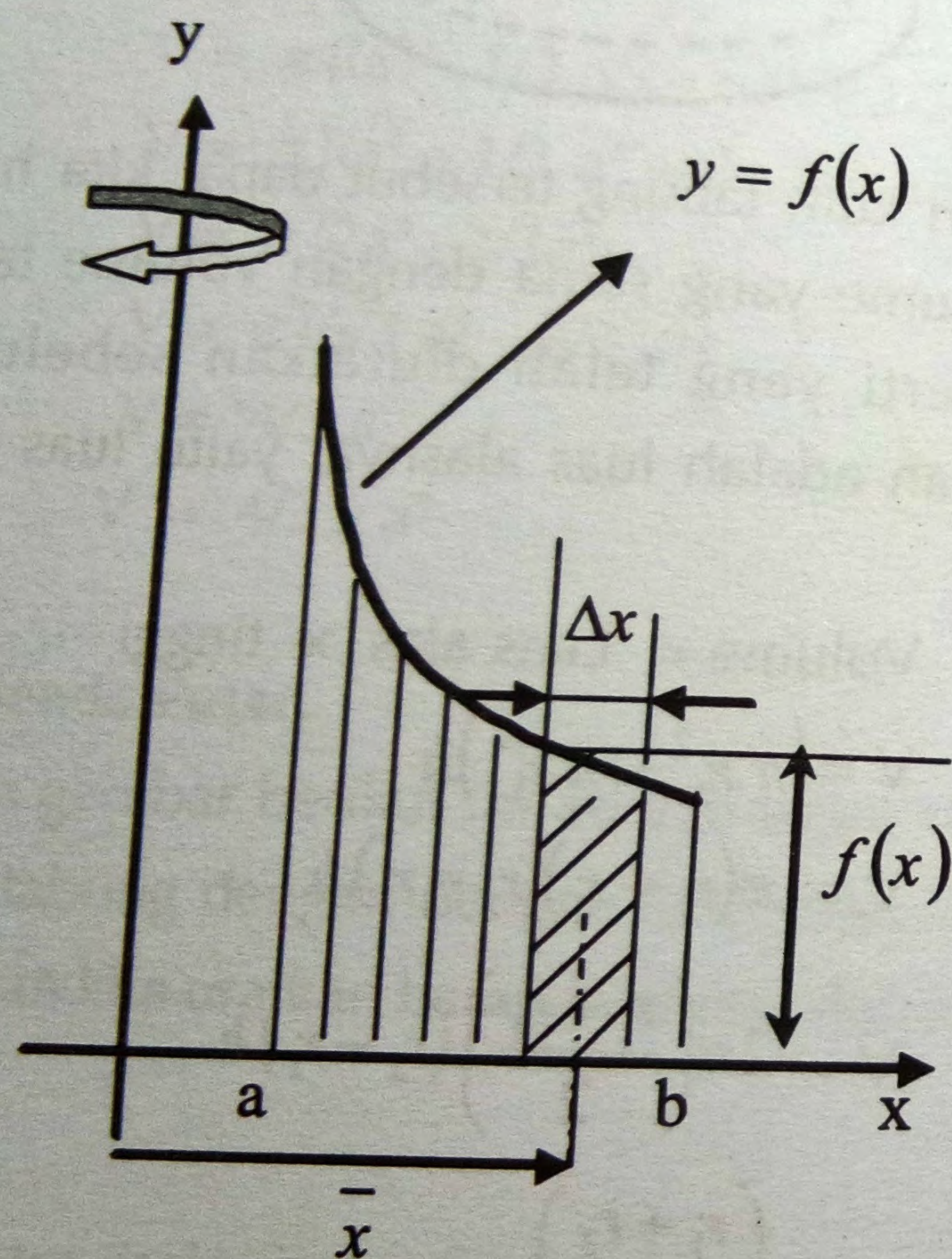
$(r_2 - r_1) = \Delta r$ = Tebal dinding kulit tabung

⁴ Ibid., h. 328.

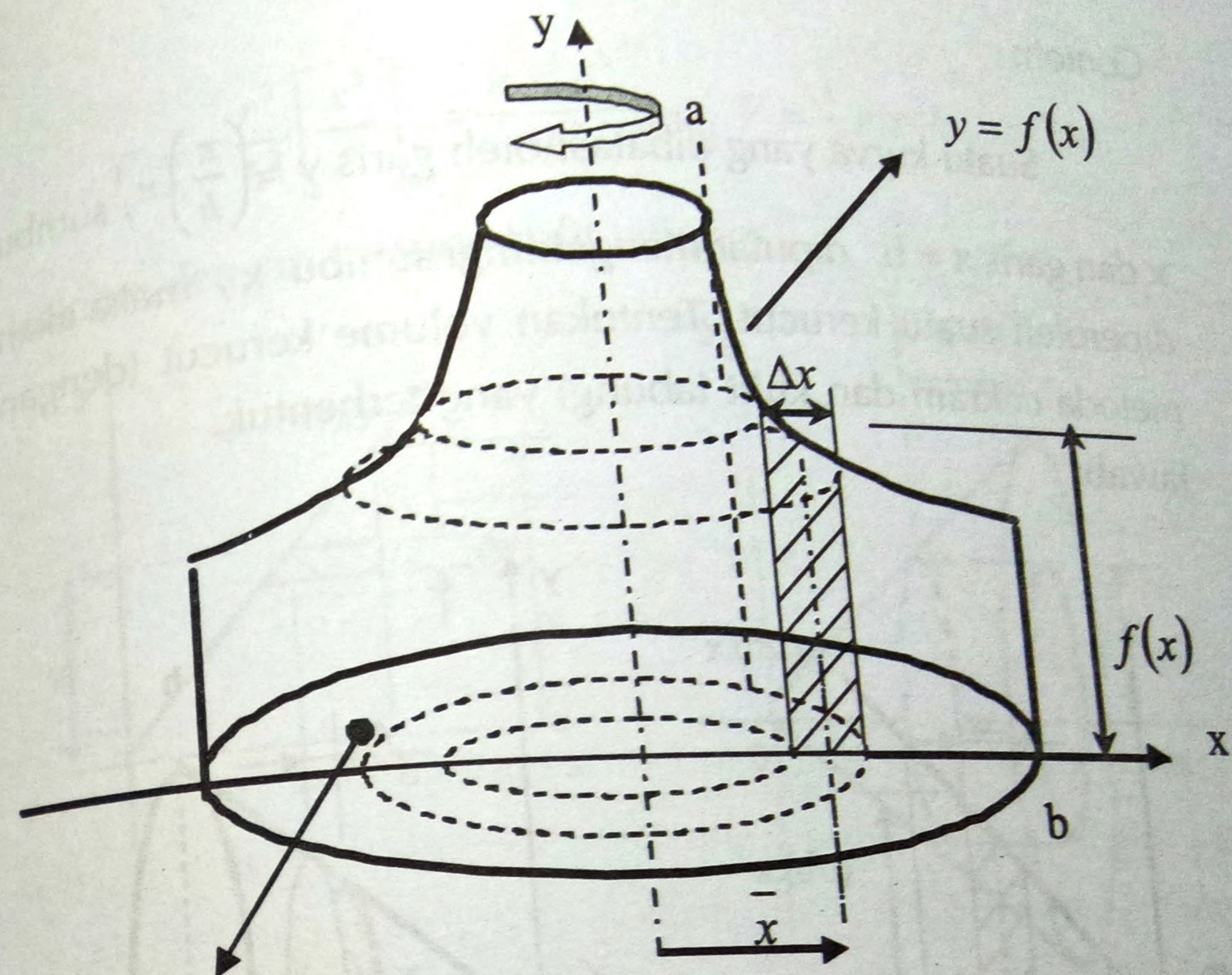
Sehingga : $V = 2\pi$ (jari – jari rata – rata) (tinggi) (tebal)
 $V = 2\pi \cdot \bar{r} \cdot \Delta r \cdot h$

Metoda Kulit Tabung

Andaikan suatu grafik fungsi $y = f(x)$ yang dibatasi oleh garis $x = a$; $x = b$ dan $x > 0$. Kemudian grafik fungsi tersebut di putar 360 dengan garis $x = 0$ sebagai sumbu putar, maka sketsa grafik akan terlihat seperti berikut:



Bila gambar diatas di putar 360, maka akan didapatkan gambar seperti berikut ini:



A : Luas alas dari kulit yang memiliki tebal Δx

Sehingga Volume = Luas alas x tinggi

$$V = A \cdot f(x)$$

Dimana A = Luas alas dari kulit yang memiliki tebal

$$A = 2\pi \cdot r \cdot h \cdot \Delta r$$

Bila $\bar{r} = \bar{x}$, dan $\Delta r = \Delta x$ maka : $A = 2\pi \cdot \bar{x} \cdot \Delta x$

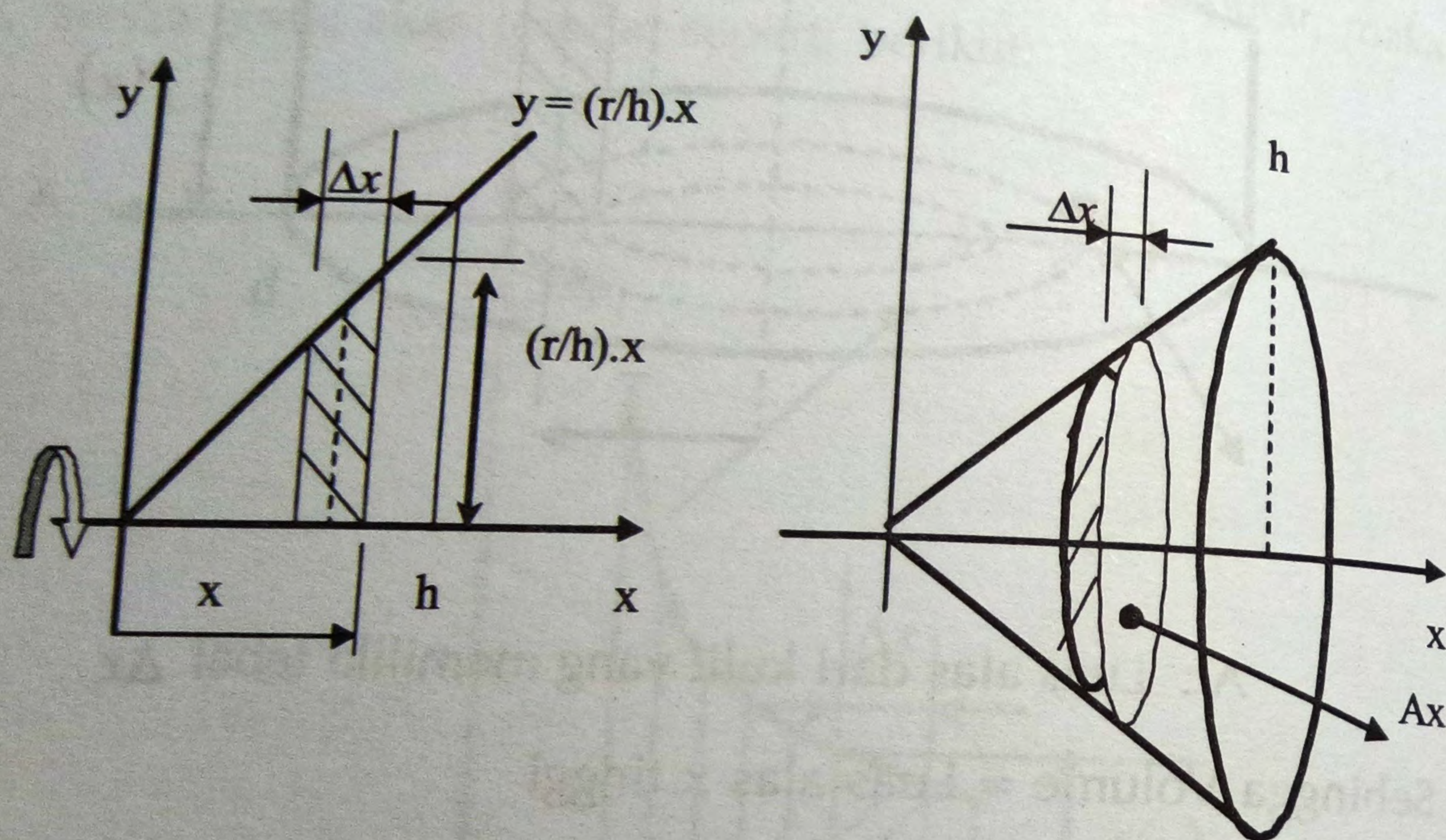
Sehingga: $\Delta V \approx 2\pi \cdot \bar{x} \cdot \Delta x \cdot f(x)$

$$\text{Atau } V = 2\pi \int_a^b \bar{x} \cdot f(x) dx$$

Contoh:

Suatu kurva yang dibatasi oleh garis $y = \left(\frac{r}{h}\right)x$, sumbu x dan garis $x = h$, diputar mengelilingi sumbu x , maka akan diperoleh suatu kerucut. Tentukan volume kerucut (dengan metoda cakram dan kulit tabung) yang terbentuk.

Jawab:



$$\Delta V \approx \pi \left(\frac{r}{h} x \right)^2 \Delta x \text{ atau } V = \int_0^h \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} x^2 dx$$

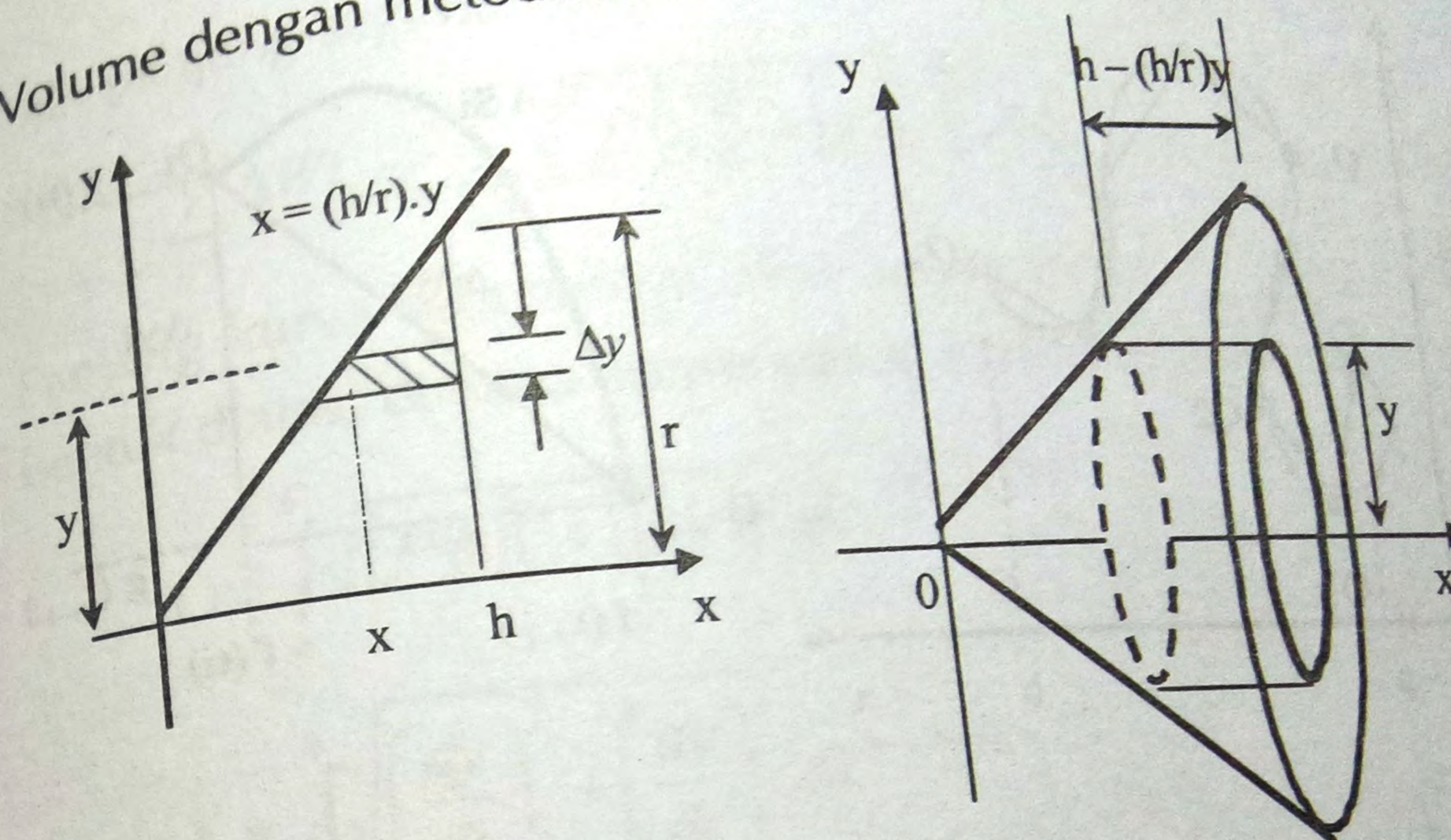
$$\text{Dimana : } Ax = \pi \cdot r^2 = \pi \left(\frac{r}{h} x \right)^2$$

Volume dengan metoda cakram:

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi \cdot r^2 h^3}{3h^2} \text{ atau } V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 h$$

Volume dengan metoda kulit tabung;



$$\Delta V \approx 2\pi \cdot y \left(h - \frac{h}{r} y \right) \Delta y$$

$$V = \int_0^r 2\pi \cdot y \left(h - \frac{h}{r} y \right) dy$$

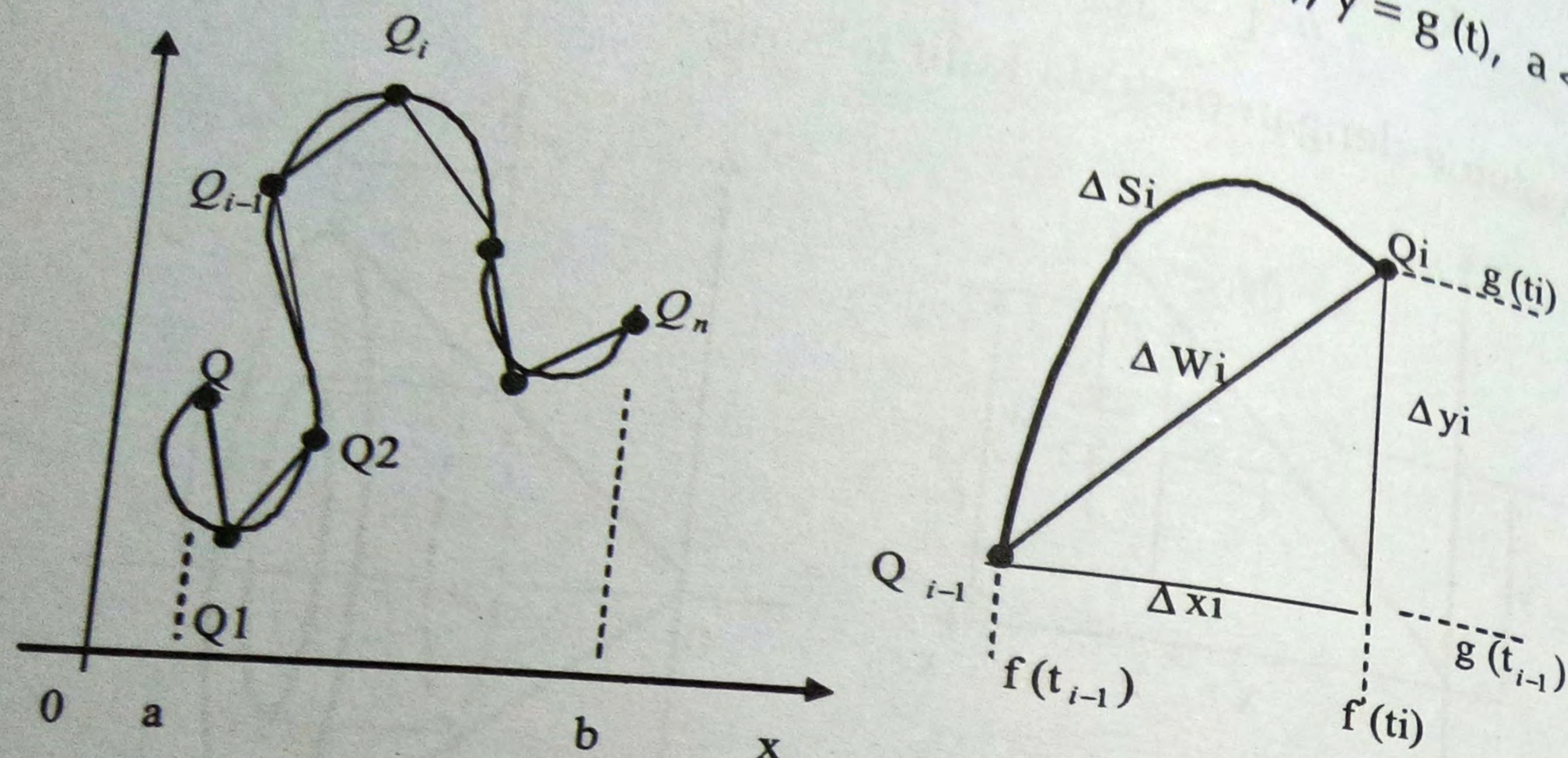
$$V = 2\pi \cdot h \int_0^r \left(y - \frac{1}{r} y^2 \right) dy$$

$$V = 2\pi \cdot h \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3r} \right]_0^r$$

$$V = 2\pi \cdot h \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3r} \right] = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 h$$

4.4. Panjang Kurva

Sebuah kurva mulus dengan persamaan $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a < t < b$



Kita buat suatu partisi pada selang (a, b) menjadi n bagian dengan:

$a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = b$. Pembagian ini akan mengakibatkan kurva terbagi menjadi $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n$.

Kita dekati panjang kurva ΔS_i dengan garis ΔW_i .

$$\Delta W_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$\Delta W_i = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$$

Dengan teorema nilai rata-rata turunan diperoleh:

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\bar{t}_i) \Delta t_i$$

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\bar{t}_i) \Delta t_i$$

Dimana $\Delta t_i = t_i - t_{(i-1)}$, maka:

$$\Delta W_i = \sqrt{[f'(\bar{t}_i) \Delta t_i]^2 + [g'(\bar{t}_i) \Delta t_i]^2}$$

Dan panjang segi banyak:

$$\sum_{i=1}^n \Delta W_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(\bar{t}_i)]^2 + [g'(\bar{t}_i)]^2} \cdot \Delta t_i$$

Panjang kurva sebenarnya akan kita peroleh sebagai limit bentuk diatas, dimana norma partisi sama dengan nol.⁵

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \cdot dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

Apabila persamaan kurva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$,

$$\text{Maka: } L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

Sedangkan kurva $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$

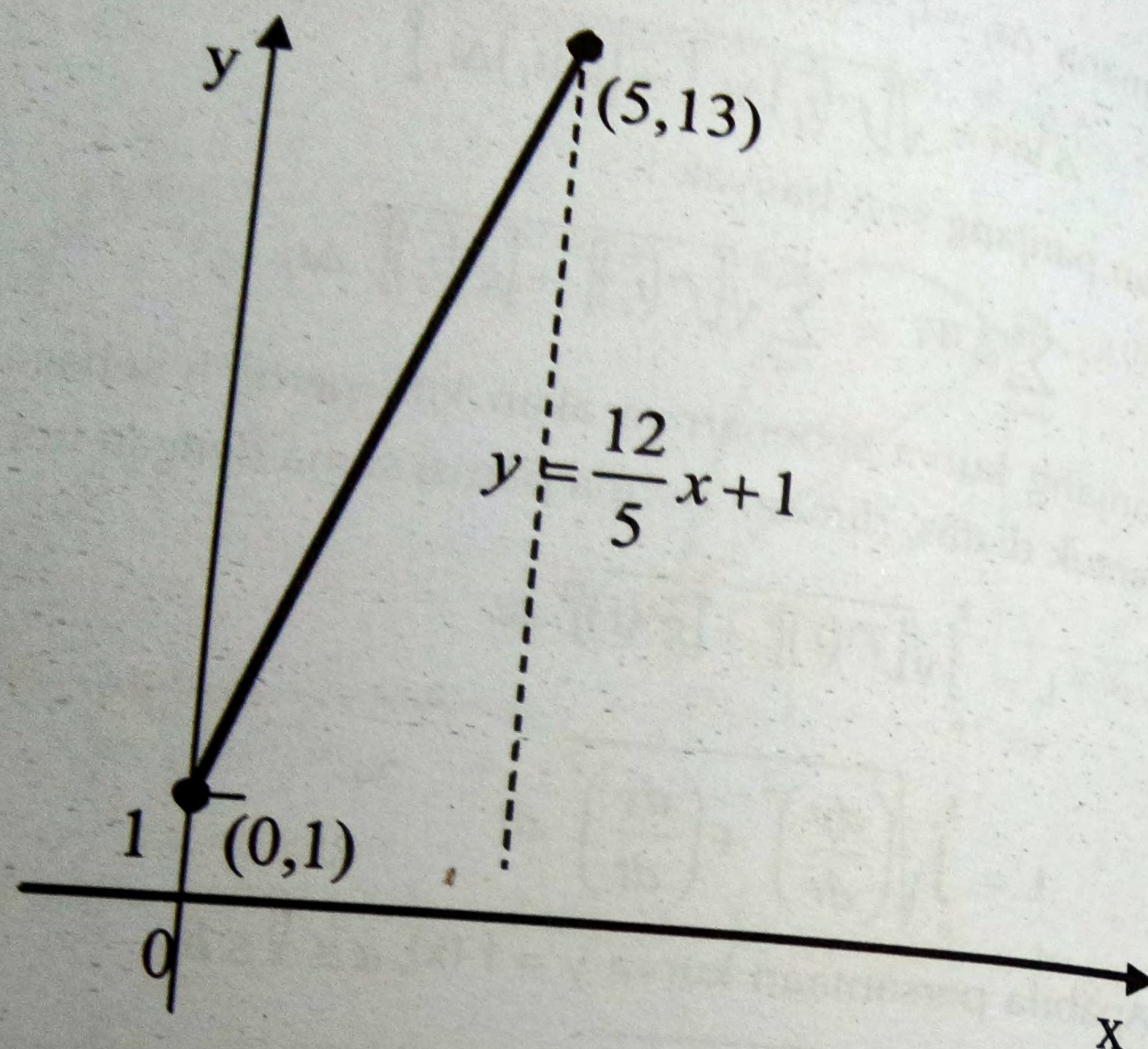
$$\text{Maka: } L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy$$

Contoh:

Hitung panjang ruas garis antara A (0, 1), B (5, 13) dengan rumus diatas.

⁵ Ibid., h. 338.

Jawab:

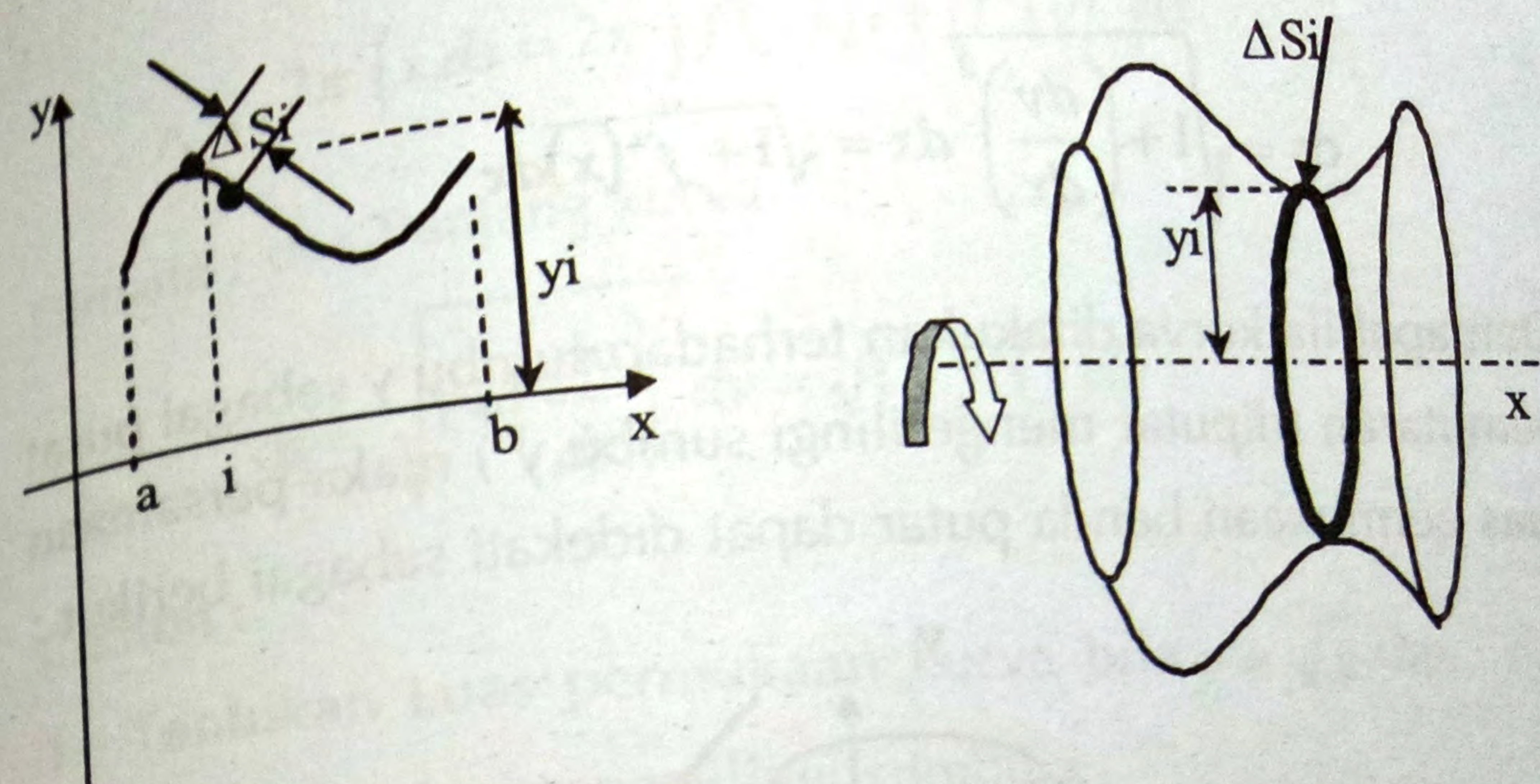


$$y = \frac{12}{5}x + 1 \text{ sehingga } \frac{dy}{dx} = \frac{12}{5}$$

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} dx = \frac{13}{5} \int_0^5 1 dx = \left[\frac{13}{5}x \right]_0^5 = 13$$

4.5. Luas Permukaan Benda Putar

Andaikan $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$ adalah persamaan kurva pada sumbu x - y



Kita buat partisi pada selang (a,b) dengan $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, dengan demikian kurva juga akan terbagi menjadi n bagian. Andaikan Δsi adalah panjang kurva pada i bagian dan y_i (koordinat y) dan kurva diputar mengelilingi sumbu x (gambar b). Luas dari bagian Δsi dapat didekati dengan luas kerucut terpancung:

$$A = 2\pi \cdot y_i \cdot \Delta si \text{ dimana: } 2\pi \cdot y_i \text{ adalah keliling kerucut}$$

Bila partisi p mendekati nol, maka luas bidang permukaan putar kurva adalah:⁶

$$A = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot y_i \cdot \Delta si = \int 2\pi \cdot y \cdot ds$$

Bila Kurva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ diputar mengelilingi sumbu x , maka luas kurva;

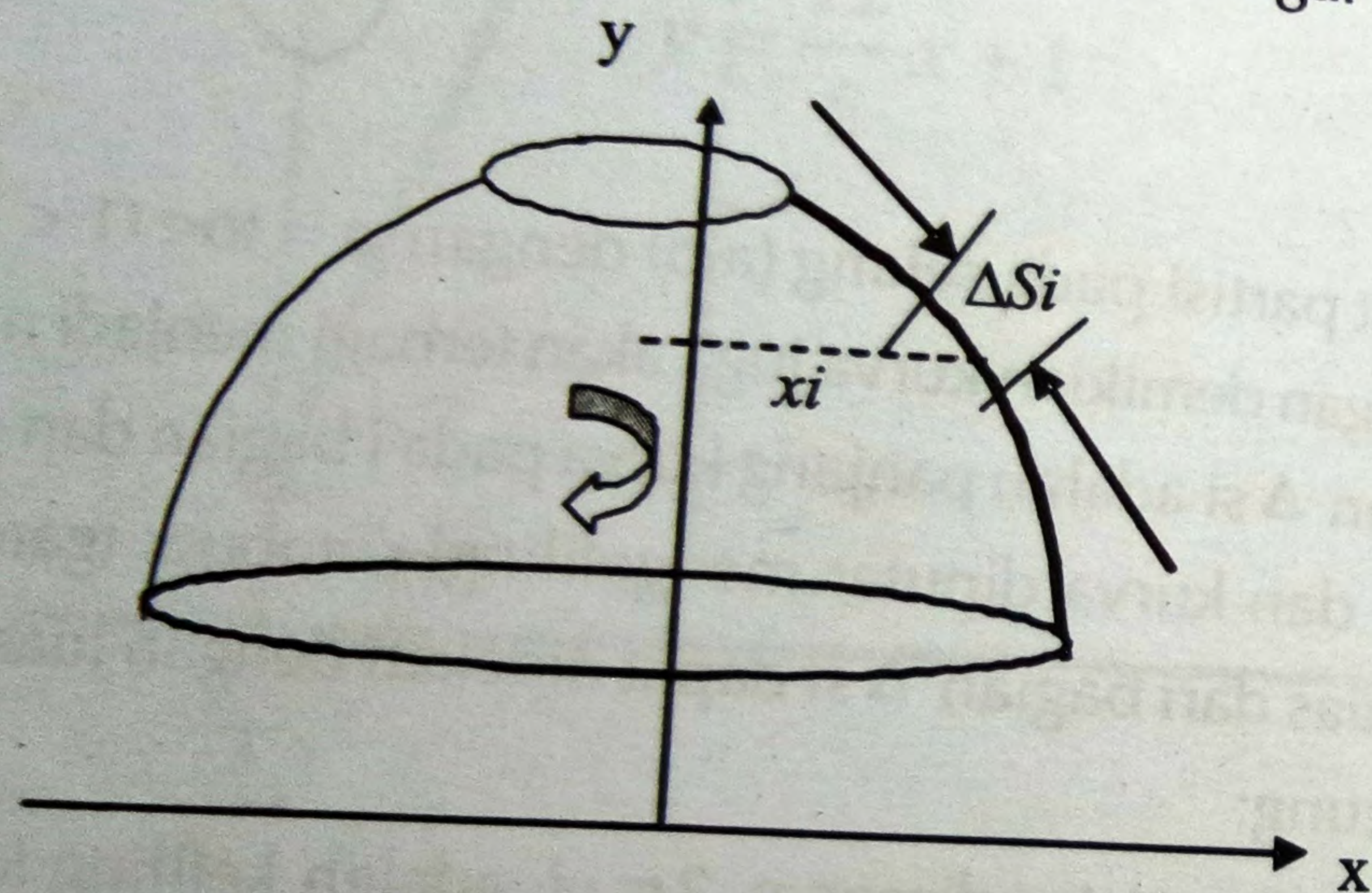
$$A = 2\pi \int y \cdot ds = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

⁶ Ibid., h. 343.

Dimana : ds : Panjang kurva

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Dan apabila kurva dilakukan terhadap sumbu y sebagai pusat pemutaran (diputar mengelilingi sumbu y) maka persamaan luas permukaan benda putar dapat didekati sebagai berikut :



Luas dari bagian ΔSi dapat didekati dengan luas kerucut terpancung, yaitu:

$$A = 2\pi \cdot xi \cdot \Delta Si$$

Bila partisi P mendekati nol, maka luas bidang permukaan benda putar kurva adalah:

$$A = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot xi \cdot \Delta Si = \int 2\pi \cdot x \cdot ds$$

Bila kurva $x = f(y)$; $a \leq y \leq b$, dan diputar mengelilingi sumbu y , luas permukaan kurva adalah :

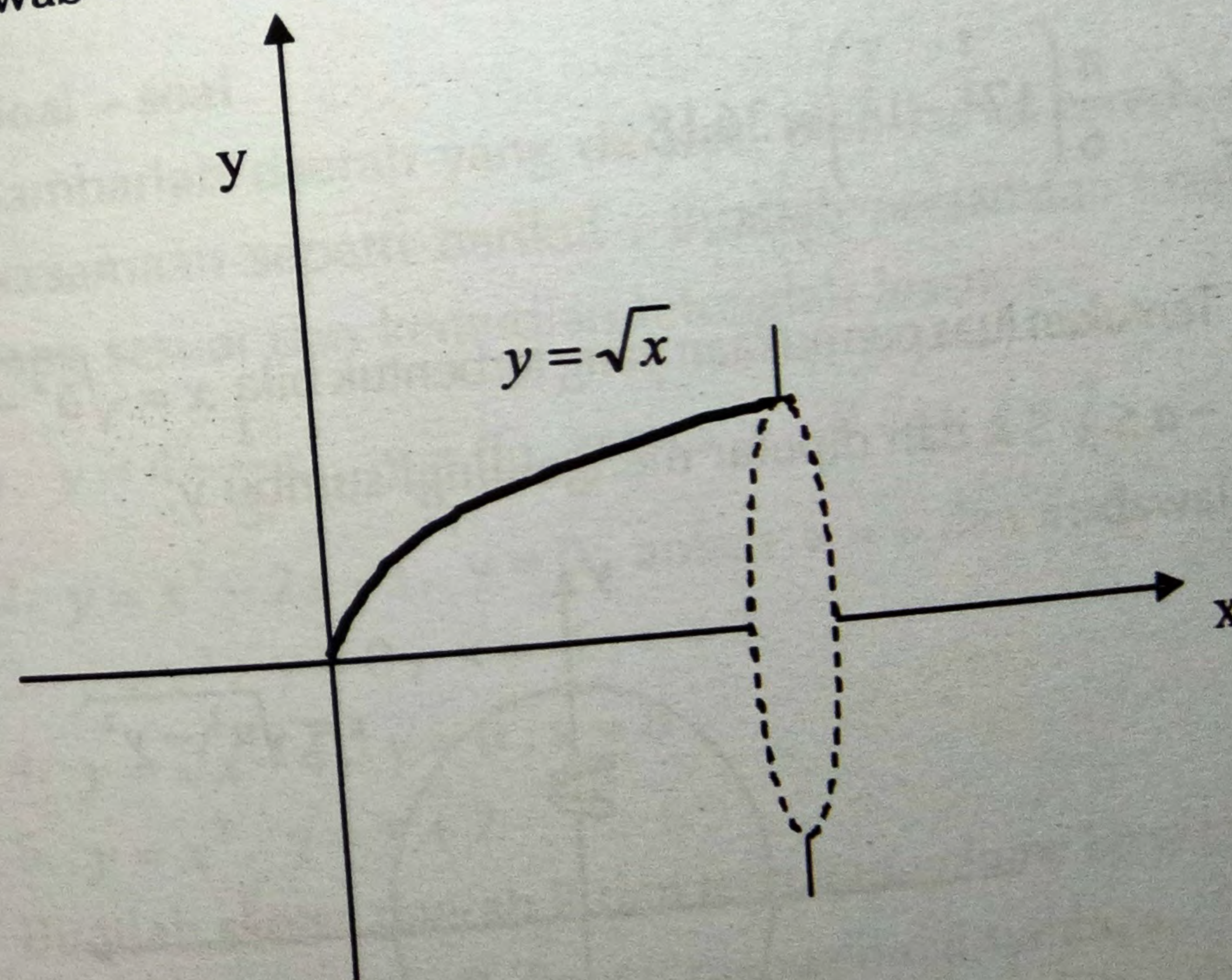
$$A = 2\pi \int_a^b x \cdot ds = 2\pi \int_a^b f(y) \sqrt{1 + [f'(y)]^2} dy$$

Dimana : ds : Panjang kurva

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \sqrt{1 + f'(y)^2} dy$$

Contoh :

1. Tentukan Luas permukaan kurva bila $y = \sqrt{x}$ dan, dan kurva diputar mengelilingi sumbu x
- Jawab :



$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Jadi : } A = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \cdot dx$$

$$A = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} \cdot dx$$

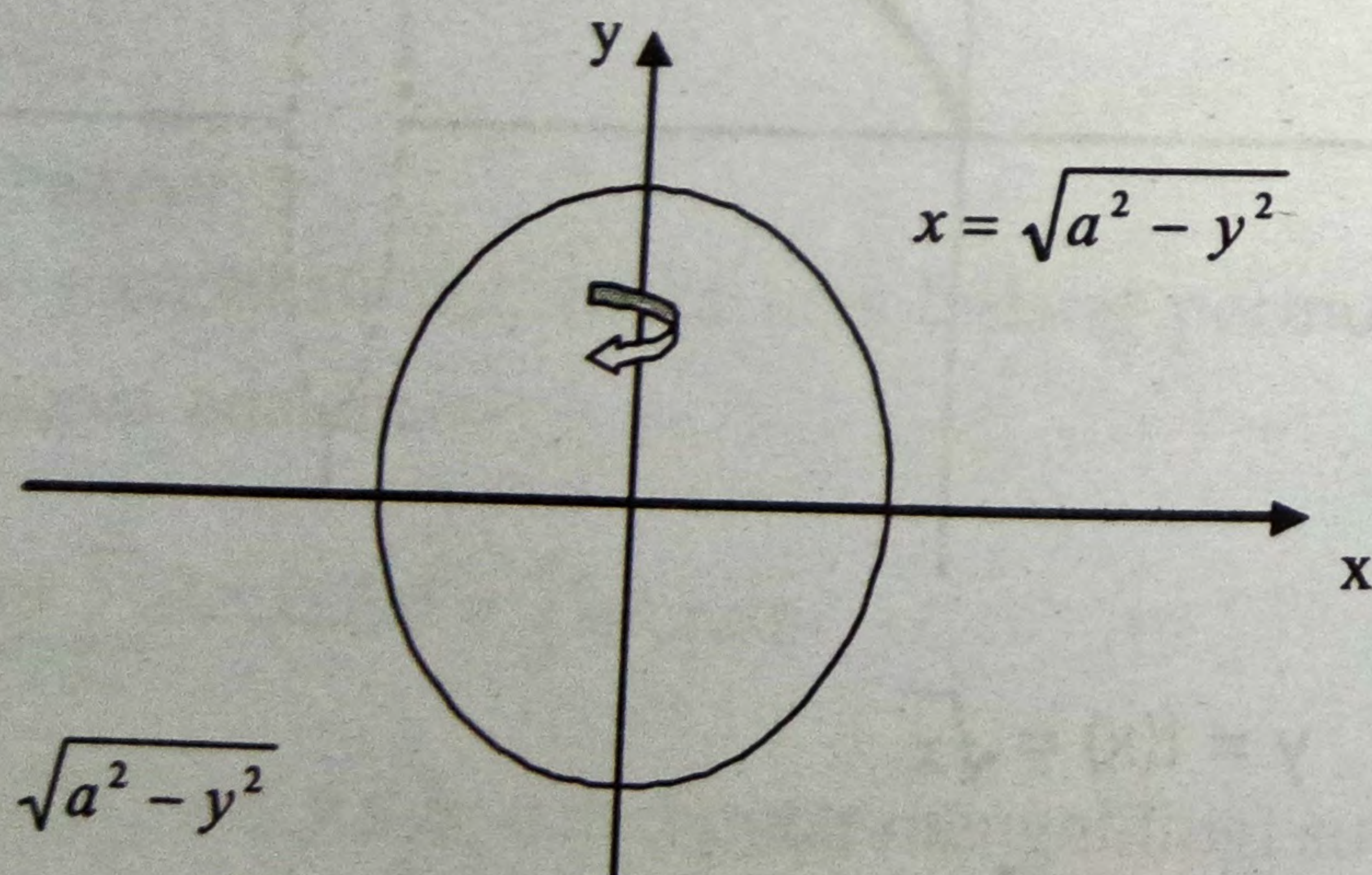
$$A = \pi \int_0^4 \sqrt{4x+1} \cdot dx$$

$$A = \left[\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4$$

$$A = \frac{\pi}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) \approx 36,18$$

2. Tentukan luas permukaan yang terbentuk bila $x = \sqrt{a^2 - y^2}$; $-a \leq y \leq a$ dan diputar mengelilingi sumbu y .

Jawab :



$$x = g(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$\text{Sehingga : } A = 2\pi \int_{-a}^a x \cdot ds = 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy$$

$$A = 2\pi \int_{-a}^a x \cdot ds = 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y^2}{a^2 - y^2}\right)} \cdot dy$$

$$A = 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2} \cdot dy = 2\pi \cdot a \cdot y \Big|_{-a}^a = 2\pi a \cdot a - 2\pi a \cdot (-a)$$

$$A = 2\pi \cdot a^2 + 2\pi \cdot a^2$$

$$A = 4\pi \cdot a^2$$

4.6. Soal – soal

- A. Gambarlah daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva yang persamaan seperti berikut . Buatlah persamaan integral yang sesuai dan kemudian hitunglah luasnya.

1. $y = 4 - \frac{1}{3}x^2$, $y = 0$, antara $x = 0$ dan $x = 3$

2. $y = x^2 - 2x - 3$, $y = 0$, antara $x = 0$ dan $x = 2$

3. $y = x^3$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$

4. $y = \sqrt{x-4}$, $y = 0$, $x = 8$

5. $y = x^2$, $y = x + 2$

- B. Buatlah sketsa daerah R dan tentukan volume benda yang terbentuk apabila R diputar mengelilingi sumbu x .

1. $y = \frac{x^2}{4}$, $x = 4$, $y = 0$

2. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$

$$3. y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 1, x = 4, y = 0$$

$$4. y = \sqrt{4-x^2}, y = 0, \text{ antara } x = -1 \text{ dan } x = 2$$

$$5. y = x^{\frac{2}{3}}, y = 0 \text{ dan antara } x = 1 \text{ dan } x = 8$$

C. Hitunglah volume benda yang terbentuk apabila daerah R yang dibatasi oleh kurva-kurva yang diketahui, diputar mengelilingi sumbu yang diketahui pula.

$$1. y = \frac{4}{x}, x = 1, x = 4, y = 0; \text{ diputar mengelilingi sumbu } y$$

$$2. y = \sqrt{x}, x = 4, y = 0; \text{ di putar mengelilingi sumbu } y$$

$$3. y = \sqrt{x}, x = 4, y = 0; \text{ di putar mengelilingi garis } x = 4$$

$$4. y = \frac{1}{4}x^3 + 2, y = 2 - x, x = 2; \text{ diputar mengelilingi sumbu } y$$

$$5. y = x^2, y = 2, x = 0 \text{ dan diputar mengelilingi sumbu } x$$

D. Tentukan panjang kurva yang terbentuk dari persamaan berikut:

$$1. y = 2x^{\frac{3}{2}} \text{ antara } x = 1/3 \text{ dan } x = 7$$

$$2. y = \left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ antara } x = 1 \text{ dan } x = 8$$

$$3. y = (x^4 + 3)/6x \text{ antara } x = 1 \text{ dan } x = 4$$

$$4. x = t^3, y = t^2 \text{ dan } 0 \leq t \leq 4$$

$$5. x = 3 \sin t; y = 3 \cos t - 3; 0 \leq t \leq 2\pi$$

E. Tentukan luas permukaan yang terbentuk apabila kerva yang diberikan diputar mengelilingi sumbu yang tersedia.

$$1. y = 6x; 0 \leq y \leq 1 \text{ dan diputar mengelilingi sumbu } x$$

$$2. y = \sqrt{25-x^2}, -2 \leq x \leq 3 \text{ dan diputar mengelilingi sumbu } x$$

$$3. x = y^3; 0 \leq y \leq 1 \text{ dan diputar mengelilingi sumbu } y$$

$$4. y = \frac{1}{2}x^2 - 1; 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}, \text{ dan diputar mengelilingi sumbu } y$$

$$5. x = t, y = t^3, 0 \leq t \leq 1, \text{ dan diputar mengelilingi sumbu } x$$

DAFTAR PUSTAKA

- E.J.Purcel. *Kalkulus dan Geometric Analitis, Jilid 1*, (terj.) I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga, 1999.
- Frank Ayres, Jr. *Schaum Outlines Kalkulus*. Jakarta: Erlangga, 2006.
- Frank Ayres, Jr. *Differensial dan Integral- Kalkulus*, terj. Lea Prasetyo. Jakarta: Erlangga, 1998.
- Goldstein Lay Schmeider. *Calculus and Its Application*, Sixth Editions, (EnglewoodCliff. NewJersey USA: Prentice Hall Inc, 1993.
- I Wayan Degeng. *Kalkulus Lanjut*. Yogyakarta: Graha Ilmu, 2007.
- Koko Martono. *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga, 1999.
- Limit and Differential Calculus*. <http://home.ust.hk/~jiwzhang/ust/lecture5b.pdf>.
- Murray R. Spigel. *Kalkulus Lanjutan*. terj. Pantur Silaban. Jakarta: Erlangga, 1997.
- Suko Riyanto. *Pengantar Teori Integral*. Malang: Universitas Negeri Malang, 2002.

BIODATA PENULIS

Dra. Umy Zahroh, M.Kes., lahir di Tulungagung dari pasangan H. Muhaimin (Alm) dan Hj. Siti Mardiyah(Alm). Setelah menamatkan pendidikan Sekolah Dasar Negeri 1 Tulungagung (1982), Sekolah Menengah Pertama Negeri 2 Tulungagung (1985), Sekolah Menengah Atas Negeri 2 Tulungagung (1988). Kemudian melanjutkan studi ke Fakultas Tarbiyah, Jurusan Tadris Matematika IAIN "Sunan Ampel" Malang (1992). Akhirnya melanjutkan studi ke Program Pasca Sarjana (S2) UNAIR Surabaya, dengan mengambil Program Studi Ilmu Kesehatan Masyarakat (1999).

Pada tahun 2000, ia diangkat menjadi staf pengajar STAIN Tulungagung pada Jurusan Tarbiyah, Program Studi Tadris matematika. Kemudian tahun 2001 menikah dengan Ir. Rifa'i (Alumni Unibraw Malang), dan dikarunia dua orang putri bernama Belinda Nabiila Al-Faizah (8 tahun) dan Bernessa Nayaka Al-Faizah (4 tahun)

Kesibukannya selain sebagai Ketua Prodi Tadris Matematika STAIN Tulungagung, juga sebagai wakil ketua Forum Kabupaten Sehat Tulungagung.

Buku yang telah diterbitkan adalah Kalkulus I (PT. Bina Ilmu Jakarta, 2004), Kesehatan Jiwa bagi Orang Lanjut Usia (Center For Society Studies, 2007), Agama sebagai Sistem Budaya (Sosio-Religia, 2007), Diagnosa Kesulitan Siswa pada Bilangan Pecahan (STAIN Tulungagung Press, 2008), Implementasi Kurikulum Berbasis Kompetensi Bidang Studi Matematika (STAIN Tulungagung Press, 2008), Etika Pendidik dalam Islam (Sosio-Religia, 2010), selain itu juga banyak menulis artikel di Jurnal Ta'allum.

Dra. UMY ZAHROH, M.Kes

KALKULUS

Matematika merupakan logika yang telah berkembang, memberikan sifat kuantitatif kepada pengetahuan. Matematika sebagai sarana berfikir deduktif aksiomatik yang sangat berguna untuk membangun teori keilmuan dan dapat menurunkan prediksi-prediksi serta mengkomunikasikan hasil-hasil aktifitas keilmuan dengan benar dan jelas secara singkat, cepat dan cermat. Matematika telah berkembang begitu pesat dengan berbagai cabang telaah yang di kaji dan di analisis, salah satu kajian yang terus dikembangkan adalah Kalkulus.

Teras

ISBN 978-406-978-343-1



9 784069 783432 >