

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### A. HAKEKAT MATEMATIKA

##### 1. Pengertian Matematika

Istilah *matematika* (Indonesia), *methematics* (Inggris), *matematik* (Jerman), *mathemetique* (Prancis), *matematica* (Italia), *matemacticeski* (Rusia) atau *mathemack/wiskude* (Belanda) berasal dari perkataan *mathematica*, yang mulanya diambil dari perkataan Yunani *matematike* yang berarti “*relating to learning*”. Perkataan ini mempunyai akar kata *mathema* yang berarti pengetahuan atau ilmu (knowledge, science). Perkataan *mathematike* berhubungan sangat erat dengan sebuah kata lainnya yang serupa yaitu *mathenein* yang berarti *belajar (berpikir)*.<sup>45</sup>

Matematika memiliki pengertian yang beragam. Setiap tokoh memberikan definisi tentang matematika sesuai dengan sudut pandang mereka. Di bawah ini disajikan beberapa definisi atau pengertian tentang matematika.<sup>46</sup>

- a) Menurut Ruseffendi matematika terbentuk sebagai hasil pemikiran manusia berhubungan dengan ide, proses, dan penalaran.<sup>47</sup>
- b) Menurut James & James dalam kamus matematikanya mengatakan bahwa matematika adalah ilmu tentang logika mengenai bentuk, susunan, besaran,

---

<sup>45</sup> Erman Suherman et. al, *Strategi Pembelajaran Matematika...*, hal 15-16

<sup>46</sup> Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia* (Jakarta: Direktorat Jendral DIKTI, DEPDIKNAS, 2000), hal. 11

<sup>47</sup> Erman Suherman et. al, *Strategi Pembelajaran Matematika...*, hal.16

dan konsep-konsep yang berhubungan satu dengan yang lainnya dengan jumlah yang banyak yang terbagi ke dalam tiga bidang, yaitu aljabar, analisis dan geometri.<sup>48</sup>

- c) Johnson dan Rising dalam bukunya mengatakan bahwa matematika adalah pola berpikir, pola mengorganisasikan, pembuktian yang logik, matematika itu adalah bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas, dan akurat, representasinya dengan simbol dan padat, lebih berupa bahasa simbol mengenai ide daripada mengenai bunyi.<sup>49</sup>

Sementara Herman Hudojo dalam bukunya mengatakan bahwa:

Matematika sebagai ilmu mengenai struktur dan hubungan-hubungannya, simbol-simbol diperlukan. Simbol-simbol itu penting untuk memanipulasi aturan-aturan dengan operasi yang ditetapkan. Simbolisasi menjamin adanya komunikasi dan mampu memberikan keterangan untuk membentuk suatu konsep baru. Konsep baru terbentuk karena adanya pemahaman terhadap konsep sebelumnya sehingga matematika itu konsep-konsepnya tersusun secara hirarkis. Simbolisasi itu barulah berarti bila suatu simbol itu dilandasi suatu ide. Jadi kita harus memahami ide yang terkandung dalam simbol tersebut. Dengan perkataan lain, ide harus dipahami terlebih dahulu sebelum ide tersebut disimbolkan.

Dari definisi-definisi di atas akan mampu membuka cakrawala pengertian kita tentang matematika, sehingga pengetahuan kita tentang matematika akan bertambah luas dengan tidak hanya memandang dari satu segi saja. Tetapi secara singkat dapat dikatakan bahwa matematika berkenaan dengan ide/konsep-konsep abstrak yang tersusun secara hierarkis dan penalarannya deduktif.<sup>50</sup> Sebagian besar konsep matematika memang bersifat abstrak apalagi jika sudah mencapai

---

<sup>48</sup> *Ibid...*, hal. 16

<sup>49</sup> *Ibid...*, hal. 17

<sup>50</sup> Herman Hudojo, *Mengajar Belajar...*, hal. 3

kasus yang lebih kompleks, keabstrakan itu semakin terasa. Misalnya, mengenai konsep limit fungsi. Konsep limit fungsi adalah konsep yang abstrak dan hanya menyediakan simbol  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , sehingga tidak dapat dilihat secara langsung bagaimana bentuk dan maksud sebenarnya dari konsep limit fungsi.<sup>51</sup> Oleh karena itu, pernyataan Herman Hudojo yang mengatakan bahwa “*Simbolisasi itu barulah berarti bila suatu simbol itu dilandasi suatu ide*” tidak dapat dipungkiri lagi, karena dengan pemahaman tentang ide/konsep/definisi maka suatu simbol  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  akan memiliki makna, apalagi jika ide tersebut dianalogikan dalam kasus-kasus yang nyata maka akan memudahkan siswa dalam memahami suatu konsep matematika dan memudahkan siswa melakukan imajinasi.

## 2. Karakteristik Matematika

Meski terdapat definisi yang berbeda tentang matematika, dapat terlihat adanya ciri-ciri khusus atau karakteristik yang dapat merangkum pengertian matematika secara umum. Beberapa karakteristik itu adalah:

- 1) Memiliki objek kajian yang abstrak

Dalam matematika objek dasar yang dipelajari adalah abstrak, sering juga disebut objek mental.<sup>52</sup> Objek-objek itu merupakan objek pikiran yang meliputi (1) fakta, (2) konsep, (3) operasi ataupun relasi dan (4) prinsip.

**Fakta** adalah konvensi atau kesepakatan dalam matematika yang diungkap dengan simbol tertentu. Misalnya, simbol bilangan “5” secara umum sudah dipahami sebagai bilangan “lima”. Sebaliknya, jika orang mengatakan “lima”

---

<sup>51</sup> Jhon Monaghan, et. al., “*Construction of the Limit Concept...*”, p. 1

<sup>52</sup> Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika...*, hal. 13

sudah dengan sendirinya menangkap simbolnya yaitu “5”. Seseorang dikatakan telah belajar fakta apabila dia telah mampu menuliskan dan membaca fakta secara benar serta mampu menggunakan dengan tepat dalam situasi yang berbeda.

**Konsep** adalah ide abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan atau mengklasifikasikan sekumpulan objek. Contohnya “Bilangan Real” adalah nama suatu konsep yang lebih kompleks. Dikatakan lebih kompleks karena himpunan bilangan real terdiri dari bilangan rasional dan bilangan irasional. Contoh lain dari konsep adalah limit, matriks, vektor, dan grup. Konsep berhubungan erat dengan definisi. Definisi adalah ungkapan yang membatasi suatu konsep. Misalnya, definisi konsep limit disimbolkan dengan  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , ini artinya jika  $x$  mendekati  $a$  (tetapi  $x \neq a$ ) maka  $f(x)$  mendekati nilai  $L$ .<sup>53</sup> Dari definisi tersebut akan memperjelas apa yang dimaksud dengan konsep dari limit fungsi.

**Operasi** atau **relasi** adalah aturan untuk memperoleh elemen tunggal dari satu atau lebih elemen yang diketahui. Contohnya, operasi penjumlahan, perkalian, gabungan, dan irisan. Dalam matematika juga dikenal operasi biner, penjumlahan adalah operasi biner, karena elemen yang dioperasikan ada dua.

**Prinsip** adalah objek matematika yang paling kompleks. Prinsip dapat terdiri atas beberapa fakta, beberapa konsep yang dikaitkan oleh suatu relasi ataupun operasi. Prinsip dapat berupa aksioma, teorema, lemma, sifat, dan sebagainya. Misalnya, limit fungsi berlaku sifat  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Artinya nilai dari  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\}$  ekuivalen dengan nilai limit

---

<sup>53</sup> Nugroho Soedyarto, & Maryanto. *Matematika untuk SMA ...*, hal. 200

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , atau bisa diterjemahkan sebagai: Limit suatu jumlah adalah jumlah dari limit-limitnya.

2) Bertumpu pada kesepakatan

Kesepakatan merupakan tumpuan yang amat penting dalam matematika. Kesepakatan yang amat mendasar adalah aksioma. Aksioma juga disebut sebagai postulat atau pernyataan pangkal (yang sering dinyatakan tidak perlu dibuktikan). Selanjutnya aksioma dapat menurunkan berbagai teorema. Teorema adalah suatu pernyataan yang perlu dibuktikan.

3) Berpola pikir deduktif

Pola pikir deduktif secara sederhana dapat dikatakan pemikiran “yang berpangkal dari hal yang bersifat umum diterapkan atau diarahkan kepada hal yang bersifat khusus”.<sup>54</sup> Banyak teorema-teorema matematika yang ditemukan melalui pengamatan-pengamatan khusus. Bila hasil pengamatan tersebut dimasukkan dalam suatu struktur kajian dalam Analisis Real, maka teorema yang ditemukan tersebut harus dibuktikan kebenarannya secara deduktif dengan menggunakan teorema atau definisi terdahulu yang telah diterima sebagai kebenaran.

4) Memperhatikan semesta pembicaraan

Dalam menggunakan matematika harus terdapat kejelasan mengenai ruang lingkup pembicaraan. Bila lingkup pembicaraannya bilangan, maka simbol-simbol dalam huruf diartikan sebagai bilangan. Bila lingkup pembicaraannya suatu himpunan maka simbol berupa huruf itu diartikan sebagai himpunan pula.

---

<sup>54</sup> Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika* ..... hal.16

Benar atau salah serta ada atau tidaknya penyelesaian suatu model matematika sangat ditentukan oleh semesta pembicaraannya. Misalnya, dalam semesta pembicaraan bilangan bulat, terdapat model  $2x = 5$ . Adakah penyelesaiannya? Kalau diselesaikan dengan cara yang biasa tanpa memperhatikan semesta pembicaraannya akan diperoleh  $x = 2,5$ . Tetapi bila kita lebih cermat, persamaan tersebut tidak memiliki penyelesaian karena 2,5 bukanlah bilangan bulat. Jadi himpunan penyelesaiannya adalah “himpunan kosong” karena tidak ada jawaban yang sesuai dengan semesta pembicaraannya.

#### 5) Konsisten dalam sistemnya

Suatu teorema ataupun definisi harus menggunakan istilah atau konsep yang telah ditetapkan terlebih dahulu. Kalau telah ditetapkan atau disepakati bahwa  $a + b = x$  dan  $x + y = p$ , maka  $a + b + y$  haruslah sama dengan  $p$ .

### 3. Matematika sebagai Ilmu yang terstruktur

Matematika dikenal sebagai ilmu deduktif. ini berarti proses pengerjaan matematika harus bersifat deduktif. matematika tidak menerima generalisasi berdasarkan pengamatan (induktif), tetapi harus berdasarkan pembuktian deduktif. meskipun demikian untuk membantu pemikiran, pada tahap-tahap permulaan seringkali kita memerlukan bantuan contoh-contoh kasus atau ilustrasi geometris.<sup>55</sup>

---

<sup>55</sup> Erman Suherman et. al, *Strategi Pembelajaran...*, hal 18-19

## B. BELAJAR MATEMATIKA

Belajar adalah proses mental yang terjadi dalam diri seseorang, sehingga menyebabkan munculnya perubahan tingkah laku. Aktivitas mental itu terjadi karena adanya interaksi individu dengan lingkungan yang disadari.<sup>56</sup> Dalam belajar, akan terjadi proses berpikir.<sup>57</sup> Begitu pula seseorang dikatakan belajar matematika jika dia melakukan proses berpikir matematik.

Berpikir matematik merupakan kegiatan mental, yang dalam prosesnya selalu menggunakan abstraksi dan generalisasi.<sup>58</sup> Sehingga seseorang yang belajar matematika dituntut untuk mempunyai kemampuan dalam membuat abstraksi dan generalisasi. Abstraksi merupakan proses untuk menyimpulkan hal-hal yang sama dari sejumlah objek atau situasi yang berbeda. Sedangkan generalisasi adalah membuat perkiraan berdasarkan kepada pengetahuan yang dikembangkan melalui contoh-contoh khusus.

Dalam belajar matematika kita perlu mengetahui karakteristik matematika. Salah satu karakteristik dalam matematika adalah objek matematika, menurut Soedjadi objek penelaahan matematika meliputi fakta, konsep, operasi, dan prinsip. Sedangkan menurut Bell objek matematika dapat diklasifikasikan atas fakta, konsep, keterampilan, dan prinsip.<sup>59</sup>

**Fakta** adalah suatu konvensi atau kesepakatan dalam matematika. Misalnya simbol-simbol dalam matematika. Simbol " $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ " merupakan

---

<sup>56</sup> Wina Sanjaya, *Pembelajaran dalam Implementasi Kurikulum Berbasis Kompetensi*, (Bandung: Kencana, 2005), hal. 89

<sup>57</sup> Maryono, *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa...*, hal. 10

<sup>58</sup> Herman Hudojo, *Mengajar Belajar...*, hal. 76

<sup>59</sup> Bell F, *Teaching and Learning Mathematics (in secondary )* (Iowa: wim. C: Brown Company Publisher, 1978), hal. 108

simbol yang dihubungkan dengan “limit suatu fungsi  $f(x)$ ”, “+” adalah simbol yang dihubungkan dengan operasi penjumlahan dan lainnya. Seseorang dikatakan telah belajar fakta apabila dapat menuliskan fakta dengan benar dan dapat menuliskan dengan tepat dalam situasi yang berbeda.

**Konsep** dalam matematika adalah ide atau gagasan abstrak yang memungkinkan seseorang untuk dapat mengklasifikasikan (menggolongkan) objek atau kejadian tertentu dan menerangkan apakah objek itu merupakan contoh atau bukan contoh dari gagasan tersebut.<sup>60</sup> Fungsi, aljabar, fungsi trigonometri merupakan konsep-konsep yang terdapat pada materi limit fungsi. Seseorang dikatakan telah belajar suatu konsep apabila ia dapat memisahkan contoh dan bukan contoh.

**Keterampilan** (*skill*) adalah kemampuan seseorang menjalankan prosedur dan operasi dalam matematika dengan cepat dan tepat.<sup>61</sup> Berbagai keterampilan berwujud urutan prosedur tertentu yang disebut algoritma.<sup>62</sup> Sedangkan **operasi** adalah suatu aturan untuk mendapatkan elemen tunggal dari satu atau lebih elemen yang diketahui. Misalnya, keterampilan mencari nilai limit dari  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ , mencari nilai limit dari soal tersebut tidak hanya dengan mensubstitusikan nilai 1 ke  $x$ , karena apabila disubstitusikan akan mendapatkan nilai  $\frac{0}{0}$ , oleh karena itu limit tersebut harus diubah dahulu dengan jalan dikalikan dengan sekawan.

---

<sup>60</sup> *Ibid...*, hal. 108

<sup>61</sup> *Ibid...*, hal. 108

<sup>62</sup> Lasmi Nurdin. *Analisa Pemahaman Siswa SMA Laboratorium Universitas Negeri Malang tentang Barisan dan Deret Berdasarkan Teori APOS*. Tesis tidak diterbitkan. (Malang: Program Pascasarjana, 2000), hal. 10



Dari soal tersebut tampaklah bahwa dalam mencari penyelesaian tentang limit sangat diperlukan sebuah keterampilan dalam memilih suatu metode atau cara pengerjaan yang tepat agar memperoleh jawaban yang benar dan tepat. Jika dikaitkan dengan masalah limit di atas, keterampilan seseorang terletak pada jalan yang dipilih mereka untuk mengalikan limit tersebut dengan sekawannya. Seseorang dikatakan terampil apabila ia dapat memecahkan berbagai masalah yang berbeda yang memerlukan algoritma atau dapat menerapkan keterampilan dalam berbagai situasi.

**Prinsip** merupakan objek matematika yang kompleks.<sup>63</sup> Prinsip adalah rangkaian konsep-konsep bersama-sama dengan hubungan di antara konsep-konsep itu.<sup>64</sup> Sedangkan Hudojo menyatakan bahwa prinsip adalah suatu ide/gagasan yang menghubungkan dua atau lebih konsep.<sup>65</sup> Misalnya, untuk memahami limit fungsi aljabar, maka seseorang harus mengetahui dan memahami konsep limit fungsi dan konsep aljabar itu sendiri, atau bahkan konsep suku banyak. Seseorang dikatakan telah memahami suatu prinsip jika ia dapat mengidentifikasi konsep-konsep yang termuat dalam prinsip tersebut dan mengaplikasikan prinsip tersebut pada situasi tertentu.

---

<sup>63</sup> Soedjadi, *Kiat Pendidikan Matematika...*, hal.15

<sup>64</sup> Bell F, *Teaching and Learning ...*, hal. 108

<sup>65</sup> Herman Hudojo. *Mengajar Belajar ...*, hal. 75

### C. PEMAHAMAN

Pemahaman diartikan sebagai perihal menguasai (mengerti, memahami).<sup>66</sup> Pemahaman adalah proses, cara, perbuatan memahami atau memahamkan.<sup>67</sup> Pemahaman (*understanding*) yaitu kedalaman kognitif, dan afektif yang dimiliki oleh individu.<sup>68</sup> Selanjutnya, Dubinsky menyatakan pemahaman tentang konsep matematika merupakan hasil konstruksi dan rekonstruksi dari objek-objek matematika yang dilakukan melalui aktivitas aksi, proses, dan objek yang dikoordinasi dalam suatu skema.<sup>69</sup>

Skema merupakan struktur kognitif yang digunakan seseorang untuk mengadaptasi dan mengorganisasikan stimulus (pengetahuan) yang datang dari lingkungan.<sup>70</sup> Sedangkan Bartlett menyatakan bahwa skema merupakan penuntun dalam melakukan pengorganisasian informasi (pengetahuan) yang masuk ke dalam sistem memori pada suatu kumpulan pengetahuan.<sup>71</sup> Secara sederhana, skema diibaratkan sebagai konsep-konsep atau kategori-kategori yang dipergunakan untuk mengidentifikasi dan mengklasifikasikan stimulus-stimulus (pengetahuan/informasi) yang datang dari luar.

Dalam teori perkembangan kognitif, Piaget memandang bahwa proses berpikir merupakan aktivitas gradual dari fungsi intelektual, yaitu berpikir dari

---

<sup>66</sup> Sugono et. Al, *Kamus Bahasa...*, hal. 1103

<sup>67</sup> *Ibid...* hal. 979

<sup>68</sup> E, Mulyasa. *Kurikulum Berbasis Kompetensi*. (Bandung: Remaja Rosdakarya, 2010), hal. 39

<sup>69</sup> Ed. Dubinsky, *Using A Theory of...*, hal. 11

<sup>70</sup> Herman Hudojo, *Pengembangan Kurikulum dan Pembelajaran Matematika*, (Malang: IKIP Malang, 2003), hal. 59

<sup>71</sup> Davis, G.E., Tall. *What is A Schema?*, (online).

(<http://www.crme.soton.ac.uk/publications/gdpops/schemes.htm>), diakses 23 maret 2013 jam 09.15

kongkret menuju abstrak.<sup>72</sup> Kecakapan intelektual tersebut dapat diperoleh melalui proses mencari keseimbangan antara apa yang dirasakan dan diketahui pada satu sisi dengan apa yang dilihat suatu fenomena baru sebagai pengalaman dan persoalan.<sup>73</sup> Jika seseorang dalam kondisi sekarang dapat mengatasi situasi baru, keseimbangan mereka tidak akan terganggu. Jika tidak, ia harus melakukan adaptasi dengan lingkungannya.

Proses adaptasi mempunyai dua bentuk dan terjadi secara simultan, yaitu asimilasi dan akomodasi. Asimilasi adalah proses pengintegrasian atau penyatuan informasi baru ke dalam struktur kognitif (skema) yang telah dimiliki oleh individu.<sup>74</sup> Akomodasi merupakan penyesuaian struktur kognitif ke dalam situasi baru dengan jalan mengadakan modifikasi struktur kognitif (skema) yang ada atau bahkan membentuk pengalaman/pengetahuan yang benar-benar baru. Sedangkan keseimbangan antara asimilasi dan akomodasi harus senantiasa dilakukan secara berkesinambungan (*ekuilibrasi/equilibration*) agar seseorang dapat terus berkembang dan bertambah pengetahuannya sekaligus agar mampu menjaga stabilitas mental dalam dirinya. Jadi dalam belajar dalam rangka mendapatkan suatu pemahaman matematika, seseorang akan berusaha melakukan reekuilibrasi dengan melakukan asimilasi situasi (pengetahuan) tersebut ke dalam skema yang ada atau jika perlu merekonstruksi skema tertentu untuk mengakomodasi situasi (pengetahuan) tersebut.<sup>75</sup>

---

<sup>72</sup> Djaali, *Psikologi Pendidikan*. (Jakarta: Bumi Aksara, 2011), hal. 76

<sup>73</sup> Asri Budiningsih, *Belajar dan pembelajaran...*, hal. 35

<sup>74</sup> *Ibid.*, hal. 36

<sup>75</sup> Maryono, *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa...*, hal. 14

Berdasarkan kajian teori di atas, maka pemahaman pada penelitian ini diartikan sebagai kemampuan siswa untuk mengkonstruksi dan merekonstruksi kembali aksi, proses, dan objek matematika serta mengorganisasikannya dalam struktur kognitif (skema) yang digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan tentang konsep limit fungsi.

#### **D. TEORI APOS**

Teori APOS adalah suatu teori belajar yang lahir dari hipotesis bahwasanya pengetahuan matematika berada dalam kecenderungan individu untuk terlibat dalam situasi masalah matematika dengan cara memanipulasi mental aksi, proses, objek dan mengorganisasi ketiganya dalam skema.<sup>76</sup> Teori belajar ini muncul di kalangan *Research in Undergraduate Mathematic Education Community* (RUMEC). Orang yang gencar mengembangkan Teori APOS adalah Ed. Dubinsky.

Tujuan dari teori APOS dijelaskan sebagai berikut;

*APOS Theory arose out of an attempt to understand the mechanism of reflective abstraction, introduced by Piaget to describe the development of logical thinking in children, and extend this idea the more advanced mathematical concepts (Dubinsky, 1991a).*<sup>77</sup>

Teori APOS muncul dengan tujuan untuk memahami mekanisme abstraksi reflektif yang diperkenalkan oleh J. Piaget yang menjelaskan perkembangan berpikir logis matematika untuk anak-anak. Kemudian ide tersebut dikembangkan untuk konsep matematika yang lebih luas, terutama untuk membentuk

---

<sup>76</sup> Ed. Dubinsky & McDonal, M.A. *APOS: A Constructivist Theory of Learning...*, hal. 2

<sup>77</sup> *Ibid...*, hal. 4

perkembangan berpikir logis bagi mahasiswa. Teori APOS juga sangat berguna dalam memahami pembelajaran mahasiswa dalam berbagai topik pada kalkulus, aljabar abstrak, statistika, matematika diskrit, dan topik matematika lainnya.<sup>78</sup> Dari penjelasan di atas dapat digarisbawahi bahwa Teori APOS dapat digunakan untuk memahami pembelajaran pada topik kalkulus. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa teori APOS juga bisa diterapkan untuk memahami pembelajaran siswa pada materi limit di SMA, karena limit adalah salah satu kajian pada topik kalkulus.

Teori APOS dapat digunakan untuk membandingkan kemampuan individu dalam mengkonstruksi mental yang telah terbentuk untuk suatu konsep matematika. Misalkan, ada dua individu yang kelihatannya sama-sama menguasai konsep matematika. Dengan Teori APOS dapat dideteksi lebih lanjut siapa yang konsep matematikanya lebih baik, berarti jika salah satu di antara keduanya mampu menjelaskan lebih lanjut suatu konsep sedangkan yang satunya tidak mampu, maka secara otomatis ia berada pada tingkat pemahaman yang lebih baik dari pada yang satunya. Sehingga, dapat dikatakan bahwa teori APOS ini merupakan tahapan-tahapan individu dalam memahami konsep pelajaran.

APOS adalah bentuk akronim dari *action*, *process*, *object*, dan *schema*.

Menurut Dubinsky definisi teori APOS adalah sebagai berikut:

*APOS Theory is our elaboration of the mental constructions of actions, processes, objects, and schemas. In studying how students might learn a particular mathematical concept, an essential ingredient which the researcher must provide is an analysis of the concept in terms of these specific constructs.*<sup>79</sup>

---

<sup>78</sup> *Ibid...*, hal. 2

<sup>79</sup> Ed. Dubinsky, *Using a Theory of Learning...*, hal. 11

Teori APOS adalah suatu teori konstruktivis tentang bagaimana kemungkinan berlangsungnya pencapaian/pembelajaran suatu konsep atau prinsip matematika yang dapat digunakan sebagai suatu elaborasi tentang konstruksi mental dari aksi (*actions*), proses (*processes*), objek (*objects*), skema (*schemas*). Di bawah ini akan diberikan deskripsi yang lebih lengkap untuk masing-masing tahapan konstruksi mental tersebut.

### **Aksi (*action*)**

Aksi didefinisikan oleh Ed. Dubinsky sebagai berikut:

*An action is a transformation of objects perceived by the individual as essentially external and as requiring, either explicitly or from memory, step by step instructions on how to perform the operation.*<sup>80</sup>

Aksi (*action*) adalah transformasi dari objek-objek yang dipelajari dan yang dirasakan oleh siswa sebagai bagian eksternal dan sebagai kebutuhan, secara eksplisit dari memori, instruksi tahap demi tahap tentang bagaimana melakukan operasi. Dengan kata lain, aksi adalah suatu bentuk struktur kognitif yang melibatkan transformasi mental atau fisik objek melalui tindakan, untuk menstimulus siswa yang merasakan objek sebagai bagian eksternal. Pada tahap aksi terjadi pengulangan fisik atau manipulasi mental dengan mentransformasikan objek matematika melalui beberapa cara atau aktifitas yang mendasarkan pada beberapa algoritma secara eksplisit.<sup>81</sup>

Transformasi dalam hal ini merupakan suatu reaksi eksternal yang diberikan secara rinci pada tahap-tahap yang harus dilakukan, jadi kinerja pada tahap aksi berupa aktifitas prosedural. Pada tahap ini siswa masih membutuhkan

---

<sup>80</sup> Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. *APOS: A Constructivist Theory...*, hal.2

<sup>81</sup> Maryono, *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa...*, hal. 16

bimbingan untuk melakukan transformasi, baik secara fisik ataupun secara mental objek. Contohnya, siswa membutuhkan pemahaman awal tentang fungsi, yang kemudian ditransformasikan untuk memikirkan tentang konsep limit fungsi,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Siswa tersebut dapat mensubstitusikan bilangan tertentu ke dalam variabel  $x$  pada persamaan  $f(x)$ , untuk  $x$  mendekati  $a$  serta mampu memanipulasinya (secara mental). Dalam keadaan ini, siswa tersebut dianggap berada pada tahap aksi.

### **Proses (*Process*)**

Proses didefinisikan oleh Ed. Dubinsky sebagai berikut:

*When an action is repeated and the individual reflects upon it, he or she can make an internal mental construction called a process which the individual can think of as performing the same kind of action, but no longer with the need of external stimuli.*<sup>82</sup>

Proses (*Process*) didefinisikan sebagai struktur kognitif yang melibatkan imajinasi tentang transformasi mental atau fisik objek, sehingga siswa merasakan transformasi menjadi bagian internal dirinya dan mampu mengontrol transformasi tersebut.<sup>83</sup> Ketika tindakan-tindakan transformasi diulang, maka siswa paham bahwasanya proses transformasi yang seluruhnya berada dalam pikiran siswa tersebut dapat dilakukan tanpa membutuhkan rangsangan eksternal.<sup>84</sup> Perubahan transformasi dari eksternal ke dalam internal (pikiran) anak disebut interiorisasi (*interiorization*).<sup>85</sup>

---

<sup>82</sup> Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. *APOS: A Constructivist Theory...*, hal. 3

<sup>83</sup> Minanur Rohman. *Analisis Miskonsepsi Siswa...*, hal. 22-23

<sup>84</sup> Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. *APOS: A Constructivist Theory...*, hal. 3

<sup>85</sup> Aneshkumar Maharaj (dalam Minanur Rohman), *Analisis Miskonsepsi Siswa...*, hal.

Interiorisasi dari suatu aksi merupakan perubahan aktifitas prosedural menuju konstruksi mental pada proses internal yang relatif untuk sederetan aksi pada objek kognitif yang dapat dilakukan atau dibayangkan untuk dilakukan dalam pikiran tanpa mengerjakan semua tahapan-tahapan pekerjaan.<sup>86</sup> Contohnya, siswa yang berada dalam tahap proses sudah memahami bentuk tak tentu suatu limit, sehingga mereka akan menggunakan suatu metode lain untuk menentukan nilai limit fungsinya.

### **Objek (*Object*)**

Objek didefinisikan oleh Ed. Dubinsky sebagai berikut:

*An object is constructed from a process when the individual becomes aware of the process as a totality and realizes that transformations can act on it.*<sup>87</sup>

Objek (*Object*) adalah tahap struktur kognitif dimana siswa menyadari proses-proses transformasi tersebut sebagai satu kesatuan, dan sadar bahwasanya transformasi dapat dilakukan dalam satu kesatuan tersebut.<sup>88</sup> Proses-proses baru dapat juga dikonstruksi (dibentuk) dengan cara mengkoordinasi proses-proses yang sudah ada. Bila hal tersebut menjadi suatu proses sendiri untuk ditransformasikan oleh suatu aksi, maka dikatakan proses itu telah dienkapsulasikan menjadi suatu objek.<sup>89</sup> Jadi, enkapsulasi (*encapsulation*) merupakan suatu transformasi mental dari suatu proses pada suatu objek kognitif, dengan indikasinya seorang individu melakukan refleksi pada penerapan operasi untuk proses tertentu, menjadi sadar terhadap proses secara totalitas bahwa

---

<sup>86</sup> Lasmi Nurdin, *Analisa Pemahaman Siswa SMA...*, hal.14

<sup>87</sup> Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. *APOS: A Constructivist Theory...*, hal. 3

<sup>88</sup> Minanur Rohman. *Analisis Miskonsepsi Siswa...*, hal. 22

<sup>89</sup> Dubinsky, Ed. *Using A Theory of...*, hal.



ternyata transformasi (apakah aksi atau proses) dapat dilakukan dan dikonstruksi secara nyata sebagai transformasi.<sup>90</sup> Contohnya, siswa mampu untuk mencari titik dimana limit fungsi tersebut kontinu di titik  $x = a$ , hanya dengan sketsa grafik fungsi tersebut. Serta mampu menentukan nilai suatu limit fungsi dengan berdasar pada sifat atau teorema yang berlaku.

### **Skema (*Schema*)**

Skema didefinisikan oleh Ed. Dubinsky sebagai berikut:

*A schema for a certain mathematical concept in an individual's collection of actions, processes, objects, and other schemas which are linked by some general principles to form a framework in the individual's mind that may be brought to bear upon a problem situation involving that concept.*<sup>91</sup>

Skema (*Schema*) adalah kumpulan aksi, proses, objek dan mungkin skema lain yang dihubungkan dengan beberapa prinsip umum untuk membentuk kerangka berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan konsep yang dipelajarinya.<sup>92</sup> Konstruksi yang mengaitkan aksi, proses, objek yang terpisah untuk objek tertentu sehingga menghasilkan suatu skema tertentu disebut tematisasi.<sup>93</sup> Contohnya, siswa mampu mencari nilai limit fungsi trigonometri dengan mengintegrasikan, definisi, teorema, dan rumus-rumus limit fungsi, serta pengetahuan tentang konsep trigonometri yang telah mereka dapat sebelumnya.

Kejadian-kejadian kognitif menginteriorisasikan suatu aksi menuju suatu proses, mengenkapsulasikan suatu proses ke dalam suatu objek, dan mentematisasikan suatu objek ke dalam skema dalam kerangka teori ini disebut

---

<sup>90</sup> Maryono, *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa...*, hal. 18

<sup>91</sup> Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. *APOS: A Constructivist Theory...*, hal. 3

<sup>92</sup> Minanur Rohman. *Analisis Miskonsepsi Siswa...*, hal. 22

<sup>93</sup> Ed. Dubinsky, *Using A Theory of...*, hal.

ekuilibrase.<sup>94</sup> Selanjutnya, Zaskis dan Campbell mengungkapkan bahwa kejadian-kejadian kognitif ini dapat dijelaskan dengan baik dalam kerangka teori APO (*Action, Process, Object*). Perbedaan antara aksi dengan proses ditunjukkan oleh kegiatan prosedural dan pemahaman prosedural. Sedangkan perbedaan antara proses dan objek ditunjukkan oleh suatu pemahaman prosedural dan pemahaman konseptual.<sup>95</sup>

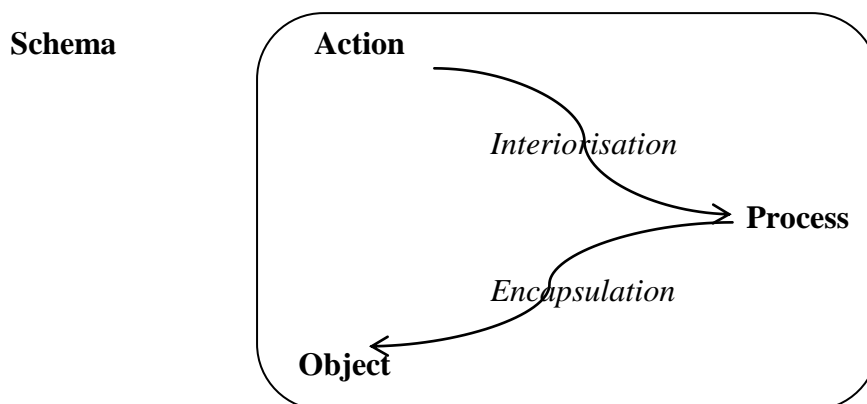
Keempat tahap tersebut tersusun secara hierarkis, artinya siswa harus melewati tahap tertentu untuk naik ke tahap selanjutnya. Hal ini disebabkan setiap pembahasan satu komponen saling berkaitan dengan komponen lainnya secara berurutan. Namun pada kenyataannya, ketika seseorang mengembangkan pemahamannya terhadap suatu konsep matematika, tidaklah selamanya dilakukan secara linear. Misalnya, ketika seseorang dihadapkan pada suatu soal limit fungsi, maka kemungkinan dia tidak mulai dari tahap aksi tetapi mulai dari tahap objek kemudian baru tahap lainnya. Jadi tidak menutup kemungkinan bahwa, jika siswa sudah berada dalam tahap objek atau bahkan skema, maka siswa tersebut mungkin tidak perlu melewati tahap proses. Ini dikarenakan proses-proses transformasi telah terinteriorisasi sempurna ke dalam pikiran siswa.

---

<sup>94</sup> R. Zaskis and Campbell, *Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teacher's Understanding (Journal Mathematics Education)*. 27 (4): 540 – 563

<sup>95</sup> Lasmi Nurdin, *Analisa Pemahaman Siswa SMA Laboratorium...*, hal. 14

Gambar 2.1 menjelaskan secara garis besar bagaimana informasi dikonstruksi oleh siswa.



**Gambar 2.1 Alur Pemerolehan Informasi dalam Teori APOS**

Dalam makalahnya, Dubinsky menulis : *“APOS Theory can be used directly in the analysis of data by a researcher. In very fine grained analysis, the researcher can compare the success or failure of students on a mathematical task with the specific mental construction they may or may not have made,”*<sup>96</sup> Teori APOS ini dapat digunakan untuk menganalisis struktur kognitif siswa dalam memahami suatu konsep.

<sup>96</sup> Ed. Dubinsky & McDonald, M.A. *APOS: A Constructivist Theory of Learning...*, hal. 4

## E. TRIAD PERKEMBANGAN SKEMA

Skema mempunyai peranan yang signifikan dalam Teori APOS untuk mengetahui tingkat pemahaman siswa dalam proses belajar mengajar. Menurut Baker et. al, skema yang baik merupakan koleksi yang koheren dari aksi, proses, objek, dan konstruksi skema sebelumnya yang dikoordinasi dan disintesis oleh seseorang untuk membentuk susunan yang dipakai dalam suatu masalah.<sup>97</sup>

Seseorang dapat menunjukkan koherensi skema dengan mempertajam apa yang termuat dalam skema dan apa yang tidak. Misalnya, siswa memikirkan suatu skema dan merubahnya menjadi suatu objek untuk mewujudkan tindakan-tindakan baru. Melalui transformasi ini, skema bisa berubah menjadi objek. Objek dapat diubah melalui tindakan yang lebih tinggi yang mengarah pada proses, objek, dan skema baru untuk menyusun konsep-konsep baru. Oleh karena itu, perkembangan aksi, proses, dan objek dapat terus dikonstruksi dalam skema yang ada.

Seorang tokoh psikologi perkembangan yaitu Piaget, tertarik untuk mengadakan studi tentang bagaimana individu beradaptasi dengan lingkungannya. Menurutnya, kemampuan individu beradaptasi dengan lingkungannya sangat dipengaruhi oleh struktur mental dan kognitif yang disebut skema. Kemampuan individu beradaptasi itulah yang akan mempermudah perkembangan kognitif seseorang. Berdasarkan ide Piaget tersebut, Dubinsky mengadaptasi menjadi suatu teori perkembangan skema seseorang yang berpusat pada pikiran secara matematis, berupa kerangka kerangka Teori APOS (Aksi, Proses, Objek, Skema).

---

<sup>97</sup> B Baker et. al, A Calculus Graphing Schema. *Journal For Research in Mathematics Education*. 2000. p.31(5): 557 – 558

Selanjutnya, Piaget dan Garcia menyatakan bahwa pengetahuan tumbuh dan berkembang berdasarkan mekanisme tertentu yang meliputi tiga level/tahapan yang disebut *triad*.<sup>98</sup> *Triad* terjadi dalam suatu urutan tetap yang bersifat hirarkis dan fungsional. Urutan tersebut adalah tahap *intra*, tahap *inter*, dan tahap *trans*.

Tahap pertama dari *triad* adalah *intra*. Pada tahap ini, siswa memusatkan perhatian pada suatu aksi atau operasi yang bisa diulang, tetapi kurang mampu menghubungkan aksi dengan dengan suatu sistem keadaan yang membuatnya bisa memperluas aplikasinya. Pada tahap ini, siswa mengenal objek bukan suatu hal yang penting, dan bentuknya mirip dengan bentuk generalisasi sederhana.

Tahap kedua dari *triad* adalah *inter*. Pada tahap ini, siswa menyadari tentang hubungan yang terjadi pada suatu objek dan dapat menyimpulkan berdasarkan suatu operasi awal dengan beberapa pemahaman, dan operasi lain sebagai akibatnya, atau hanya dapat mengkoordinasikan dengan operasi-operasi yang sama. Proses ini membuat siswa dapat mengelompokkan suatu sistem dengan memakai metode yang memerlukan transformasi baru.

Tahap kedua dari *triad* adalah *trans*. Pada tahap ini, siswa dapat menyusun suatu kesadaran untuk menyempurnakan suatu skema dan mampu mencapai sifat-sifat global baru yang tidak bisa diakses pada tahap lainnya. Pada tahap ini, siswa mempunyai kemampuan mengkonstruksi seluruh struktur yang ditemukan (aksi, proses, objek, dan skema lainnya) saling terkait dan membentuk suatu skema yang koheren.

---

<sup>98</sup> *Ibid...*, hal.565

Selanjutnya, Piaget dan Garcia menghipotesiskan juga bahwa tahap-tahap dari *triad*, dapat ditemukan apabila seseorang menganalisa suatu perkembangan skema. Tingkat perkembangan skema dapat ditentukan melalui analisis dekomposisi genetik berdasarkan Teori APOS. Menurut Dubinsky, Teori APOS dapat digunakan untuk mendeskripsikan perkembangan skema seseorang pada suatu topik matematika sebagai totalitas dari pengetahuan yang terkait (secara sadar atau tak sadar) untuk topik tersebut.<sup>99</sup> Sehingga dapat dikatakan bahwa, perkembangan skema seseorang terhadap suatu topik matematika dapat ditentukan dengan berdasarkan Teori APOS. Selanjutnya, perkembangan skema ini dianalisis untuk mengetahui tahap-tahap dari *triad* perkembangan skema seseorang.

Menurut Dubinsky, perkembangan skema siswa pada tahap *intra* diindikasikan dengan adanya kemampuan untuk menginteriorisasikan suatu aksi menuju proses.<sup>100</sup> Misalnya, pada skema limit fungsi, siswa dapat menafsirkan cara yang harus ditempuh dalam mencari nilai suatu limit fungsi sesuai dengan ciri-cirinya. Siswa dapat menentukan alternatif menjawab dengan cara substitusi langsung, difaktorkan ataupun dikalikan dengan sekawannya.

Pada tahap *inter*, Dubinsky memandang bahwa perkembangan skema menunjukkan kemampuan siswa untuk mengenkapsulasikan suatu proses ke objek.<sup>101</sup> Pada tahap *inter*, siswa mampu mengkoordinasikan limit fungsi dengan melihat limit sebagai suatu objek atau menggunakan definisi, dan sifat-sifat

---

<sup>99</sup> Ed. Dubinsky, *Using A Theory of...*, hal.11

<sup>100</sup> R. Zazkis and S. Campbell. *Multiplicative Structure of Natural Number: Preservice Teacher's Understanding*, (Journal For Research in Mathematics Education, 1996).p.556

<sup>101</sup> Ibid..., p.556

(teorema) yang berlaku dalam limit fungsi dalam menentukan nilai dari suatu limit fungsi.

Sedangkan pada tahap *trans*, Dubinsky memandang perkembangan skema siswa sebagai kemampuan siswa untuk mentematisasikan objek ke skema. Misalnya, siswa dapat menentukan hubungan limit fungsi yang diketahui tersebut sesuai dengan bentuknya dan dapat memilih metode pengerjaan yang tepat. Siswa juga mampu mengaitkan konsep limit fungsi dengan konsep aljabar, trigonometri, akar dan pangkat, serta mengkaitkan dengan konsep suku banyak, ataupun konsep matematika lain.

Pada setiap tahapan dari *triad*, siswa menyusun pengetahuan yang didapat selama tahap sebelumnya. Namun, karena sifat setiap tahap dari *triad* adalah fungsional (bukan struktural), berarti ketika siswa dihadapkan pada suatu permasalahan matematika skema siswa tidak harus berkembang dari tahap terendah. Jadi dalam proses belajar, siswa akan mengembangkan skema yang mungkin berbeda sehingga perkembangan masing-masing skema akan dapat dipetakan ke salah satu tahap dari *triad*.

## **F. ANALISIS DEKOMPOSISI GENETIK PERKEMBANGAN KONSEP LIMIT FUNGSI**

Teori APOS dapat digunakan secara langsung dalam menganalisis data oleh seorang peneliti.<sup>102</sup> Melalui analisa berdasarkan teori ini peneliti dapat membandingkan keberhasilan atau kegagalan subjek dalam mengerjakan suatu

---

<sup>102</sup> *Ibid...*, hal.

tugas matematika melalui konstruksi mental tertentu. Menurut Dubinsky, pengetahuan matematika seseorang merupakan kecenderungan untuk merespon dan memahami situasi permasalahan tentang matematika dengan melakukan refleksi dalam konteks sosial dan merekonstruksi aksi, proses, dan objek matematika serta mengorganisasikannya dalam suatu skema.<sup>103</sup>

Dalam belajar matematika, siswa akan dihadapkan dengan konsep-konsep matematika, oleh karena itu konstruksi mental aksi, proses, dan objek merupakan unsur mutlak yang harus diperhatikan oleh peneliti. Deskripsi yang dihasilkan dari analisis konsep dalam konstruk tersebut disebut dekomposisi genetik dari konsep.<sup>104</sup> Sedangkan Asiala et. al. menyatakan, analisis dekomposisi genetik adalah suatu analisis terhadap kumpulan terstruktur dari aktifitas mental aksi, proses, dan objek yang dilakukan seseorang untuk mendeskripsikan bagaimana konsep/prinsip matematika dapat dikembangkan dalam pikiran seseorang. Jadi analisis dekomposisi genetik merupakan suatu analisis terhadap dekomposisi genetik dalam merespon suatu masalah matematika dengan berdasarkan pada kerangka kerja Teori APOS.

Berdasarkan kajian teoritis yang telah dikemukakan di atas, maka analisis dekomposisi genetik dalam penelitian ini diartikan sebagai analisis terhadap pemahaman siswa dalam merespon suatu masalah limit fungsi dengan berdasarkan pada Teori APOS. Selanjutnya tahap-tahap *triad* dari Piaget dan Garcia digunakan dalam menganalisis tingkat pemahaman siswa tentang konsep limit fungsi.

---

<sup>103</sup> Ed Dubinsky. *Using A Theory of...*, hal

<sup>104</sup> Ed Dubinsky & Yiparaki. *Predicate Calculus and The Mathematical Thinking of Student*. <http://www.cs.cornell.edu/info/people/gries/symposium/dubinsky.htm>, diakses .....



Berikut ini akan diberikan gambaran secara singkat aplikasi kerangka kerja Teori APOS dengan analisis dekomposisi genetik yang dipadukan dengan tahap-tahap *triad* dari Piaget dan Garcia pada konsep limit fungsi.

### 1). Aksi

Aksi adalah aktifitas berupa pengulangan fisik atau manipulasi mental dengan mentransformasikan objek matematika melalui beberapa cara atau aktifitas yang mendasarkan pada beberapa algoritma secara eksplisit. Misalkan, diajukan suatu soal, “Hitunglah nilai limit fungsi dari  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$  “. Maka aksi yang dilakukan siswa terhadap soal tersebut adalah sebagai berikut: melakukan

kegiatan mensubstitusikan nilai  $x = a$  ke fungsi  $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$  sehingga didapatkan

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{0}{0}$$

Jadi siswa menentukan nilai suatu limit fungsi hanya

dengan mensubstitusikan suatu nilai ke dalam suatu fungsi yang diketahui,

sehingga dapat ditentukan bahwa nilai  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{0}{0}$ , siswa yang masih berada

pada tahap aksi bisa saja menganggap bahwa hasil limitnya adalah 0 karena mereka belum menginternalisasi metode-metode limit fungsi.

### 2). Interiorisasi: dari Aksi ke Proses

Interiorisasi merupakan perubahan aktifitas prosedural menuju konstruksi mental pada proses internal yang relatif untuk sederetan aksi pada objek kognitif yang dapat dilakukan atau dibayangkan untuk dilakukan dalam pikiran tanpa mengerjakan semua tahapan-tahapan pekerjaan. Perubahan itu digunakan untuk

membedakan suatu aksi ke proses, yaitu kegiatan menentukan nilai limit fungsi pada suatu titik tertentu yang diinteriorisasikan sebagai suatu proses dimana aksi itu akan dilaksanakan, tetapi tidak benar-benar dilaksanakan. Misalnya, Hitunglah

nilai  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \dots$  dalam menginteriorisasikan pencarian nilai dari limit

fungsi tersebut siswa tidak perlu melakukan aksi, tetapi siswa terlebih dahulu mengecek hasil nilai fungsi secara substitusi langsung hanya dalam imajinasi. Substitusi ini digunakan untuk menentukan, apakah nilai limit dapat didefinisikan ataukah tidak. Apabila tidak terdefinisi dengan substitusi langsung, maka dengan berdasarkan ciri-cirinya diperlukan sebuah metode penyelesaian yang lain.

Apabila siswa sudah mampu menceritakan, menjelaskan dan memutuskan limit fungsi ini bisa dicari penyelesaiannya dengan substitusi langsung atau tidak, dan mampu memilih dan menggunakan metode yang tepat untuk mencari nilai limit fungsinya maka tingkat pemahaman siswa tersebut berada pada tahap *intra*.

### 3). Enkapsulasi: dari Proses ke Objek

Jika suatu proses dapat ditransformasikan oleh suatu aksi, maka dikatakan proses itu telah dienkapsulasikan menjadi objek. Enkapsulasi proses tentang limit fungsi ditunjukkan dengan kemampuan mahasiswa berpikir untuk menentukan nilai suatu limit fungsi dengan berdasarkan pada sifat-sifat limit fungsi, dan dapat mendefinisikan limit fungsi, serta dapat mengenali karakteristik masing-masing limit fungsi sehingga mampu menetapkan metode penyelesaian yang tepat.

Misalnya, Hitunglah nilai  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ , siswa yang telah

mengkapsulasikan limit fungsi sebagai objek dapat menjelaskan bahwa nilai

limit fungsi diatas tidak bisa ditentukan dengan substitusi langsung, karena hasilnya  $\frac{0}{0}$  maka dengan melihat karakteristik dari fungsinya, fungsi tersebut harus dikalikan dengan sekawannya atau harus difaktorkan. Dalam hal ini diperlukan kecakapan siswa dalam memahami definisi, teorema-teorema, sifat-sifat, dan karakteristik masing-masing bentuk limit. Pada tahap ini mereka tak hanya mampu melakukan perhitungan-perhitungan dengan benar akan tetapi mereka juga harus mampu menjelaskan tiap langkah pengerjaannya dengan alasan yang berdasar.

Apabila siswa mampu menentukan nilai dari suatu limit fungsi dengan cara memanfaatkan definisi, teorema, dan sifat yang ada pada limit fungsi serta mampu menggunakan metode penyelesaian yang tepat, maka tingkat pemahaman siswa berada pada tahap *inter*.

#### 4). Skema

Tematisasi merupakan konstruksi yang mengkaitkan aksi, proses, dan objek yang terpisah untuk suatu objek tertentu sehingga menghasilkan suatu skema. Tematisasi limit sebagai suatu skema melibatkan hubungan khusus antara konsep fungsi, aljabar, trigonometri, dan suku banyak. Seorang siswa dikatakan dapat mentematisasikan limit sebagai suatu skema, jika dapat menentukan nilai suatu limit dengan mengaitkannya dengan konsep fungsi, aljabar, trigonometri, turunan, suku banyak, ataupun konsep matematika yang lain..

Misalnya, hitung nilai  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$  dalam menentukan nilai limit fungsi

tersebut siswa dapat menggunakan aturan pada teorema d'Hopital. Dalam hal ini

berarti siswa mengaitkan konsep limit fungsi dengan konsep turunan. Atau pada soal  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2}$  berikut, apabila dalam menyelesaikan soal tersebut siswa sudah mampu memandang dan menjelaskan bahwa ada beberapa konsep matematika lain dan juga terdapat beberapa teorema yang membangun hingga sampai pada hasil nilai limit akhirnya.

Apabila siswa dapat mengkaitkan hubungan antara konsep limit fungsi dengan objek-objek yang lain (aljabar, trigonometri, suku banyak, turunan, dll), maka tingkat pemahaman siswa berada pada tahap *inter*.

## G. GAYA KOGNITIF

Pendidikan sangat erat kaitannya dengan psikologi, karena pendidikan berhubungan dengan kejiwaan manusia.<sup>105</sup> Para psikolog telah melihat suatu perbedaan pada cara-cara orang memproses dan memanfaatkan lingkungannya yang dapat berpengaruh terhadap hasil belajar siswa di sekolah.<sup>106</sup> Perbedaan tersebut muncul karena dalam proses pendidikan siswa bertindak sebagai individu. Sehingga, segala aktivitas, proses, dan hasil perkembangan pendidikan siswa dipengaruhi oleh karakter siswa sebagai individu. Salah satu karakter siswa yang membedakan antara satu dengan yang lain adalah gaya kognitif.

Gaya kognitif merupakan salah satu bagian yang dibahas dalam psikologi pendidikan yaitu merupakan salah satu variabel kondisi belajar yang menjadi salah satu bahan pertimbangan dalam merancang pembelajaran. Pengetahuan

---

<sup>105</sup> Siti Malikhah, *Pengaruh Gaya Kognitif Peserta Didik...*, hal. 14

<sup>106</sup> Abdul Rahman, *Profil Pengajaran Masalah Matematika Berdasarkan Gaya Kognitif siswa.*, (Surabaya: Universitas Negeri surabaya, 2009, Disertasi tidak diterbitkan), hal. 40

tentang gaya kognitif dibutuhkan untuk merancang atau memodifikasi materi pembelajaran, tujuan pembelajaran, serta metode pembelajaran. Diharapkan dengan adanya interaksi dari faktor gaya kognitif, tujuan, materi, serta metode pembelajaran, hasil belajar siswa dapat dicapai semaksimal mungkin.<sup>107</sup>

Hamzah mengutip beberapa batasan mengenai gaya kognitif yang dikemukakan oleh beberapa ahli diantaranya, Witkin mengemukakan bahwa gaya kognitif merupakan ciri khas siswa dalam belajar. Sedangkan Messich, mengemukakan bahwa gaya kognitif merupakan kebiasaan seseorang dalam memproses informasi. Sementara Keefe mengemukakan bahwa gaya kognitif merupakan bagian dari gaya belajar yang relatif tetap dalam diri seseorang dalam menerima, memikirkan, memecahkan masalah maupun dalam menyimpan informasi.

Ahli lain seperti Ausburn merumuskan bahwa gaya kognitif mengacu pada proses kognitif seseorang yang berhubungan dengan pemahaman, pengetahuan, persepsi, pikiran, imajinasi, dan pemecahan masalah.<sup>108</sup> Tood menyatakan bahwa gaya kognitif adalah langkah individu dalam memproses informasi melalui strategi responsif atas tugas yang diterima.<sup>109</sup> Selanjutnya, menurut Woolfolk bahwa gaya kognitif seseorang dapat memperlihatkan variasi individu dalam hal perhatian, penerimaan informasi, mengingat, dan berpikir yang muncul atau berbeda di antara kognisi dan kepribadian.<sup>110</sup>

---

<sup>107</sup> Hamzah B. Uno. *Orientasi Baru dalam Psikologi...*, hal. 185

<sup>108</sup> *Ibid...*, hal. 186

<sup>109</sup> *Ibid...*,

<sup>110</sup> *Ibid...*, hal.187

Berdasarkan pendapat-pendapat di atas dapat disimpulkan bahwa gaya kognitif adalah karakteristik individu dalam berpikir, memahami, memecahkan masalah, memproses informasi, dan membuat keputusan untuk menanggapi suatu tugas. Gaya kognitif tersebut relatif tetap (cenderung stabil) dalam diri seseorang meskipun belum tentu tidak dapat berubah.<sup>111</sup>

Gaya kognitif merujuk pada cara seseorang untuk memperoleh informasi dan menggunakan strategi untuk merespon suatu tugas. Disebut sebagai gaya dan tidak sebagai kemampuan karena merujuk pada bagaimana seseorang memproses informasi dan memecahkan masalah, dan bukan merujuk pada bagaimana cara yang terbaik. Jika gaya kognitif seseorang cenderung ke salah satu kutub, bukan berarti kemampuannya tinggi atau rendah dalam keseluruhan masalah. Dengan kata lain, masing-masing gaya kognitif terdapat kelebihan dan kekurangan.

Ada banyak macam tentang gaya kognitif yang diidentifikasi oleh Siegel & Coop antara lain: (a) mengutamakan perhatian global *versus* perhatian detail (bagian); (b) membedakan suatu stimulus ke dalam kategori yang lebih besar *versus* kategori bagian-bagian kecil yang banyak; (c) kecenderungan mengklasifikasikan item berdasarkan karakteristik yang nampak seperti kesamaan fungsi, waktu, atau ruang *versus* memilih kesamaan dari beberapa atribut abstrak; (d) cepat, impulsive *versus* lambat, tingkah laku pemecahan masalah serius/sungguh-sungguh; (e) intuitif, induktif *versus* kognitif logic, kognitif deduktif.<sup>112</sup>

---

<sup>111</sup> Siti Malikhah, *Pengaruh Gaya Kognitif Peserta Didik...*, hal. 17

<sup>112</sup> Abdul Rahman, *profil Pengajaran Masalah Matematika...*, hal. 43

Sedangkan Woolfolk menjelaskan bahwa banyak variasi gaya kognitif yang diminati para pendidik, dan mereka membedakan gaya kognitif berdasarkan dimensi, yakni (a) perbedaan aspek psikologis, yang terdiri dari *field dependence* (FD) dan *field independence* (FI); (b) perbedaan *conceptual tempo*, terdiri dari gaya *impulsive* dan gaya *reflective*.<sup>113</sup>

Berdasarkan berbagai macam pembagian gaya kognitif yang telah disebutkan di atas, peneliti akan menguraikan lebih lanjut mengenai pembagian gaya kognitif berdasarkan aspek psikologis yaitu gaya kognitif *field dependent* (FD) dan *field independent* (FI). Hal ini karena, peneliti membatasi penelitian ini pada bidang gaya kognitif tersebut.

Witkin mendefinisikan gaya kognitif *field dependence* dan *field independence* sebagai berikut:

*“The extent to which a person is able to deal with a part of a separately from the field as a whole, or the extent to which he [sic] is able to disembed items from organized context or, to put it everyday language, determine show analytical he [sic] is. Because at one extreme of the performance range perception is strongly dominated by the surrounding field, we speak of that mode as ‘field dependent’. For the other extreme, where the person is able to deal with an item independently of the surrounding field, we use designation ‘field independent’.”*<sup>114</sup>

Seseorang yang mampu menghubungkan bidang yang terpisah dari bidang secara keseluruhan, atau seseorang yang mampu memisahkan materi (bagian) dari keadaan yang terorganisasi, ditetapkan sebagai orang yang analitis. Seseorang yang melihat bahwa sesuatu itu didominasi bidang secara keseluruhan dikatakan bergaya *field dependent*, sedangkan seseorang yang mampu melihat bidang-

<sup>113</sup> Hamzah B. Uno. *Orientasi Baru dalam Psikologi...*, hal. 187

<sup>114</sup> Gregory A. Davis, *The Relationship Between Learning Style and Personality Type of Extension Community Development Program Professional at the Ohio State University*, (Amerika Serikat: Disertasi, 2004), hal. 29

bidang secara terpisah dari bidang secara keseluruhan dikatakan bergaya *field independent*.<sup>115</sup>

Witkin dalam Saptari mengklasifikasikan beberapa karakteristik individu yang memiliki gaya kognitif *field dependent* sebagai berikut:

- a. Cenderung berpikir global, memandang objek sebagai satu kesatuan dengan lingkungannya, sehingga persepsinya mudah terpengaruh oleh perubahan lingkungan.
- b. Cenderung menerima struktur yang sudah ada karena kurang memiliki kemampuan untuk merestrukturisasi.
- c. Memiliki orientasi sosial sehingga tampak baik hati, ramah, bijaksana, baik budi, dan penuh kasih sayang terhadap individu lain.
- d. Cenderung memilih profesi yang menekankan pada keterampilan sosial.
- e. Cenderung mengikuti tujuan yang sudah ada.
- f. Cenderung bekerja dengan mengutamakan motivasi eksternal dan lebih tertarik pada penguatan eksternal, berupa hadiah, pujian atau dorongan dari orang lain.

Sedangkan menurut Witkin karakteristik individu yang memiliki gaya kognitif *field independent* sebagai berikut:

- a. Memiliki kemampuan menganalisis untuk memisahkan objek dari lingkungan sekitar, sehingga persepsinya tidak terpengaruh bila lingkungan mengalami perubahan.

---

<sup>115</sup> Siti Malikhah, *Pengaruh Gaya Kognitif Peserta Didik...*, hal. 22



- b. Mempunyai kemampuan mengorganisasikan objek-objek yang belum terorganisir dan mereorganisir objek-objek yang sudah terorganisir.
- c. Cenderung kurang sensitif, dingin, menjaga jarak dengan orang lain, dan individualistis.
- d. Memilih profesi yang bisa dilakukan secara individu dengan materi lebih abstrak atau memerlukan teori dan analisis.
- e. Cenderung mendefinisikan tujuan sendiri.
- f. Cenderung bekerja dengan mementingkan motivasi intrinsik dan dipengaruhi oleh penguatan intrinsik.

Untuk mempermudah membandingkan kedua tipe ini Nasution membentuk suatu bagan sebagai berikut:<sup>116</sup>

**Tabel 2.1 Perbandingan Gaya Kognitif Field Dependent dan Field Independent menurut Nasution**

<b>Gaya Kognitif</b>	
<i>Field Dependent</i>	<i>Field Independent</i>
1. Sangat dipengaruhi oleh lingkungan, banyak bergantung pada pendidikan waktu kecil;	1. Kurang dipengaruhi oleh lingkungan dan oleh pendidik di masa lampau;
2. Dididik untuk selalu memperhatikan orang lain;	2. Dididik untuk berdiri sendiri dan mempunyai otonomi atas tindakannya;
3. Mengingat hal-hal dalam konteks sosial;	3. Tidak peduli akan norma-norma orang lain;
4. Bicara lambat agar dapat dipahami orang lain;	4. Berbicara cepat tanpa menghiraukan daya tangkap orang lain;
5. Mempunyai hubungan sosial yang cukup luas; cocok untuk bekerja dalam bidang guidance, counseling, pendidikan, dan sosial;	5. Kurang mementingkan hubungan sosial; sesuai untuk jabatan dalam bidang matematika, science, dan insinyur;
6. Lebih banyak terdapat dikalangan wanita;	6. Banyak pria, namun banyak yang overlapping;

<sup>116</sup> Nasution, *Berbagai Pendekatan dalam Proses Belajar Mengajar*, (Jakarta: Bumi Aksara, 2006), hal. 95-96

7. Tidak senang pelajaran matematika, lebih menyukai bidang-bidang humanitas dan ilmu-ilmu sosial;	7. Dapat juga menghargai humanitas dan ilmu-ilmu sosial, walaupun lebih cenderung kepada matematika dan ilmu pengetahuan alam;
8. Memerlukan petunjuk yang lebih banyak untuk memahami sesuatu, bahan hendaknya tersusun langkah demi langkah.	8. Tidak memerlukan petunjuk yang terperinci.

Woolfolk dan Lorraine mengklasifikasikan karakter pembelajaran peserta didik pada wilayah dependen dan independen berdasarkan hasil adaptasi dari H. A. Witkin, C.A. Goodenough, dan R. W. Cox, *Field Dependent dan Field Independent Cognitive Style and Their Educational implications*, Review of Educational Research, 1977, 47, 17-27@ 1977, AERA, Washington D. C., adalah sebagai berikut;<sup>117</sup>

**Tabel 2.2 Keterangan Pembelajaran Siswa pada Wilayah Dependen dan Independen**

Wilayah	
Dependen	Independen
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lebih baik pada materi pembelajaran dengan muatan sosial</li> <li>• Memiliki ingatan lebih baik untuk informasi sosial</li> <li>• Memerlukan struktur, tujuan, dan penguatan yang didefinisikan secara jelas</li> <li>• Lebih terpengaruh kritik</li> <li>• Memiliki kesulitan besar untuk mempelajari materi tak terstruktur</li> <li>• Mungkin perlu diajarkan bagaimana menggunakan mnemonik</li> <li>• Cenderung menerima organisasi yang diberikan dan tidak mampu mengorganisir kembali</li> <li>• Mungkin memerlukan instruksi lebih jelas mengenai bagaimana memecahkan masalah.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mungkin memerlukan bantuan menfokuskan perhatian pada materi dengan muatan sosial</li> <li>• Mungkin perlu diajarkan bagaimana menggunakan konteks untuk memahami informasi sosial</li> <li>• Cenderung memiliki tujuan diri yang terdefiniskan dan penguatan</li> <li>• Tidak terpengaruh kritik</li> <li>• Dapat mengembangkan strukturnya sendiri pada situasi tak terstruktur</li> <li>• Biasanya lebih mampu memecahkan masalah tanpa instruksi dan bimbingan eksplisit.</li> </ul>

<sup>117</sup> Woolfolk & Lorraine, *Educational Psikology for Teachers*, terj. M. Khairul Anam, (Jakarta: Inisiasi Press, 2004), hal. 197

Daniels merangkum kecenderungan umum *field dependent* dan *field independent* sebagai berikut:

**Tabel 2.3 Perbedaan Umum *Field Dependent* dan *Field Independent***

<b>Gaya Kognitif</b>	
<i>Field Dependent</i>	<i>Field Independent</i>
1. Tergantung pada bidang persepsi di sekitarnya;	1. Memandang objek terpisah dari bidangnya;
2. Mengalami kesulitan menggali dan menggunakan isyarat yang tidak menonjol;	2. Mampu menyembunyikan item relevan dari item-item yang tidak relevan dalam bidangnya;
3. Mengalami kesulitan membuat struktur informasi yang ambigu (rancu);	3. Melengkapi struktur bila tidak sesuai dengan informasi yang disajikan;
4. Mengalami kesulitan membatasi informasi baru dan meningkatkan hubungan dengan pengetahuan awal;	4. Menyusun ulang informasi untuk menciptakan konteks pada pengetahuan awal;
5. Mengalami kesulitan mengambil informasi dan memori jangka panjang atau sebaliknya.	5. Cenderung lebih efisien dalam mengambil item pada daya ingatan.

## H. PEMAHAMAN SISWA DITINJAU DARI GAYA KOGNITIF

Kemampuan seseorang untuk memahami dan menyerap pelajaran sudah pasti berbeda tingkatannya. Ada yang cepat, sedang, dan ada pula yang sangat lambat. Oleh karena itu, mereka seringkali harus menempuh cara yang berbeda untuk bisa memahami sebuah informasi atau pelajaran yang sama.<sup>118</sup> Cara siswa yang khas dalam belajar, baik yang berkaitan dengan cara penerimaan dan pengolahan informasi, sikap terhadap informasi, maupun kebiasaan yang berhubungan dengan lingkungan belajar itulah yang dimaksud dengan gaya kognitif.<sup>119</sup>

<sup>118</sup> Hamzah B. Uno, *Orientasi Baru dalam Psikologi...*, hal. 180

<sup>119</sup> *Ibid...*, hal. 185

Gaya kognitif merupakan salah satu variabel kondisi belajar yang menjadi salah satu bahan pertimbangan dalam merancang pembelajaran.<sup>120</sup> Dengan memperhatikan gaya kognitif siswa diharapkan guru mampu merancang pembelajaran yang efektif dan dapat diterima oleh struktur mental siswanya, dengan kata lain siswa memahami pelajaran yang disampaikan.

Menurut Coop gaya kognitif mengacu pada kekonsistenan pola (patterning) yang ditampilkan seseorang dalam merespons berbagai situasi. Juga mengacu pada pendekatan intelektual dan atau strategi dalam menyelesaikan masalah. Sedangkan menurut Kogan, gaya kognitif adalah variasi individu dalam cara memandang, mengingat, dan berpikir atau sebagai cara tersendiri dalam hal memahami, menyimpan, mentransformasi, dan menggunakan informasi.<sup>121</sup>

Merujuk pada pendapat di atas, maka dalam pemahaman ataupun penyelesaian masalah (soal) bisa berbeda antara siswa yang satu dengan yang lainnya. Hal ini disebabkan adanya perbedaan gaya kognitif yang mereka miliki. Gaya kognitif merujuk pada cara memperoleh informasi dan menggunakan strategi untuk merespon suatu tugas. Siswa memiliki cara tersendiri dalam menyusun jawaban dan menunjukkan tingkat pemahamannya dari suatu masalah (situasi) yang diberikan bergantung dengan apa yang dilihat, diingat dan dipikirkan.

Perbedaan-perbedaan individual yang menetap dalam menyusun dan mengolah informasi serta pengalaman-pengalaman yang mereka miliki banyak

---

<sup>120</sup> *Ibid...*, hal. 185

<sup>121</sup> Abdul Rahman, *Profil Pengajaran Masalah Matematika...*, hal. 54.

terpengaruh oleh gaya kognitifnya.<sup>122</sup> Selanjutnya menurut Good & Brophy orang yang diferensiasi psikologikal rendah (*field dependent*), mengalami kesulitan dalam membedakan stimulus dari konteks dimana stimuli tersebut diletakkan (digabungkan), sehingga persepsi mereka mudah dipengaruhi oleh manipulasi dari konteks sekelilingnya. Sedangkan orang dengan diferensiasi psikologi tinggi (*field independent*) lebih analitik. Mereka dapat memisahkan stimuli dari konteks, sehingga persepsi mereka kurang terpengaruh dari perubahan dalam konteks terjadi (dimasukkan).<sup>123</sup>

Selanjutnya Witkin, mengatakan bahwa: “orang yang bergaya kognitif ‘*field independent*’ lebih suka memisahkan bagian-bagian dari sejumlah pola dan menganalisis pola berdasarkan komponen-komponennya, sedangkan orang yang bergaya kognitif ‘*field dependent*’ cenderung memandang suatu pola sebagai keseluruhan, tidak memisahkan ke dalam bagian-bagiannya.”<sup>124</sup>

Oleh karena dalam belajar materi limit fungsi memerlukan kemampuan analitis, kemampuan matematika, dan kemampuan melakukan pempolaan (*patterning*/bentuk struktur yang tetap/cara kerja/sistem), maka ada kemungkinan antara siswa bergaya kognitif *field dependent* dan siswa bergaya kognitif *field independent* memiliki tingkat pemahaman dan strategi kognitif yang berbeda pula.

---

<sup>122</sup> Abdul Rahman, *Profil Pengajaran Masalah...*, hal.57

<sup>123</sup> *Ibid...*, hal.58

<sup>124</sup> *Ibid...*, hal.58

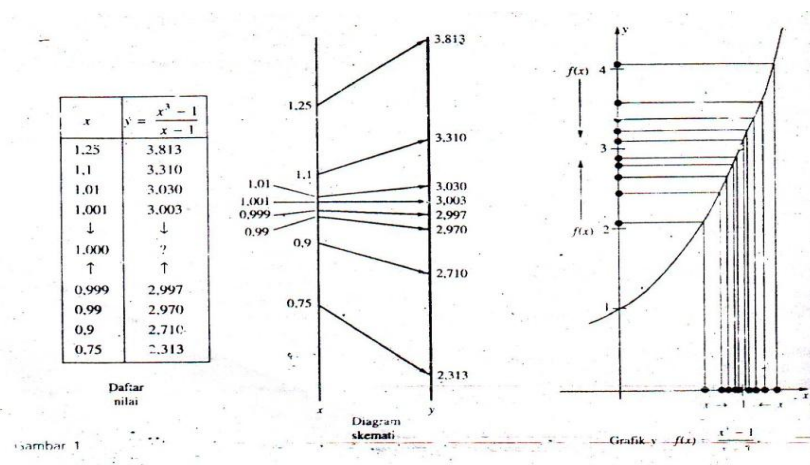
## I. MATERI LIMIT FUNGSI

Gagasan tentang *limit* inilah yang membedakan kalkulus dari cabang matematika lainnya, karena kalkulus dapat didefinisikan sebagai pengkajian tentang limit.<sup>125</sup>

**Pemahaman Intuitif.** Tinjaulah fungsi yang ditentukan oleh:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Perhatikan bahwa fungsi tersebut tidak terdefinisi pada  $x = 1$ , karena di titik ini  $f(x)$  berbentuk  $\frac{0}{0}$ , yang tidak ada artinya. Tetapi kita masih dapat menanyakan apa yang terjadi pada  $f(x)$  bilamana  $x$  mendekati 1? Untuk sampai pada jawabannya, kita dapat melakukan tiga hal. Kita dapat menghitung beberapa nilai  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati 1, kita dapat menunjukkan nilai-nilai ini dalam suatu diagram skematis, dan kita dapat membuat sketsa grafik  $y = f(x)$ . Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.1 di bawah ini:



**Gambar 2.2 Diagram Skematis Fungsi**

<sup>125</sup> Purcell et. al, *Calculus 8<sup>th</sup> Edition*, (Prentice Hall, Inc. 2003), terj. I Nyoman Susila, (Jakarta: Erlangga, 2003), hal. 64

Semua informasi yang telah disusun tersebut terlihat akan menuju pada kesimpulan yang sama yaitu  $f(x)$  mendekati 3 saat  $x$  mendekati 1. Dalam lambang matematis dituliskan:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ . Ini dibaca “limit  $(x^3 - 1)/(x - 1)$  untuk  $x$  mendekati 1 adalah 3”.

### I. Pengertian Limit Fungsi di Suatu Titik dan di Tak Hingga

Secara intuitif limit dapat didefinisikan sebagai berikut:<sup>126</sup>

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  artinya bilamana  $x$  dekat tetapi berlainan dari  $a$  ( $x \neq a$ ), maka  $f(x)$  dekat dengan  $L$ .

Dari definisi tersebut dapat dipahami bahwa tidak ada yang mensyaratkan bahwa  $x$  harus tepat di  $a$ . Pemikiran tentang limit dihubungkan dengan perilaku suatu fungsi **dekat**  $a$ , bukannya di  $a$ .

#### a) Sifat – Sifat Limit Fungsi (Teorema Limit Fungsi)

Apabila  $k$  suatu konstanta,  $f$  dan  $g$  merupakan fungsi-fungsi yang mempunyai limit untuk  $x \rightarrow a$ ,  $a \in R$  maka berlaku :

- a.  $\lim_{x \rightarrow a} k = k$
- b.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- c.  $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- d.  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- e.  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

---

<sup>126</sup> *Ibid...*, hal. 64

$$f. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ untuk } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

$$g. \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$$

Untuk lebih memahami tentang sifat-sifat limit fungsi, pelajarilah contoh soal berikut. Dalam contoh berikut, huruf abjad yang dilingkari mengacu pada pernyataan-pernyataan beberapa sifat/teorema limit yang telah diberikan di atas tadi.

Contoh soal : Carilah  $\lim_{x \rightarrow 3} 2x^4$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2x^4 = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x^4 = 2 \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow 3} x \right]^4 = 2[3]^4 = 162$$

(c)
(g)
(b)

### b) Limit Fungsi di Tak Berhingga

Diketahui  $f(x) = \frac{2}{x}$ . Jika dibuat tabel untuk  $x$  bilangan sebagai berikut :

$X$	1	2	3	4	....	10	....	100	....	200	....
$f(x)$	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	....	$\frac{1}{5}$	....	$\frac{1}{50}$	....	$\frac{1}{1000}$	....

Apabila nilai  $x$  makin besar, ternyata nilai  $f(x)$  makin lama makin kecil.

Apabila  $x$  besar sekali atau  $x$  mendekati tak berhingga, ditulis  $x \rightarrow \infty$ , maka nilai



$\frac{2}{x}$  akan mendekati nol, dikatakan limit dari  $\frac{2}{x}$  untuk  $x$  mendekati tak berhingga

adalah nol dan ditulis :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

Sekarang perhatikan contoh berikut ini :

Hitunglah  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1}$

Untuk menjawab limit tersebut, dapat dicoba dengan tabel berikut ini :

$X$	1	2	3	....	10	....	100	....	1.000	....
$\frac{2x}{x+1}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	....	$\frac{20}{11}$	....	$\frac{200}{101}$	....	$\frac{2.000}{1.001}$	....

Apabila  $x$  menjadi semakin besar, maka nilai  $\frac{2x}{x+1}$  akan mendekati 2.

Dikatakan bahwa  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$

Limit fungsi yang berbentuk  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  dapat diselesaikan dengan cara membagi

bagian pembilang  $f(x)$  dan bagian penyebut  $g(x)$  dengan  $x^n$ ,  $n$  adalah pangkat tertinggi dari  $f(x)$  atau  $g(x)$  untuk setiap  $n$  bilangan positif dan  $a$  untuk bilangan real, maka :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

Dari contoh itu dapat ditulis :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x+1}{x}} \quad (\text{pembilang, penyebut dibagi } x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} \quad \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \right) \\ &= \frac{2}{1+0} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

Cara mudah menafsirkan nilai limit fungsi dari  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  adalah sebagai

berikut :

1. Jika derajat dari pembilang  $f(x)$  lebih besar daripada derajat penyebut

$$g(x), \text{ maka nilai } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

2. Jika derajat dari pembilang  $f(x)$  sama dengan derajat penyebut  $g(x)$ ,

$$\text{maka nilai } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{real}$$

3. Jika derajat dari pembilang  $f(x)$  lebih kecil daripada derajat penyebut

$$g(x), \text{ maka nilai } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

## II. Sifat Limit Fungsi untuk Menghitung Bentuk Tak Tentu Fungsi Aljabar dan Trigonometri

### a) Menghitung Limit Fungsi Aljabar

#### 1. Limit fungsi $f(x)$ untuk $x$ mendekati $a$

Langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

adalah:

#### 1) Menentukan nilai limit $f(x)$ dengan mensubstitusikan nilai $x = a$ pada

$f(x)$ . Dengan demikian diperoleh:

(a) Jika  $f(a) = C$ , maka nilai  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = C$

(b) Jika  $f(a) = \frac{C}{0}$ , maka nilai  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{C}{0} = \infty$

(c) Jika  $f(a) = \frac{0}{C}$ , maka nilai  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{0}{C} = 0$

(d) Jika  $f(a) = \frac{0}{0}$ , maka harus mengubah bentuk  $f(x)$  hingga

menjadi bentuk **(a)**, **(b)**, **atau (c)** dengan jalan menggunakan metode lain yaitu (lanjut ke langkah (2)).

#### 2) Faktorkan bentuk $f(x)$ sehingga $f(a) \neq \frac{0}{0}$ , kemudian disubstitusikan

lagi jika tidak bisa teruskan ke langkah (3)

#### 3) Bentuk $f(x)$ dikalikan dengan sekawan pembilang dan penyebut

sehingga  $f(a) \neq \frac{0}{0}$ , kemudian disubstitusikan lagi.

*Contoh soal:* Carilah nilai limit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x}$  !

*Penyelesaian:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x} = \frac{1 - \sqrt{0+1}}{0^2 - 0} = \frac{1 - \sqrt{1}}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Jadi harus diubah lebih dahulu dengan jalan dikalikan dengan sekawannya

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{x+1}) \cdot (1 + \sqrt{x+1})}{(x^2 - x) \cdot (1 + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x+1)}{(x^2 - x)(1 + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x(x-1)(1 + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(x-1)(1 + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x-1)(1 + \sqrt{x+1})} \\ &= \frac{-1}{(0-1)(1 + \sqrt{0+1})} \\ &= \frac{-1}{(-1)(1+1)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $\infty$  (tak hingga)

Jika bentuk  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  diselesaikan dengan substitusi langsung

menghasilkan  $\frac{\infty}{\infty}$ , maka menggunakan langkah-langkah:

- 1) Cari peubah  $x$  dari  $f(x)$  dan  $g(x)$  yang memiliki pangkat tertinggi.
- 2) Bagi  $f(x)$  dan  $g(x)$  dengan peubah pangkat tertinggi tersebut.

- 3) Dengan menggunakan sifat bahwa  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0$  untuk setiap  $n$  bilangan positif dan  $a$  untuk bilangan real, sehingga limit fungsi yang berbentuk  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  dapat diselesaikan.

### 3. Teorema L'Hopital

Limit bentuk tak tentu dapat diselesaikan dengan atural L'Hopital. Apabila  $f(x)$  dan  $g(x)$  mempunyai turunan di  $x = a$  dan  $f(x) = g(x) = 0$  sedangkan  $f'(x) = g'(x)$  tidak sama dengan 0, maka:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Apabila setelah menggunakan aturan L'Hopital ternyata masih dijumpai bentuk  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  dan  $\infty - \infty$  lanjutkan lagi pengerjaan dengan

menggunakan aturan L'Hopital sampai tidak menemui bentuk  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  dan  $\infty - \infty$ .

#### b) Menghitung Limit Fungsi Trigonometri

Rumus – Rumus Limit Fungsi Trigonometri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

Untuk lebih memahami tentang limit fungsi trigonometri, perhatikan contoh berikut.

*Contoh soal:* Tentukan nilai dari  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \cot x$  !

$$\begin{aligned} \text{Penyelesaian: } \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \cot x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\tan x} \quad \dots\dots\dots \tan x \cdot \cot x = 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{x}{\tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

## J. HASIL PENELITIAN TERDAHULU

Penelitian yang berhubungan dengan analisis pemahaman berdasarkan Teori APOS dan penelitian yang berhubungan dengan gaya kognitif *field dependent* dan *field independent* dilaporkan oleh peneliti sebagai berikut:

1. Penelitian yang dilakukan oleh Minanur Rohman pada tahun 2012.<sup>127</sup>

Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi pemahaman konsep limit fungsi siswa. Identifikasi pemahaman tersebut mendasarkan pada beberapa teori antara lain; Teori Konstruktivistik, Teori Kognitif Domain Piaget, Teori Kognitif Domain APOS Dubinsky, Teori Kognitif Domain Anna Sfard, Teori Kognitif Domain Procept Gray & Tall, Belajar dalam Prespektif al-Qur'an, Genetic Decomposition, dan Teori Pemahaman Skemp. Penelitian ini menggunakan metode kuesioner dan wawancara untuk mengetahui tingkat pemahaman siswa terhadap konsep limit fungsi. Subjek dalam penelitian ini adalah 3 siswa yang dipilih berdasarkan alasan dari jawaban kuesioner dan dari rekomendasi guru. Dalam penelitian ini ternyata struktur kognitif ketiga subjek dalam menentukan nilai limit fungsi masih bersifat prosedural. Hal ini terjadi karena subjek masih belum merasakan konsep limit fungsi sebagai bagian *internal* dari dirinya. Oleh karena itu, menurut pandangan Teori Kognitif Domain APOS struktur kognitif mereka masih berada pada tahap *actions*.

---

<sup>127</sup> Minanur Rohman, *Identifikasi Proses Konstruksi Limit...*, hal. 1

2. Penelitian yang dilakukan oleh Maryono pada tahun 2008.<sup>128</sup> Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui tingkat pemahaman mahasiswa tentang konsep keterbagian bilangan bulat dan strategi kognitif yang digunakan mahasiswa dalam menyelesaikan soal-soal tentang keterbagian bilangan bulat. Peneliti mendeskripsikan tingkat pemahaman subjek tersebut dengan menggunakan Teori APOS yang dikaitkan dengan Teori *Triad* perkembangan skema. Subjek penelitian ini adalah mahasiswa Sekolah Tinggi Agama Islam Negeri (STAIN) Tulungagung jurusan matematika dan mengambil 15 mahasiswa sebagai subjek wawancara. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa secara umum tingkat pemahaman mahasiswa berada pada tahap objek, yaitu mahasiswa sudah mampu menggunakan definisi, dalil-dalil atau sifat-sifat yang ada pada keterbagian bilangan bulat untuk menyelesaikan soal.
3. Penelitian yang dilakukan oleh Lasmi Nurdin pada tahun 2005.<sup>129</sup> Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan tingkat pemahaman siswa tentang barisan dan deret pada SMA Laboratorium Universitas Negeri Malang berdasarkan kerangka Teori APOS (Aksi, Proses, Objek, dan Skema). Subjek penelitian ini adalah 37 siswa dengan mengambil 9 siswa sebagai subjek wawancara. Hasil penelitian ini disimpulkan secara umum bahwa pemahaman siswa berada pada tahap proses. Jika tingkat pemahaman siswa pada tahap proses ini dihubungkan dengan Teori *Triad* dari Piaget dan Gracia, maka tingkat pemahaman siswa berada pada tahap *intra*.

---

<sup>128</sup> Maryono, *Eksplorasi Pemahaman...*, hal. i

<sup>129</sup> Lasmi Nurdin, *Analisis Pemahaman Siswa SMA...*, hal. i

4. Penelitian yang dilakukan oleh Abdul Rahman pada tahun 2009.<sup>130</sup> Penelitian ini bertujuan untuk mengungkapkan profil kemampuan pengajuan masalah matematika siswa berdasarkan gaya kognitifnya. Gaya kognitif yang dibahas dalam penelitian ini adalah gaya kognitif *field dependent* dan *field independent*. Subjek penelitian adalah 8 orang siswa yang masing-masing kelompok gaya kognitif diwakili 4 orang di kelas XI IPA SMAN 3 Makasar. Hasil penelitian ini menyimpulkan bahwa profil pengajuan masalah matematika peserta didik dari semua situasi (grafik, kalimat verbal, kalimat matematika, dan gambar) menunjukkan bahwa peserta didik yang bergaya kognitif *field independent* lebih banyak mengajukan masalah matematika yang dapat diselesaikan, baik yang tidak mengandung informasi baru maupun yang mengandung informasi baru dari pada peserta didik yang bergaya kognitif *field dependent*. Menurutnya pemahaman matematika peserta didik dapat ditelaah melalui kemampuan mereka dalam mengajukan masalah.
5. Penelitian yang dilakukan oleh Budi Usodo pada tahun 2011.<sup>131</sup> Penelitian ini bertujuan untuk mengungkap hakekat gejala yang muncul dari Subjek penelitian. Hakekat tersebut digunakan untuk menemukan profil intuisi yang digunakan mahasiswa dalam memecahkan permasalahan matematika. Subjek penelitiannya adalah 2 mahasiswa dengan gaya kognitif *field dependent* dan 2 mahasiswa dengan gaya kognitif *field independent*, pemilihan 4 Subjek ini dilihat dari hasil tes gaya kognitif dengan *GEFT*. Dalam penelitian ini untuk mengetahui intuisi mahasiswa yang digunakan dalam memecahkan masalah

---

<sup>130</sup> Abdul Rahman, *Profil Pengajuan Masalah Matematika...*, hal. iii

<sup>131</sup> Budi Usodo, *Profil Intuisi Mahasiswa...*, t.h

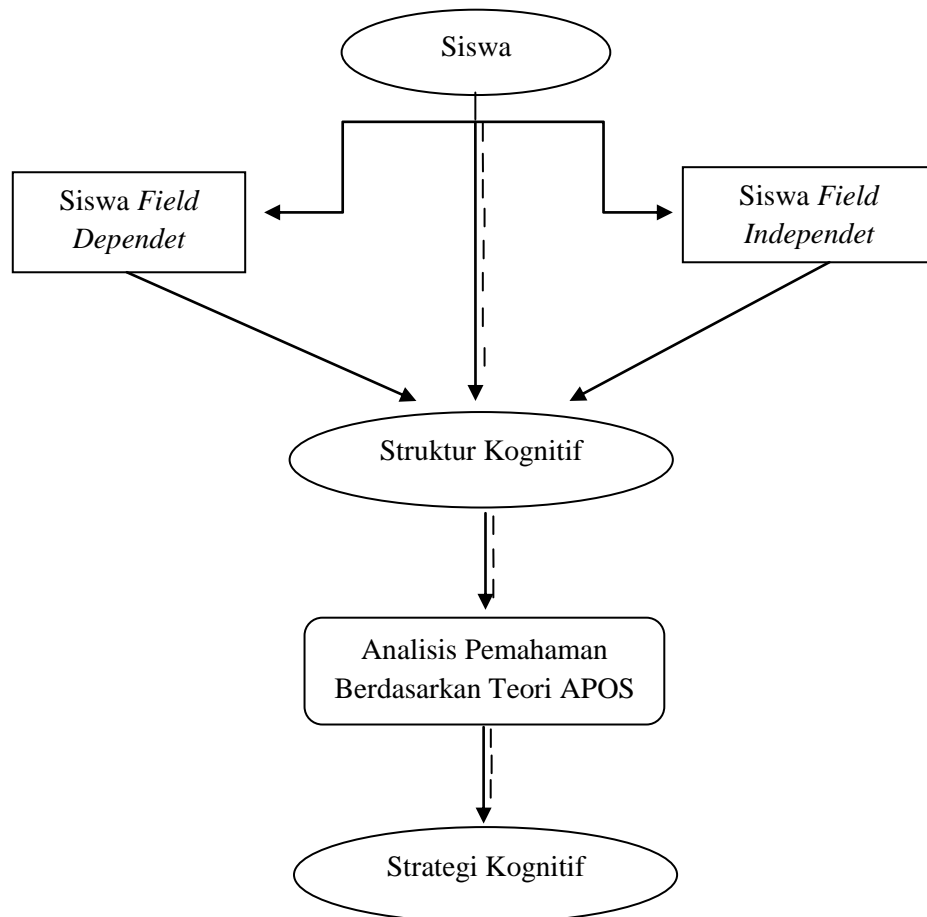


matematika adalah dengan memberikan 2 masalah yang masing-masing berkaitan dengan masalah menemukan dan membuktikan. Dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa subjek dengan gaya kognitif *field dependent* dalam menyelesaikan masalah menemukan ada kecenderungan memandang permasalahan secara menyeluruh. Subjek dengan gaya kognitif *field dependent* dalam menyelesaikan masalah membuktikan adalah dengan intuisi antisipatori yang bersifat bertentangan pada umumnya, individu dengan gaya kognitif *field dependent* kesulitan dalam memproses. Sedangkan, dalam masalah menemukan subjek dengan gaya kognitif *field independent* lebih menunjukkan bagian-bagian terpisah dari pola menyeluruh dan mampu menganalisa pola ke dalam komponen-komponennya. Individu dengan gaya kognitif *field independent* cenderung menggunakan faktor-faktor internal sebagai arahan dalam memproses informasi. Untuk masalah membuktikan, memberikan gambaran bahwa subjek *field independent* dapat memilah penggunaan cara dalam membuktikan berkaitan dengan soal yang diberikan. Hal tersebut sesuai dengan teori yang mengatakan bahwa individu dengan gaya *field independent* lebih menunjukkan bagian-bagian terpisah dari pola menyeluruh dan mampu menganalisa pola ke dalam komponen-komponennya.

Dari beberapa penelitian di atas ternyata Teori APOS dapat digunakan untuk mengetahui tingkat pemahaman siswa dalam berbagai topik matematika. Beberapa penelitian di atas juga menunjukkan bahwa karakteristik siswa (gaya kognitif) mampu menunjukkan kemampuan/kecenderungan yang berbeda-beda tentang bagaimana siswa menggunakan pengetahuannya. Oleh karena itu, pada

penelitian ini penulis berusaha mengaitkan antara Teori APOS dengan gaya kognitif, karena pada penelitian sebelumnya belum pernah ada penelitian yang mengkombinasikan antara keduanya.

### K. KERANGKA BERPIKIR



**Gambar 2.3 Kerangka Berpikir Penelitian**

#### Keterangan:

==> = Siswa secara umum (Lajur kerangka berpikir fokus penelitian (1) dan (2))

—> = Siswa berdasarkan gaya kognitif (Lajur kerangka berpikir fokus penelitian (3) dan (4))