

BAB IV

HASIL PENELITIAN

A. DESKRIPSI PELAKSANAAN PENELITIAN

1. Studi Pendahuluan

Penelitian tentang analisis pemahaman siswa berdasarkan Teori APOS ini adalah untuk mengetahui tingkat pemahaman siswa dalam belajar kalkulus dengan berpanduan pada Teori APOS. Dengan menggunakan alat tes yang mencakup materi limit fungsi aljabar dan trigonometri, yang mana materi ini sedang diajarkan pada semester genap di kelas XI IPA.

Guru pengampu mata pelajaran matematika adalah Drs. HA. Ali Maburr dan siswa yang menjadi subjek penelitian adalah siswa kelas XI IPA 2 MAN Rejotangan. Pada hari Rabu tanggal 20 Maret 2013 peneliti menemui guru bidang studi matematika tersebut di rumahnya untuk mengumpulkan informasi terkait dengan tingkat pemahaman siswa dalam mempelajari konsep limit fungsi. Secara umum menurut guru pengampu, tingkat pemahaman siswa tentang konsep limit fungsi hampir sama, tetapi ada satu atau dua siswa yang memiliki kemampuan yang lebih, sehingga terkadang beliau memberinya soal-soal yang tingkat kesulitannya lebih untuk dikerjakan secara mandiri.

Pada kesempatan ini pula peneliti menyampaikan maksud untuk mengadakan penelitian tentang analisis pemahaman siswa mengenai konsep limit fungsi di kelas XI IPA 2 MAN Rejotangan. Guru pengampu menyambut baik

maksud peneliti bahkan beliau menyatakan bersedia membantu peneliti selama proses penelitian berlangsung.

Selanjutnya pada hari Senin, tanggal 25 Maret 2013 peneliti mengajukan surat ijin penelitian ke MAN Rejotangan. Pada hari itu terlebih dahulu peneliti menghubungi Drs. Hadik Burhani M.Pd.I selaku Waka Kurikulum untuk meminta persetujuan secara lisan. Beliau langsung mengiyakan dan menyarankan peneliti untuk menghubungi langsung Pak Ali selaku guru mata pelajaran matematika di kelas XI IPA 2 untuk membicarakan proses penelitian lebih lanjut. Sebelum menemui Pak Ali, peneliti menyerahkan surat ijin penelitian kepada Kepala Tata Usaha MAN Rejotangan yang bernama Bu Sunarsih.

Setelah mengurus perijinan penelitian, peneliti kembali menemui Pak Ali untuk meminta ijin mengadakan observasi kelas. Peneliti diijinkan untuk mengadakan observasi kelas, akan tetapi disarankan waktunya pada minggu ke-4 bulan Maret sampai minggu ke-2 bulan April dikarenakan kemungkinan materi tentang limit fungsi akan disampaikan pada waktu tersebut. Beliau juga mengingatkan bahwa pada minggu ke-2 bulan April kemungkinan akan ada liburan untuk UN kelas XII jadi untuk kelas XI akan libur pada waktu itu otomatis waktu itu jangan digunakan untuk penelitian atau mengujikan soal. Pada saat itu peneliti juga menyampaikan bahwa kemungkinan akan masuk kelas untuk observasi pada minggu ke-5 bulan Maret.

Dalam pembicaraan tersebut peneliti sedikit memberikan gambaran tentang proses penelitiannya kepada guru pengampu mengenai alur dan jalannya penelitian. Peneliti menyampaikan bahwa akan melakukan tes sebanyak 2 kali

yang membutuhkan waktu 3 jam pelajaran. Peneliti juga menjelaskan bahwa akan diadakan wawancara kepada beberapa siswa. Tetapi, untuk kegiatan wawancara tidak dilaksanakan pada jam pelajaran agar tidak mengganggu siswa dalam mengikuti kegiatan pembelajaran di kelas.

Dari hasil diskusi tersebut mengenai pelaksanaan tes dan wawancara Pak Ali menyerahkan keputusan kepada peneliti artinya terserah mengambil waktu kapan. Beliau hanya memberikan jadwal matapelajaran matematika dalam satu minggu, yaitu hari senin setelah jam istirahat, hari rabu jam ke 1-2 (07.00-08.30 WIB), dan hari jumat jam ke 3-4 (08.20-09.40 WIB). Untuk selanjutnya mengenai kapan waktu penelitian diserahkan sepenuhnya kepada peneliti.

2. Pelaksanaan lapangan

Pelaksanaan pengambilan data di lapangan diawali dengan kegiatan observasi kelas yang dilaksanakan pada hari Rabu, 27 Maret 2013. Pada saat itu pelajaran dibuka dengan latihan soal yang terdiri dari 2 soal tentang limit fungsi aljabar. Kedua soal tersebut berhubungan dengan bentuk pecahan. Untuk soal pertama membutuhkan keterampilan siswa dalam menyamakan penyebut pada bentuk pengurangan pecahan aljabar, sedangkan untuk soal kedua berhubungan dengan merasionalkan penyebut dan penggunaan metode pemfaktoran.

Melalui 2 soal tersebut guru memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengerjakan beberapa menit dibangkunya masing-masing, setelah dirasa cukup beliau menyuruh salah satu siswanya untuk mengerjakan soal tersebut di depan kelas. Dari kesempatan yang diberikan tak satupun siswa berkenan maju untuk

mengerjakan soal tersebut. Ada beberapa siswa yang sudah mencoba mengerjakan di bukunya masing-masing, tetapi mereka terlihat masih ragu dengan jawabannya. Ada juga yang berusaha bertanya kepada guru dan meminta petunjuk dalam mengerjakan. Guru juga sudah memberikan rambu-rambu dalam mengerjakan, yang kemudian siswanya disuruh meneruskan langkah tersebut secara mandiri, tetapi lagi dan lagi saat mereka disuruh maju untuk mengerjakan tak satupun ada siswa yang berkenan maju. Sebagian siswa hanya berani mengatakan jawabannya tetapi disaat dia disuruh maju dia tidak berkenan, karena jawaban mereka sebagian hanya terkaan atau perkiraan. Hingga pada akhirnya soal nomer 1 dikerjakan oleh guru sendiri. Hal ini juga berlaku untuk soal nomer 2 yang mana tak ada satupun siswa yang berkenan mengerjakan soal tersebut di depan.

Pelajaran pada hari itu dilanjutkan dengan pembahasan materi tentang teorema limit dan limit fungsi trigonometri. Beberapa catatan peneliti terkait dengan pembelajaran pada hari itu adalah bahwa guru pengampu mata pelajaran dalam menyampaikan materi masih didominasi dengan cara tekstual dan ceramah. Selain itu masih terlihat dari beberapa siswa kurang memahami penyajian materi dari guru. Hal ini terlihat dari beberapa siswa yang diam (pasif) dan masih kesulitan dalam menerapkan teorema limit fungsi dalam persoalan. Para siswa terlihat masih bingung saat dihadapkan dengan simbol-simbol matematis yang terdapat pada teorema-teorema tersebut, sehingga kemungkinan besar siswa memang belum memahami penggunaan dan maksud dari teorema-teorema limit fungsi.

Sedangkan, untuk pelaksanaan tes dan wawancara dilaksanakan dengan rincian sebagai berikut. Untuk pelaksanaan test *GEFT* dilaksanakan pada hari Senin, tanggal 22 April 2013 pada jam ke 5 yaitu pukul 10.15-11.00 WIB. Sementara untuk tes tertulis tentang materi limit fungsi dilaksanakan pada hari Rabu, tanggal 24 April 2013 pada jam ke 1-2 yaitu pukul 07.00-08.30 WIB.

Peserta yang mengikuti tes *GEFT* sebanyak 39 siswa dari 40 siswa, 1 orang siswa tidak mengikuti tes dikarenakan ijin pergi. Sedangkan yang mengikuti tes tertulis ada 40 siswa, dan semua hadir secara lengkap. Untuk lebih jelasnya, daftar nama dan kode siswa dapat dilihat di tabel 4.1. Pengkodean siswa dalam penelitian ini digunakan untuk memudahkan analisis yang dilakukan oleh peneliti.

Pengkodean siswa dalam penelitian ini tidak didasarkan pada inisial nama siswa, namun didasarkan pada gaya kognitif dan nomer absen siswa. Misalnya, kode siswa FII1 memiliki arti siswa dengan gaya kognitif *Field Independent* dan bernomor absen 11. Untuk selanjutnya daftar peserta tes secara lengkap dilihat pada tabel 4.1 di bawah ini:

Tabel 4.1 Daftar Nama-nama Siswa Kelas XI IPA 2 MAN Rejotangan

NO	NAMA SISWA	L/P	HASIL GEFT	GAYA KOGNITIF	KODE SISWA
1	AM	L	14	FI	FI1
2	AFL	P	6	FD	FD2
3	AF	P	5	FD	FD3
4	CAS	L	12	FI	FI4
5	CF	P	14	FI	FI5
6	CFA	P	6	FD	FD6
7	CNA	P	13	FI	FI7
8	EDP	P	5	FD	FD8
9	EW	P	3	FD	FD9
10	FZ	P	5	FD	FD10
11	HS	L	17	FI	FI11
12	IHM	L	11	FD	FD12
13	IA	P	8	FD	FD13
14	IDW	L	13	FI	FI14
15	IS	P	7	FD	FD15
16	IFM	P	11	FD	FD16
17	KN	P	14	FI	FI17
18	LA	P	8	FD	FD18
19	LK	P	11	FD	FD19
20	MA	L	16	FI	FI20
21	MMM	L	8	FD	FD21
22	MAF	L	14	FI	FI22
23	NS	P	5	FD	FD23
24	NA	P	6	FD	FD24
25	NR	L	13	FI	FI25
26	NHK	P	10	FD	FD26
27	NI	P	9	FD	FD27
28	RM	P	11	FD	FD28
29	RF	P	14	FI	FI29
30	RDL	P	5	FD	FD30
31	RI	P	6	FD	FD31
32	SI	P	10	FD	FD32
33	SR	L	16	FI	FI33
34	TNN	P	7	FD	FD34
35	TKM	L	16	FI	FI35
36	TAR	P	12	FI	FI36
37	UH	P	-	-	F38*
38	VLA	P	8	FD	FD38
39	YLA	P	5	FD	FD39
40	YMR	P	12	FI	FI40

Catatan: *) absen, tidak ikut tes *GEFT* tetapi ikut tes tertulis

Tes yang dilaksanakan dalam penelitian ini sebanyak dua kali yakni *Group Embedded Figures Test (GEFT)* dan tes tertulis. *Group Embedded Figures Test (GEFT)* ini adalah tes untuk menentukan gaya kognitif siswa. Tes ini berupa perintah menebali gambar sederhana di dalam gambar rumit. Terdapat 18 soal dan masing-masing jawaban benar mendapat skor 1, jikalau salah skornya 0. Subjek yang nilainya 0-11 dikategorikan sebagai subjek *field dependent* (FD) dan subjek yang nilainya 12-18 dikategorikan sebagai subjek *field independent* (FI).¹⁶⁶ Hasil skor siswa dalam *GEFT* dapat dilihat pada tabel 4.1.

Sedangkan untuk tes tertulis, materi yang digunakan adalah materi tentang limit fungsi aljabar dan trigonometri, tentunya juga akan berhubungan dengan definisi, teorema-teorema, dan rumus-rumus pada limit fungsi. Dan juga akan melibatkan perhitungan aljabar dan trigonometri. Waktu yang dibutuhkan untuk mengerjakan soal adalah 90 menit.

Pada waktu pelaksanaan tes, siswa tidak mengetahui bahwa mereka adalah subjek dalam penelitian ini. Mereka hanya mengetahui bahwa tes ini adalah ujian yang hasilnya akan disetorkan kepada guru bidang studi sebagai pertimbangan nilai tengah semester. Dalam penelitian ini peneliti memperkenalkan diri kepada siswa sebagai seorang mahasiswa yang mendapat tugas di MAN Rejotangan oleh kampus STAIN Tulungagung. Secara umum siswa memahami peneliti sebagai mahasiswa PPL.

Setelah pelaksanaan tes tersebut, peneliti mengoreksi jawaban siswa dengan memberikan skor sebagai berikut: untuk soal nomer 1, 2a, 2b, 3, dan 4

¹⁶⁶ Gregory A. Davis, *The Relationship Between Learning Style,...* hal. 88

masing-masing bernilai 20. Dengan kriteria jika jawaban sempurna dan lengkap skornya 20, jika jawaban salah atau tidak dijawab skornya 0, dan jika jawaban kurang sempurna maka skornya 1-10. Hasil skor tes tertulis bisa dilihat pada L.9 dan beberapa contoh jawaban siswa pada saat mengikuti tes tertulis bisa dilihat pada L.8.

Dari 40 siswa yang mengikuti tes tertulis peneliti menentukan 15 siswa sebagai subjek wawancara. Pertimbangan peneliti dalam menentukan subjek wawancara adalah dari jawaban tertulis siswa yang sesuai dengan kriteria Teori APOS, berdasarkan pertimbangan hasil *GEFT*, berdasarkan hasil pengamatan dan pertimbangan dari guru bidang studi seperti siswa yang mudah diajak komunikasi dan bekerjasama, dan mereka yang dianggap bisa mewakili seluruh subjek penelitian. Dari 15 subjek terpilih tersebut peneliti menetapkan 3 subjek yang menjadi perwakilan siswa *field dependent* dan *field independent* untuk dianalisis pergaya kognitif dengan tujuan agar lebih tampak strategi kognitif yang digunakan siswa dari masing-masing gaya kognitif tersebut dalam menyelesaikan soal-soal limit fungsi.

Kegiatan wawancara dilaksanakan di luar jam pelajaran dan masing-masing subjek wawancara membutuhkan waktu 20-30 menit. Untuk memudahkan penyusunan hasil wawancara peneliti menggunakan alat perekam dan juga menggunakan alat tulis untuk merekam kejadian selain suara, misalnya keterangan siswa yang ditulis tanpa di suarakan. Pelaksanaan wawancara ini dilaksanakan di lingkungan MAN Rejotangan, yakni di kelas, musholla, atau di taman sekolah. Hal ini mengingat bahwa pelaksanaan wawancara yang tidak pada

jam sekolah, sehingga memudahkan untuk mencari tempat yang lebih nyaman dan bersahabat. Adapun rincian subjek wawancara beserta waktu pelaksanaan wawancara disajikan dalam L.10.

B. PENYAJIAN DATA

Pada bagian ini akan dipaparkan data-data yang berkenaan dengan kegiatan penelitian dan subjek penelitian selama pelaksanaan penelitian. Ada dua bentuk data dalam kegiatan penelitian ini yaitu dari jawaban tes tertulis dan data wawancara tentang hasil tes tertulis siswa. Dua data ini akan menjadi tolok ukur untuk menyimpulkan bagaimana tingkat pemahaman siswa mengenai konsep limit fungsi berdasarkan Teori APOS dan untuk mengetahui tingkat pemahaman siswa mengenai konsep limit fungsi berdasarkan Teori APOS yang ditinjau dari gaya kognitif *field dependent* dan *field independent*.

1. Tingkat Pemahaman Siswa Secara Umum

Berdasarkan kriteria Teori APOS mengenai hasil tes tertulis dan hasil wawancara dengan siswa maka ada empat konstruksi mental tertentu yaitu aksi, proses, objek, dan skema. Tabel 4.2 berikut menunjukkan tingkat pemahaman siswa mengenai konsep limit fungsi berdasarkan Teori APOS.

Tabel 4.2 Tingkat Pemahaman Siswa Mengenai Konsep Limit Fungsi

NO.	NAMA SISWA	KODE SISWA	Nomor Soal				
			1	2a	2b	3	4
1	AM	FI1	*	A	*	A	A
2	AFL	FD2	A	A	P	A	A
3	AF	FD3	P	A	A	A	A
4	CAS	FI4	*	*	*	*	A
5	CF	FI5	O	O	P	P	A
6	CFA	FD6	A	*	*	*	*
7	CNA	FI7	S	O	P	P	P
8	EDP	FD8	P	A	A	A	A
9	EW	FD9	A	P	A	A	A
10	FZ	FD10	P	A	A	P	A
11	HS	FI11	S	O	P	P	A
12	IHM	FD12	P	A	A	P	P
13	IA	FD13	A	A	A	A	*
14	IDW	FI14	P	A	*	A	*
15	IS	FD15	P	O	A	P	A
16	IFM	FD16	P	O	A	A	A
17	KN	FI17	P	O	A	A	A
18	LA	FD18	P	O	A	*	A
19	LK	FD19	P	O	P	P	P
20	MA	FI20	A	A	A	P	A
21	MMM	FD21	P	O	P	A	A
22	MAF	FI22	P	O	A	P	A
23	NS	FD23	P	A	*	*	A
24	NA	FD24	O	O	A	P	A
25	NR	FI25	A	A	A	A	A
26	NHK	FD26	*	A	A	A	A
27	NI	FD27	O	P	P	P	P
28	RM	FD28	A	O	P	A	A

29	RF	FI29	A	A	A	P	P
30	RDL	FD30	A	P	A	A	A
31	RI	FD31	A	A	A	A	A
32	SI	FD32	P	A	A	P	P
33	SR	FI33	A	P	P	A	A
34	TNN	FD34	A	A	A	P	*
35	TKM	FI35	P	O	*	P	A
36	TAR	FI36	P	P	A	A	A
37	UH	F37*	P	A	*	P	*
38	VLA	FD38	P	O	A	P	A
39	YLA	FD39	A	P	A	A	A
40	YMR	FI40	P	O	A	A	A

Keterangan: A : Aksi P : Proses O : Objek S : Skema

*: Tidak dijawab/jawaban salah/tidak termasuk salah satu kriteria Teori APOS.

Adapun jumlah dan persentase tingkat pemahaman siswa mengenai konsep limit fungsi berdasarkan Teori APOS untuk masing-masing butir soal disajikan dalam tabel 4.3 berikut:

Tabel 4.3 Jumlah dan Persentase Tingkat Pemahaman Siswa mengenai Konsep Limit Fungsi Berdasarkan Teori APOS

No. Soal	Jumlah/ Persentase	Tingkat Pemahaman Siswa					Total
		Aksi	Proses	Objek	Skema	Lain-lain	
1	Jumlah	13	19	3	2	3	40
	Persentase	32,5%	47,5%	7,5%	5%	7,5%	100%
2a	Jumlah	18	5	15	0	2	40
	Persentase	45%	12,5%	37,5%	0%	5%	100%
2b	Jumlah	25	8	0	0	7	40
	Persentase	62,5%	22,5%	0%	0%	17,5%	100%
3	Jumlah	19	17	0	0	4	40
	Persentase	47,5%	42,5%	0%	0%	10%	100%
4	Jumlah	29	6	0	0	5	40
	Persentase	72,5%	15%	0%	0%	12,5%	100%
Rata-rata	Jumlah	20,8	11	3,6	0,4	4,2	40
	Persentase	52%	27,5%	9%	1%	10,5%	100%
Total		104	55	18	2	21	200

Berikut ini diuraikan lebih rinci data yang telah dikumpulkan dengan berbagai tingkat pemahaman siswa pada saat menyelesaikan soal-soal limit fungsi dalam kerangka Teori APOS. Untuk lebih memudahkan dalam memahami data, maka pemaparan data disajikan perbutir soal dalam tes tertulis materi limit fungsi.

a. Soal Nomor 1

1) Aksi

Berdasarkan Tabel 4.2 dan 4.3 ada 13 siswa yang pemahamannya mengenai konsep limit fungsi berada pada tahap aksi. Dari 13 siswa 8 diantaranya yaitu FD2, FD6, FD13, FI25, FD30, FD31, FD34, dan FD 39 menjawab sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} 2x - 5 + \lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 + 4x && \dots\dots\dots (i) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 2(3) - 5 + \lim_{x \rightarrow 3} 3(3)^2 + 4(3) && \dots\dots\dots (ii) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 6 - 5 + \lim_{x \rightarrow 3} 27 + 12 \\ &= 1 + 39 = 40 \end{aligned}$$

Dari jawaban tersebut terlihat bahwa mereka menggunakan cara substitusi langsung dengan cara memasukkan nilai $x = 3$ ke dalam suatu fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Tampak juga pada jawaban mereka bahwa setelah disubstitusikan nilai x ke dalam suatu fungsi mereka masih menyertakan simbol $\lim_{x \rightarrow 3}$ pada langkah selanjutnya (*lihat langkah (i) ke (ii)*). Dalam menentukan nilai limitnya mereka hanya melakukan kegiatan prosedural dan hanya sebatas aktifitas eksternal, tanpa ada pemikiran yang lebih lanjut di dalam struktur kognitifnya (perilaku yang tidak sadar). Sehingga meski jawaban akhir mereka benar, tetapi proses atau langkah-

langkah jawaban mereka belum berdasarkan pada definisi dan teorema limit fungsi. Hal ini diperjelas dengan wawancara dengan FD31 sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Oke, coba adik cermati jawaban adik tersebut kira-kira ada yang kurang tepat atau tidak dalam penulisan kamu!</i>
FD31	: <i>Saya rasa sudah benar bu, saya pakai cara substitusi langsung.</i>
Peneliti	: <i>Substitusi langsung itu ada atau tidak teoremanya?</i>
FD31	: <i>Lupa bu.</i>
Peneliti	: <i>O iya jadi, teorema limit pada substitusi langsung adalah $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ artinya kalau sampeyan pakai substitusi langsung berarti setelah $x = 3$ sudah kamu masukkan ke dalam suatu fungsi simbol $\lim_{x \rightarrow 3}$ sudah tidak perlu disertakan lagi.</i>

Dari hasil wawancara tersebut mengindikasikan bahwa FD31 menganggap simbol $\lim_{x \rightarrow 3}$ kosong dari arti. Mereka menganggap sama dua konsep yang berbeda yaitu konsep fungsi dan konsep limit fungsi. Sehingga, mereka menerapkan metode mencari nilai fungsi (substitusi) dalam menentukan nilai limit fungsi tanpa mengetahui definisi dan alasannya menggunakan cara tersebut. Hal itu nampak dari hasil jawaban tertulis mereka yang masih menyertakan simbol $\lim_{x \rightarrow 3}$ setelah melakukan substitusi.

Sedangkan jawaban siswa FD9, FI20, FD28, FI29, dan FI33 hampir sama dengan kedelapan siswa di atas, juga sama-sama kurang memahami definisi dan teorema limit fungsi sehingga mereka menuliskan jawaban sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \text{➤ } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= 2x - 5 \\
 &= 2(3) - 5 \\
 &= 1 \\
 \text{➤ } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= 3x^2 + 4x \\
 &= 3(3)^2 + 4(3) \\
 &= 40
 \end{aligned}$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1 + 39 = 40$$

Dari kedua jawaban tersebut terlihat bahwa mereka hanya menghitung nilai fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ tanpa memperhatikan semesta pembicaraan tentang limit fungsi. Mereka sebatas melaksanakan perhitungan-perhitungan secara eksplisit. Sebagian dari mereka lebih banyak melakukan aktifitas yang hanya berorientasi bagaimana segera mendapatkan jawaban, tanpa mengetahui alasan mengapa mereka menggunakan cara atau metode substitusi langsung tersebut. Hal ini sesuai dengan petikan wawancara dengan FD2 berikut:

Peneliti	: Menurut adik penulisanmu ada yang kurang tepat atau tidak?
FD2	: Belum tepat bu. (mengerjakan kembali di kertas buram)
Peneliti	: Iya benar. Sekarang coba lihat langkahmu yang pertama kan tertulis $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) + (3x^2 + 4x)$. Dari jawaban tersebut kan kamu tidak hanya memasukkan rumus fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, tetapi kamu menambahkan rumus fungsinya terlebih dahulu, adakah teorema (sifat) yang mendasarinya dek?
FD2	: Lupa bu.
Peneliti	: Hmm... kira-kira alasannya apa?
FD2	: Ini sebenarnya hanya lupa belum saya tulis $\lim_{x \rightarrow 3}$ bu.hehe

Dari petikan wawancara tersebut, FD2 terlihat tidak konsisten pada jawaban tertulisnya dengan mengatakan bahwa “saya lupa menuliskan simbol limitnya”, padahal jawaban tertulisnya sudah mengarah pada teorema dan jawaban yang benar. Akan tetapi setelah dilakukan wawancara FD2 tidak menunjukkan pemahaman yang lebih, sehingga dapat disimpulkan dia hanya sekedar melakukan aktifitas prosedural. Dan pada saat ditanya alasan menggunakan metode tersebut FD2 menjawab sebagaimana berikut:

Peneliti	: <i>Okelah, lalu mengapa pada soal ini adik menggunakan metode substitusi langsung?</i>
FD2	: <i>Karena cara yang pertama sebagaimana yang diajarkan pak Ali yang pertama adalah substitusi langsung bu.</i>
Peneliti	: <i>Selain metode substitusi dalam mencari nilai limit itu ada metode apa lagi dek?</i>
FD2	: <i>Pemfaktoran bu.</i>
Peneliti	: <i>Kira-kira kenapa adik tidak menggunakan metode yang lain?</i>
FD2	: <i>La seingat saya cuma substitusi o bu.</i>
Peneliti	: <i>Kira-kira pakai metode lain bisa apa tidak?</i>
FD2	: <i>Tidak.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kok tidak bisa?</i>
FD2	: <i>Karena tidak bisa difaktorkan.</i>
Peneliti	: <i>Berarti alasan menggunakan substitusi langsung adalah?</i>
FD2	: <i>Karena tidak bisa difaktorkan.hehe</i>

Dalam wawancara tersebut, alasan FD2 menggunakan substitusi kurang menunjukkan pemahamannya. Seharusnya alasan yang dikemukakan oleh FD2 itu mengaitkan dengan hasilnya terdefinisi ataukah tidak saat FD2 menggunakan metode substitusi secara langsung. Tetapi FD2 mengatakan alasannya karena “*tidak bisa difaktorkan*”. Hal ini mengindikasikan bahwa metode substitusi masih berada di wilayah eksternal FD2. Dengan demikian, secara umum mereka belum mampu menginternalisasi metode substitusi secara sempurna.

2) Interiorisasi: dari Aksi ke Proses

Berdasarkan Tabel 4.2 dan 4.3 ada 19 siswa yang pemahamannya mengenai konsep limit fungsi berada pada tahap proses. Dari 19 siswa ada 18 diantaranya yakni FD3, FD8, FD10, FD12, FI14, FD15, FD16, FI17, FD18,

FD19, FI22, FD23, FD32, FI35, FI36, F37, FD38, dan FI40. Jawaban tertulis mereka adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) + \lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 + 4x) \\
 &= (2(3) - 5) + (3(3^2) + 4(3)) \\
 &= (6 - 5) + (3(9) + 12) \\
 &= 1 + (27 + 12) \\
 &= 1 + 39 = 40
 \end{aligned}$$

Apabila dilihat sekilas memang jawaban siswa pada tahap proses hampir sama dengan jawaban siswa pada tahap aksi. Tetapi jika dicermati lebih lanjut mereka yang ada pada tahap proses memiliki pemahaman lebih dibandingkan dengan siswa pada tahap aksi. Siswa pada tahap proses mampu menggunakan cara substitusi langsung secara sistematis yang secara tidak langsung telah berdasar pada teorema $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ sebagai bagian internal dari dirinya, walaupun dalam wawancara penjelasan mereka belum mengarah pada teorema tersebut.

Hal ini nampak pada jawaban mereka dimana setelah nilai $x = 3$ mereka substitusikan ke dalam fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, pada langkah selanjutnya simbol $\lim_{x \rightarrow 3}$ sudah tidak ditulis lagi, tetapi mereka belum mengetahui bahwa ini adalah akibat dari penggunaan teorema limit. Mereka juga mengetahui alasan mengapa mereka menggunakan substitusi langsung. Berikut ini petikan wawancara dengan siswa FD3 dan EI40.

Petikan wawancara dengan FD3:

Peneliti	: <i>Kepada adik Anggun saya ucapkan terima kasih karena telah memenuhi undangan wawancara saya. Jadi inti dari wawancara ini adalah saya ingin mengetahui lebih jauh seputar jawaban adik pada waktu ujian limit fungsi kemarin. Sekarang coba jelaskan jawabanmu yang nomer 1a!</i>
FD3	: <i>Pakai cara substitusi.</i>
Peneliti	: <i>Alasan adik menggunakan metode substitusi apa?</i>
FD3	: <i>Karena tidak ada cara lain selain substitusi.</i>
Peneliti	: <i>Mungkin ada alasan lain?</i>
FD3	: <i>Karena dengan menggunakan substitusi langsung sudah ada jawabannya.</i>
Peneliti	: <i>Kira-kira yang dikatakan tidak bisa menggunakan substitusi langsung itu jikalau jawabannya bagaimana dek?</i>
FD3	: <i>Jika hasilnya 0 bu.</i>

Petikan wawancara dengan FI40:

Peneliti	: <i>Nah, coba kenapa alasannya sampeyan kok memakai metode substitusi langsung?</i>
FI40	: <i>Karena limit cara yang pertama itu menggunakan substitusi langsung. Apabila tidak dapat disubstitusikan maka menggunakan pefaktorasi.</i>
Peneliti	: <i>Trus yang sampeyan maksud tidak bisa dikerjakan dengan cara substitusi itu yang bagaimana dek?</i>
FI40	: <i>Jika nilainya 0.</i>
Peneliti	: <i>Adik tahu apa tidak bedanya $\frac{0}{0}$ dengan 0 itu apa? Kira-kita $\frac{0}{0}$ sama dengan berapa dek?</i>
FI40	: <i>Sama dengan 0 bu.hehehe</i>

Dari kedua petikan wawancara tersebut dapat kita perhatikan bahwa mereka dapat memberikan alasannya menggunakan cara substitusi walaupun alasan mereka belum sepenuhnya dapat dibenarkan, mungkin maksud mereka adalah penggunaan substitusi dapat diterapkan secara langsung jikalau tidak

menemui bentuk tak tentu (*terdefinisi*) dengan mengatakan “*sudah ada jawabannya*”. Mereka menganggap bahwa $\frac{0}{0}$ itu sama dengan 0, sehingga sebagian mereka menganggap bahwa 0 adalah bentuk tak tentu juga.

Pemahaman mereka sudah mencapai pada tahap proses, tetapi pada titik-titik tertentu perlu adanya penekanan agar kerancuan antara $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0, dan ∞ bisa segera diluruskan, agar siswa mengetahui mana bentuk tentu (*terdefinisi*) dan mana bentuk tak tentu (*tak terdefinisi*).

Sedangkan untuk jawaban dari FD21 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) + \lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 + 4x) && \dots\dots\dots (i) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 + 6x - 5) && \dots\dots\dots (ii) \\ &= 3(3^2) + 6(3) - 5 && \dots\dots\dots (iii) \\ &= 27 + 18 - 5 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut FD21 mampu menginternalisasi metode substitusi dengan baik. Tetapi saat ditanya seputar perubahan dari langkah (i) ke (ii), FD21 kesulitan memberikan alasan. Petikan wawancara dengan FD21:

Peneliti	: <i>Ya sudah ini coba lihat hasil pekerjaanmu ini tertulis $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) + \lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 + 4x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5 + 3x^2 + 4x)$ itu bagaimana kok bisa mendapatkan hasil seperti itu?</i>
FD21	: <i>Ini hanya saya kelompokkan bu, nanti kan hasilnya juga sama bu.</i>
Peneliti	: <i>Apa ada sifat yang menjamin kalau penjumlahan limit fungsi kamu kerjakan sebagaimana jawabanmu tersebut?</i>
FD21	: <i>Peh, angel iki rodok'an. Ada bu teoremanya tapi saya lupa.</i>
Peneliti	: <i>Iya coba saja ceritakan!</i>
FD21	: <i>Gak ingat sama sekali bu, ya pokoknya mengerjakan begitu saja bu.</i>

Dari hasil wawancara tersebut mengindikasikan bahwa FD21 belum mencoba memahami secara konseptual mengenai apa yang telah ditulis dilembar jawabannya. FD21 belum mampu mengaitkan jawabannya (*perubahan dari (i) ke (ii)*) dengan teorema atau sifat-sifat yang berlaku pada limit fungsi, sehingga FD21 tingkat pemahamannya belum sampai pada tahap objek. Pemahaman FD21 masih sebatas pemahaman prosedural.

3) Enkapsulasi: dari Proses ke Objek

Untuk butir soal ini ternyata ada 3 siswa yang pemahaman tentang konsep limit fungsi berada pada tahap objek. Dari 3 siswa 2 diantaranya yaitu siswa FD27 dan FI5 menjawab sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 2x - 5 + 3x^2 + 4x \\ &= 2(3) - 5 + 3(3)^2 + 4(3) \\ &= 6 - 5 + 27 + 12 \\ &= 40\end{aligned}$$

Dari jawaban di atas terlihat bahwa kedua siswa tersebut menggunakan teorema limit fungsi dan selanjutnya dia menggunakan metode yang tepat dalam mencari nilai limitnya yaitu metode substitusi dengan langkah-langkah yang sistematis. Hal ini diperjelas dengan hasil wawancara dengan siswa FD27 berikut:

Peneliti	: ... ada gak cara lain untuk mengerjakan nomer 1a?!
FD27	: Menurut saya ada bu, yaitu dengan teorema yang dituliskan oleh pak Ali. (menunjukkan teorema yang telah ada pada lembar jawabannya)
Peneliti	: Iya benar, lalu setelah itu apa yang kamu lakukan?
FD27	: Saya substitusikan langsung bu.
Peneliti	: Kira-kira kenapa untuk soal nomer 1 ini bisa digunakan substitusi langsung?
FD27	: Karena apabila saya substitusikan ada jawabannya bu.

Dari petikan wawancara di atas siswa FD27 menggunakan teorema limit sebagai dasar langkah-langkah pengerjaannya, dan selanjutnya dia menggunakan metode substitusi langsung karena hasilnya sudah terdefinisi.

Sedangkan 1 siswa lain yaitu siswa FD24 menjawab sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) + \lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 + 4x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 2x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} -5 + \lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 4x \\ &= 2(3) - 5 + 3(3)^2 + 4(3) \\ &= 6 - 5 + 27 + 12 \\ &= 40\end{aligned}$$

Dari jawaban tersebut siswa menggunakan teorema limit $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + g(x)$

$= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$, tetapi saat menggunakan limit pengurangan yang

seharusnya teorema limit $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$, siswa

tersebut masih tampak rancu dengan bentuk perkalian sehingga menuliskan

$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) = \lim_{x \rightarrow 3} 2x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} -5$. Hal tersebut mengindikasikan bahwa siswa belum

mengaitkan skema aljabar yang telah dia miliki sebelumnya dengan konsep limit

fungsi, sehingga dia mengira bentuk $2x \cdot -5$ itu sama dengan $2x - 5$.

4) Tematisasi: dari Objek ke Skema

Dari 40 siswa yang mengikuti tes tertulis ternyata untuk soal nomer 1a yang pemahamannya sudah pada tingkat skema ada 2 mahasiswa, yaitu siswa FI7

dan FI11. Berikut jawaban mereka:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} [f(x) + g(x)] && \dots\dots\dots (i) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} [2x - 5 + 3x^2 + 4x] && \dots\dots\dots (ii)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 3} [3x^2 + 6x - 5] \quad \dots\dots\dots \text{(iii)} \\
 &= 3(3)^2 + 6(3) - 5 \\
 &= 40
 \end{aligned}$$

Dari jawaban tersebut dapat dilihat bahwa ketiga siswa tersebut pada tahap kedua tidak langsung mensubstitusikan nilai $x = 3$ tetapi terlebih dahulu melakukan manipulasi aljabar sehingga bentuknya menjadi lebih sederhana (*lihat langkah iii*). Dalam mengerjakan soal ini kedua siswa tersebut mengintegrasikan pengetahuan baru tentang limit fungsi dan pengetahuan yang telah mereka miliki sebelumnya yaitu tentang konsep aljabar. Berikut petikan wawancara dengan FI7 dan FI11. Petikan wawancara dengan FI7:

Peneliti	: <i>Ini coba kamu lihat langkahmu yang kedua, kenapa tidak kamu substitusikan langsung saja?</i>
FI7	: <i>Bentuk aljabar ini masih saya manipulasi agar menjadi bentuk lebih sederhana lagi bu, untuk memudahkan perhitungan bilamana nanti nilai x nya disubstitusikan.</i>

Petikan wawancara dengan FI11

FI11	: <i>Kita ketahui bahwa $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) + g(x)\}$</i> <i>Jadi, nanti kita bisa substitusikan (sambil menjelaskan jawabannya)</i>
Peneliti	: <i>Coba jelaskan jawabanmu dari langkah dua ketiga!</i>
FI11	: <i>Sebelum saya substitusikan terlebih dahulu saya sederhanakan bu, dari suku-suku yang sejenis saya operasikan jadi satu dulu.</i>

Dari kedua petikan wawancara tersebut ternyata dalam menentukan nilai limit fungsi mereka juga menggunakan manipulasi bentuk aljabar, mereka dapat membedakan suku sejenis dan tidak sejenis dan dapat menyelesaikannya berdasarkan pada teorema limit fungsi.

b. Soal Nomor 2a

1) Aksi

Berdasarkan Tabel 4.2 dan 4.3 ada 18 siswa yang pemahaman tentang konsep limit fungsi berada pada tahap aksi. Dari 18 siswa 3 diantaranya yaitu FI1, FI29, dan FD31 menjawab sebagaimana berikut:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{0}{0} = 0$$

Dari jawaban tersebut terlihat bahwa mereka langsung memasukkan nilai $x = a$ ke dalam suatu fungsi tersebut. Mereka mengoperasikannya sehingga menghasilkan $\frac{0}{0}$. Mereka mengira bahwa $\frac{0}{0}$ itu sama dengan 0. Sehingga menurut mereka nilai limitnya sama dengan 0. Hal ini diperjelas dengan wawancara FD31 sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Sekarang yang nomer 2a, coba jelaskan jawabanmu! Ini kamu pakai metode apa?</i>
FD31	: <i>hmm.. tidak tahu namanya bu. (bingung menjelaskan)</i>
Peneliti	: <i>Substitusi ya?</i>
FD31	: <i>Iya bu.</i>
Peneliti	: <i>Hasilnya berapa jika disubstitusikan?</i>
FD31	: $\frac{0}{0}$ <i>itu sama dengan 0 bu.</i>
Peneliti	: $\frac{0}{0}$ <i>itu sama dengan 0 ya?</i>
FD31	: <i>Iya no bu, masa sama dengan 1? (ucapnya dengan tersenyum)</i>
Peneliti	: <i>Adik tahu tidak bentuk tak tentu itu yang bagaimana?</i>
FD31	: <i>Tidak tahu bu.</i>

Dari petikan wawancara tampak bahwa FD31 tersebut belum mengenal bentuk tak tentu dan belum menguasai tentang metode-metode untuk menentukan

nilai limit fungsi dan apa kegunaannya. Sehingga, saat menjumpai bentuk tak tentu yang seharusnya memakai metode lain, siswa tersebut mengira bahwa sudah seperti itulah hasil akhirnya. Dalam hal ini berarti metode substitusi telah disadari FD31, akan tetapi memilih metode tersebut adalah tidak tepat.

Dari 18 siswa 4 diantaranya yaitu FD2, FI14, FI20, dan F37 menjawab sebagaimana berikut:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{(x-a)}^2}{\cancel{x-a}} \\ &= 1^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut, terlihat bahwa mereka merubah bentuk $x^2 - a^2$ menjadi $(x-a)^2$, kemudian melakukan pencoretan/kanselasi sehingga menghasilkan nilai limitnya sama dengan 1. Berikut petikan wawancara dengan FI20:

Peneliti	: <i>Ini pakai cara apa?</i>
FI20	: <i>Pemfaktoran bu.</i>
Peneliti	: <i>Coba jelaskan!</i>
FI20	: <i>$x^2 - a^2$ itu saya faktorkan menjadi $(x - a)^2$ bu. Kemudian atas dan bawah dicoret, sehingga didapatkan 1^2 berarti jawabannya 1 .</i>
Peneliti	: <i>.....Kira-kira apa alasan adik menggunakan cara pemfaktoran?</i>
FI20	: <i>Karena jikalau disubstitusikan hasilnya $\frac{0}{0}$ bu.</i>

Dari petikan wawancara dengan FI20 terlihat bahwa struktur kognitifnya sudah mampu melakukan perhitungan secara mental dalam hal metode substitusi. FI20 juga menyadari bahwa dengan metode substitusi hasilnya tak tentu sehingga

dia harus menggunakan metode yang lain. Metode yang dipilih oleh FI20 dalam menentukan nilai limit sebenarnya sudah tepat yaitu dengan menggunakan metode pemfaktoran. Akan tetapi FI20 belum mampu menginteriorisasi secara sempurna metode pemfaktoran tersebut, karena hasil pemfaktoran dan kanselasi yang dikerjakan oleh FI20 tidak tepat.

Kesalahan yang dilakukan oleh FD2 juga hampir sama dengan ketiga siswa di atas, FD2 menuliskan jawaban sebagai berikut:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - a^2}{a - a} \dots\dots\dots (i)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(a - a)^2}{a - a} \dots\dots\dots (ii)$$

$$= \frac{(1)^2}{1}$$

$$= 1$$

Berikut petikan wawancara dengan FD2:

Peneliti	: <i>Oke, saya tanya kenapa kok adik tidak pakai substitusi langsung?</i>
FD2	: <i>Kalau pakai substitusi langsung kan jadinya 0 bu. (Sambil menunjukkan jawabannya $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - a^2}{a - a}$) ini hasilnya kan 0 bu jadi kan harus dihindarkan.</i>
Peneliti	: <i>..... kira-kira kalau pakai cara pemfaktoran itu terlebih dahulu disubstitusikan lalu difaktorkan atautah difaktorkan dulu baru disubstitusikan?</i>
FD2	: <i>Difaktorkan dulu baru disubstitusikan bu.hehe</i>
Peneliti	: <i>Lalu, gimana ini?</i>
FD2	: <i>Kebalik bu.hehe</i>

Dari petikan wawancara tersebut terlihat FD2 sudah berusaha merombak dan memodifikasi skema fungsi yang dimilikinya, dengan mengatakan “*ini hasilnya kan 0 bu jadi kan harus dihindarkan*”. Mungkin yang dimaksud FD2 ini

adalah $\frac{0}{0}$ (dalam hal ini memang sebagian siswa sering menganggap $\frac{0}{0}$ itu sama dengan 0). Setelah menyadari bentuk tersebut harus dihindari maka FD2 melanjutkan dengan memfaktorkannya. Kesalahan yang dilakukan oleh FD2 adalah dia melakukan pemfaktoran pada rumus fungsi yang telah disubstitusikan nilai $x = a$ (lihat langkah (i) ke (ii)). Alur penggunaan metode limit fungsi belum sepenuhnya dipahami oleh FD2, karena FD2 mensubstitusikan dulu (lihat langkah (i)) baru melakukan pemfaktoran (lihat langkah (ii)). Dengan demikian, secara umum keempat siswa tersebut belum merasakan metode pemfaktoran sebagai bagian internal dirinya, karena mereka masih sebatas melakukan aktifitas perhitungan dan manipulasi aljabar secara empirik (belum memiliki pemahaman prosedural yang matang).

Beberapa siswa yang lain yaitu FI25 dan FD34 juga menggunakan metode pemfaktoran. Tetapi mereka juga belum mampu melakukan faktorisasi dan kanselasi dengan baik. Nampaknya mereka masih kesulitan memadukan skema fungsi, skema aljabar, dan skema limit fungsi.

Nilai limit fungsi untuk soal nomer 2a ini dapat juga ditentukan dengan metode perkalian dengan sekawan. Dengan metode tersebut akan diperoleh nilai yang sama sebagaimana saat menggunakan metode faktorisasi. Siswa yang menggunakan metode perkalian dengan sekawan adalah FD10, FD12, FD13, dan FD32. Untuk FD12, dan FD32 jawaban mereka sebagaimana berikut:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \cdot \frac{x + a}{x + a} \dots\dots\dots (i)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x + a} && \dots\dots\dots (i) \\
&= \lim_{x \rightarrow a} x + a && \dots\dots\dots (ii) \\
&= x + a && \dots\dots\dots (iv) \\
&= a^2 && \dots\dots\dots (v)
\end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis kedua siswa tersebut, terlihat bahwa sekawan yang dipilih sudah tepat (*lihat langkah (i)*), selanjutnya mereka melakukan kesalahan pada perkalian aljabarnya (*lihat langkah (ii)*). Keterampilan perhitungan dasar yang dimiliki oleh FD12 dan FD32 memang terlihat sangat lemah (*lihat langkah (iii) dan (v)*), sehingga saat menghadapi beberapa operasi yang lebih kompleks mereka akan mengalami kesulitan dan bahkan kesalahan tersebut tidak mereka sadari. Sedangkan siswa yang lain seperti FD10 dan FD13 dalam menentukan sekawannya tidak tepat. Dalam hal ini berarti keempat siswa tersebut belum merasakan metode perkalian sekawan sebagai bagian internal dirinya.

Sedangkan untuk FD26 juga menggunakan metode perkalian dengan sekawan. Jawaban tertulisnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} &= \frac{x^2 - a^2}{x - a} \cdot \frac{x + a}{x + a} && \dots\dots\dots (i) \\
&= \frac{(x^2 - a^2)(x + a)}{(x^2 - a^2)} && \dots\dots\dots (ii) \\
&= x + a && \dots\dots\dots (iii)
\end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut FD26 tidak banyak melibatkan simbol dalam proses pengerjaannya. FD26 terlihat tidak terlalu mempertimbangkan simbol \lim . Peran simbol $\lim_{x \rightarrow a}$ belum sepenuhnya dimaknai oleh FD26, akibatnya untuk jawaban akhir FD26 mengalami ketidaktepatan (*lihat (iii)*). Hal ini

mengindikasikan FD26 belum mampu menginternalisasi metode perkalian dengan sekawan secara sempurna.

Untuk soal nomer 2a juga dapat diselesaikan dengan Teorema d’hopital, yaitu dengan menentukan turunan dari masing-masing fungsinya (*penjelasan tentang Teorema d’hopital terdapat pada bagian materi*). Nilai limit yang dihasilkan melalui Teorema d’hopital juga sama dengan hasil pada saat menggunakan metode pemfaktoran ataupun perkalian sekawan. Sehingga, ada dugaan siswa FD23 proses jawabannya sudah mengarah pada teorema tersebut, karena FD23 menjawab sebagaimana berikut:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \text{ misal, } \begin{array}{ll} u = x^2 - a^2 & v = x - a \\ u' = 2x - 2a = x - a & v' = x + a \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{u'v'}{v} \dots\dots\dots \text{(i)}$$

$$= \frac{(x - a)(x + a)}{(x - a)} \dots\dots\dots \text{(ii)}$$

$$= x + a \dots\dots\dots \text{(iii)}$$

$$= a + a \dots\dots\dots \text{(iv)}$$

$$= 2a \dots\dots\dots \text{(v)}$$

Dari jawaban tertulis tersebut terlihat bahwa FD23 menggunakan konsep turunan dalam menyelesaikan persoalan limit fungsi. Tetapi dalam menentukan nilai u' dan v' tampaknya FD23 masih banyak melakukan kesalahan, misalnya FD23 menganggap a dan x adalah variabel padahal jikalau mengacu pada makna x mendekati a , berarti a adalah suatu bilangan jadi seharusnya jika diturunkan hasilnya 0. hal ini terjadi karena FD23 belum mampu memisahkan unit-unit yang

terpisah-pisah menjadi satu unit konseptual, sehingga terjadi semacam kebingungan pada struktur kognitif FD23. FD23 masih mencampuradukkan dua konsep yang berbeda, padahal mungkin yang digunakan itu bukanlah rumus untuk mencari limit tetapi rumus untuk mencari turunan fungsi. Ini diperjelas dengan petikan wawancara dengan FD23 sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Kemudian nomer 2a!</i>
FD23	: <i>Untuk nomer 2a saya menggunakan rumus turunan bu.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kok adik mengaitkan dengan konsep turunan?</i>
FD23	: <i>Seingat saya ada cara seperti ini bu. (sambil menunjukkan bukunya pada bagian bab defferensial)</i>
Peneliti	: <i>Ini bab mengenai apa dek?</i>
FD23	: <i>Defferensial bu. Saya menggunakan rumus ini cuma seingat saya gitu lho bu. Pokoknya saya ingat ada rumus ini bu.hehe</i>

Dari petikan wawancara tersebut jelas terlihat bahwa FD23 tidak bermaksud menggunakan Teorema d’hopital karena dia tidak memiliki alasan mengapa menggunakan konsep turunan tersebut. FD23 hanya mengandalkan ingatan yang belum terorganisasi dalam struktur kognitifnya, sehingga langkah-langkah yang dilakukan oleh FD23 hanya aktifitas prosedural. Artinya, FD23 belum melakukan internalisasi metode-metode yang dapat digunakannya untuk mencari nilai limit fungsi. Metode-metode tersebut masih berada dalam wilayah eksternal FD23.

Selanjutnya FD3 menuliskan jawaban sebagai berikut:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x^2}{x} - \frac{a^2}{a}}{\frac{x}{x} - \frac{a}{a}} \dots\dots\dots (i)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{a^2}{x^2}}{1 - \frac{a}{x}} \dots\dots\dots (i)$$

$$= \frac{1 - \frac{a^2}{a^2}}{1 - \frac{a}{a}} \dots\dots\dots (ii)$$

$$= \frac{1-1}{1-1} \dots\dots\dots (iv)$$

$$= 0$$

Dari jawaban tertulis tersebut FD3 membagi pembilangnya dengan x^2 dan membagi penyebutnya dengan x (*lihat langkah (i)*). Untuk selanjutnya bentuk tersebut disederhanakan lalu disubstitusikan. FD3 juga beranggapan bahwa $\frac{0}{0}$ itu sama dengan 0. Berikut petikan wawancara dengan FD3.

Peneliti	: <i>Sekarang, sampeyan jelaskan jawaban yang nomer 2a!</i>
FD3	: <i>Ini salah bu, seharusnya caranya tidak seperti ini.</i>
Peneliti	: <i>Kira-kira ini bisa tidak menggunakan cara substitusi langsung? Kalau substitusi langsung hasilnya berapa?</i>
FD3	: <i>Hmm... 0 bu.</i>
Peneliti	: <i>Gini saja coba jelaskan jawabanmu sesuai dengan lembar kerjamu itu, menurut kamu bagaimana?</i>
FD3	: <i>Cara ini harusnya kalau x nya tak hingga bu.</i>

Dari petikan wawancara tersebut FD3 menyadari bahwa cara yang dia gunakan dalam mencari nilai limitnya adalah salah. FD3 sudah mulai berfikir bahwa metode ini seharusnya digunakan pada saat x nya mendekati ∞ . FD3 belum terlalu memahami kegunaan dari masing-masing metode limit fungsi, sehingga pada saat dihadapkan dengan sebuah persoalan dia bingung harus pakai metode yang mana, dan pada akhirnya yang terfikirkan adalah ide yang tidak

menyelesaikan permasalahan. Hal ini terjadi karena metode-metode limit fungsi masih berada di wilayah eksternal dari FD3.

Selanjutnya adalah jawaban tertulis dari FD8 dan FD30:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a)}{(x - a)} && \text{..... (i)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} x + a && \text{..... (ii)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} a + a && \text{..... (iii)} \end{aligned}$$

Pada jawaban tertulis dari FD 8 dan FD30 tersebut secara teoritis tidak sesuai dengan kaidah penulisan jawaban yang tepat. Struktur kognitif mereka rupanya belum mampu memadukan dua simbol yaitu simbol $\lim_{x \rightarrow a}$ dan simbol fungsi. Mereka belum memahami kapan simbol $\lim_{x \rightarrow a} x + a$ disertakan dan kapan simbol tersebut sudah harus dihilangkan. Mereka juga terlihat masih belum mampu menginteriorisasikan struktur kognitifnya secara sempurna, sehingga kesimpulan jawaban yang diberikan kedua subjek tersebut tidak tepat (*lihat (iii)*). Oleh karena itu tingkat pemahaman kedua subjek tersebut belum sampai ke tahap proses.

2) Interiorisasi: dari Aksi ke Proses

Berdasarkan Tabel 4.2 dan 4.3 ada 5 siswa yang pemahaman tentang konsep limit fungsi berada pada tahap proses. Siswa tersebut adalah FD9, FD27, FI33, FI36, dan FI39. Berikut jawaban tertulis mereka:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} &= \frac{(x + a)(\cancel{x - a})}{(\cancel{x - a})} && \text{..... (i)} \\ &= x + a && \text{..... (ii)} \\ &= a + a && \text{..... (iii)} \\ &= 2a && \text{..... (iv)} \end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut bila dicermati secara teoritis akan menimbulkan banyak pertanyaan dan timbul ketidakjelasan. Siswa-siswa tersebut mungkin telah mengabaikan simbol $\lim_{x \rightarrow a}$, karena mereka menganggap bahwa simbol tersebut kosong dari arti. Hal itulah yang menyebabkan tahap per tahap dari langkah pengerjaannya tampak tidak ekuivalen (*lihat langkah (i) ke (ii) ke (iii)*). Mereka belum mampu membedakan kapan simbol $\lim_{x \rightarrow a}$ ini masih disertakan dan kapan simbol tersebut tidak lagi disertakan, ini artinya ada masalah yang berkaitan dengan pemahaman terhadap definisi, teorema atau sifat-sifat limit fungsi. Berikut petikan wawancara dengan FI36 dan FI33.

Petikan wawancara dengan FI36:

Peneliti	: <i>Lalu, untuk penulisan $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x + a)(x - a)}{(x - a)}$ apakah sudah tepat?</i>
FI36	: <i>Hmmm... (berfikir) Kaya'nya belum bu, seharusnya ada $\lim_{x \rightarrow a}$ di depan bentuk $\frac{(x + a)(x - a)}{(x - a)}$. Kemarin lupa bu.</i>
Peneliti	: <i>Menurut adik kenapa kok masih harus ada $\lim_{x \rightarrow a}$ di depan $\frac{(x + a)(x - a)}{(x - a)}$ ini?</i>
FI36	: <i>Hmmm... Tidak tahu bu.</i>

Petikan wawancara dengan FI33:

Peneliti	: <i>Penulisan seperti jawabanmu ini menurut adik adakah yang kira-kira belum tepat? coba tunjukkan!</i>
FI33	: <i>Hmm.. iya sudah tepat.</i>

Dari petikan wawancara tersebut terlihat bahwa FI36 dan FI33 memang belum mampu memaknai simbol $\lim_{x \rightarrow a}$. Sehingga mereka sekedar melakukan perhitungan-perhitungan secara eksplisit. Dalam hal ini berarti mereka belum mampu mengaitkan pengetahuannya dengan definisi limit ataupun teorema limit.

Bila kembali kepada model jawaban mereka di atas terlihat bahwa mereka melakukan faktorisasi untuk menentukan nilai limit fungsi tersebut. Hal ini sesuai dengan petikan wawancara dengan FI36 dan FI33 sebagai berikut:

Petikan wawancara dengan FI36:

Peneliti	: <i>Sekarang coba jelaskan jawabanmu yang nomer 2!</i>
FI36	: <i>Saya menggunakan faktorisasi bu.</i>
Peneliti	: <i>Alasan menggunakan faktorisasi apa dek?</i>
FI36	: <i>Yang lebih mudah pakai ini bu.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa tidak pake cara substitusi langsung saja?</i>
FI36	: <i>Karena pakai cara substitusi sulit bu.</i>

Petikan wawancara dengan FI33:

FI33	: <i>Nomer 2 memakai metode pemfaktoran.</i>
.....	
Peneliti	: <i>Kenapa adik memakai metode pemfaktoran?</i>
FI33	: <i>Karena kalau menggunakan metode sustitusi langsung hasilnya tak tentu.</i>
Peneliti	: <i>Hasilnya berapa kira-kira kalau substitusi langsung?</i>
FI33	: <i>Hasilnya $\frac{a}{a}$.</i>
Peneliti	: <i>Heh,</i>
FI33	: <i>eh $\frac{0}{0}$ bu. (sambil berfikir)</i>

Dari kedua petikan wawancara di atas dapat diketahui bahwa mereka telah menggunakan metode pemfaktoran untuk menentukan nilai limit fungsinya.

Berdasarkan jawaban tertulis tersebut sebenarnya mereka telah mampu menginternalisasi metode pemfaktoran, akan tetapi pada saat wawancara mereka belum mampu mengklarifikasi jawabannya secara tepat yang mengarah pada pemahaman secara konseptual (yang berhubungan dengan definisi dan teorema limit).

3) Enkapsulasi: dari Proses ke Objek

Berdasarkan Tabel 4.2 dan 4.3 ada 15 siswa yang pemahaman tentang konsep limit fungsi berada pada tahap objek. Siswa tersebut adalah FI5, FI7, FI11, FD15, FD16, FI17, FD18, FD19, FD21, FI22, FD24, FD28, FI35, FD38, dan FI40. Berikut adalah jawaban mereka:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(\cancel{x - a})}{(\cancel{x - a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x + a) \\ &= a + a \\ &= 2a \end{aligned}$$

Dari jawaban tersebut terlihat bahwa mereka sudah mampu memilih metode yang tepat dalam menentukan nilai limit fungsi yaitu dengan metode pemfaktoran. Di samping itu mereka juga telah memahami simbol $\lim_{x \rightarrow a}$, sehingga setiap langkah pengerjaannya tetap memperhatikan simbol tersebut, dan tidak hanya beranggapan bahwa simbol tersebut kosong dari arti. Dengan kata lain, mereka melangkah dengan tetap berpedoman pada teorema limit fungsi. Hal ini sebagaimana petikan wawancara dengan FI5 dan FI7.

Petikan wawancara dengan FI5 sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Coba sekarang jelaskan jawabanmu yang nomer 2!</i>
FI5	: <i>Untuk soal nomer 2 saya menggunakan metode pemfaktoran bu terlebih dahulu $x^2 - a^2$ saya faktorkan sehingga didapatkan $(x+a)(x-a)$, kemudian saya coret dengan penyebutnya $(x-a)$ sehingga menghasilkan nilai satu. (sambil menunjukkan pekerjaannya). Setelah itu saya cari nilai limitnya dengan cara substitusi dan hasilnya $2a$.</i>

Petikan wawancara dengan FI7 sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Coba sekarang jelaskan proses jawabanmu $2a$!</i>
FI7	: <i>Saya menggunakan metode pemfaktoran bu terlebih dahulu $x^2 - a^2$ saya faktorkan sehingga didapatkan $(x+a)(x-a)$, kemudian saya coret dengan penyebutnya $(x-a)$. Sehingga menghasilkan $\lim_{x \rightarrow a} (x+a)$ (sambil menunjukkan pekerjaannya). Setelah itu saya cari nilai limitnya dengan cara substitusi menghasilkan $a + a = 2a$.</i>

Dari petikan wawancara di atas terlihat bahwa pada setiap langkah jawaban mereka tidak melupakan teorema-teorema yang terdapat pada limit fungsi, buktinya mereka dapat membedakan saat simbol $\lim_{x \rightarrow a}$ masih digunakan dan bilamana simbol $\lim_{x \rightarrow a}$ sudah tidak digunakan dengan mengatakan “Setelah itu saya cari nilai limitnya dengan cara substitusi menghasilkan $a + a = 2a$ ” yang artinya bahwa setelah melakukan substitusi berarti simbol $\lim_{x \rightarrow a}$ sudah tidak disertakan lagi. Hal ini sesuai dengan teorema limit fungsi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

4) Tematisasi: dari Objek ke Skema

Untuk nomer $2a$ ini tidak ada siswa yang pemahamannya sampai pada tahap skema.

c. Soal Nomor 2b

1) Aksi

Dari tabel 4.2 dan 4.3 terdapat 24 siswa yang pemahamannya tentang konsep limit fungsi berada tahap aksi, mereka adalah FD3, FD8, FD9, FD10, FD12, FD13, FD15, FD16, FI17, FD18, FI20, FI22, FD24, FI25, FD26, FI29, FD30, FD31, FD32, FD34, FI36, FD38, FD39, FI40,. Ada beberapa tipe jawaban siswa yang dapat dikategorikan pada tahap aksi, karena pada dasarnya penyelesaian soal 2b ini diinterpretasikan oleh siswa dengan cara yang berbeda-beda. Tipe di sini tidak diartikan sebagai tingkat jawaban benar/mungkin kurang benar akan tetapi hanya diartikan sebagai macam-macam dari jawaban siswa. Berikut adalah tipe jawaban siswa yang dimaksud:

➤ Tipe jawaban *pertama* (jawaban dari FD30 dan FD38)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} \\ &= \frac{1 - \frac{2 \cdot \infty}{\infty} + \frac{3 \cdot \infty}{\infty} - \frac{2}{\infty}}{\frac{3 \cdot \infty}{\infty} - \frac{2 \cdot \infty}{\infty} + \frac{1}{\infty}} \\ &= \frac{1}{\infty} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Dari jawaban tersebut terlihat bahwa mereka menggunakan metode penyederhanaan dengan “*membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi dari penyebut*”. Dengan kata lain, pembilang dan penyebutnya sama-

sama dibagi dengan x^5 . Tetapi pada saat penyederhanaan bentuk pangkat tersebut mereka hanya menyederhanakan bagian $\frac{x^5}{x^5}$ saja, sedangkan bagian yang lain yang masih bisa disederhanakan mereka biarkan begitu saja. Untuk langkah selanjutnya mereka mensubstitusikan nilai $x = \infty$. Mereka nampaknya belum menyadari bahwa mereka menemui kembali bentuk $\frac{\infty}{\infty}$, padahal tujuan awal menggunakan metode “membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi dari penyebut” adalah menghindari bentuk tak tentu dari $\frac{\infty}{\infty}$, berarti dalam hal ini mereka belum menginternalisasi metode ini sebagai bagian dari dirinya. Berikut petikan wawancara dengan FD38:

Peneliti	: <i>Coba ceritakan jawabanmu yang nomer 2b!</i>
FD38	: <i>Saya membagi dengan x^5.</i>
Peneliti	: <i>Tujuan adik menggunakan metode ini apa?</i>
FD38	: <i>Kemaren pernah ada contoh dari pak Ali yang seperti ini bu.</i>
Peneliti	: <i>Ada tidak alasan yang lebih matematis?</i>
FD38	: <i>Kalau disubstitusikan hasilnya $\frac{0}{0}$ bu.</i>

Dari wawancara dengan FD38 tersebut terlihat bahwa dia tidak memahami penggunaan atau fungsi dari metode penyelesaian yang telah dia gunakan untuk menentukan nilai limit fungsi. Dia hanya mengikuti cara yang pernah diberikan oleh guru pada soal-soal yang hampir mirip. Sehingga untuk langkah selanjutnya dia kurang memahami jawabannya sendiri dan akhirnya tujuan yang sebenarnya

adalah menghindari bentuk $\frac{\infty}{\infty}$ dia abaikan, hal ini terjadi karena dia belum memahami mengenai bentuk-bentuk tak tentu pada limit fungsi.

➤ Tipe jawaban *kedua* (jawaban dari FI20 dan FD24)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} \cdot \frac{3x^5 + 2x + 1}{3x^5 + 2x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2)(\cancel{3x^5 + 2x + 1})}{(\cancel{3x^5 - 2x + 1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 + x^2 - 2) \\
 &= \infty + \infty - 2 \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut terlihat bahwa mereka bermaksud menggunakan metode “*perkalian dengan sekawan*”, tetapi rupanya mereka tidak faham yang dimaksud dengan metode “*perkalian dengan sekawan*” yang sebenarnya itu adalah dikalikan dengan faktor sekawan dari penyebut, mereka memaknai perkalian sekawan itu hanyalah merubah suatu tanda dengan lawannya, yaitu dengan merubah tanda positif menjadi tanda negatif atau sebaliknya. Hal ini diperjelas dengan hasil wawancara dengan FI20 sebagaimana berikut:

Peneliti	: Coba sekarang jelaskan jawabanmu 2b!
FI20	: Kan soalnya ini bu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1}$ bu, lalu saya kalikan dengan sekawannya dari $3x^5 - 2x + 1$. Sekawannya bentuk tersebut adalah $3x^5 + 2x + 1$ bu jadi saya kalikan dengan $\frac{3x^5 + 2x + 1}{3x^5 + 2x + 1}$ bu. Sehingga didapatkan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} \cdot \frac{3x^5 + 2x + 1}{3x^5 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2)(3x^5 + 2x + 1)}{(3x^5 - 2x + 1)}$ lalu bentuk itu saya coret bu seperti ini (menunjukkan jawabannya $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2)(\cancel{3x^5 + 2x + 1})}{(\cancel{3x^5 - 2x + 1})}$)
Peneliti	: Selanjutnya langkah kamu apa?
FI20	: Saya substitusikan bu sehingga didapatkan hasilnya ∞ bu.

Dari petikan wawancara dengan FI20 tersebut terlihat bahwa dia menentukan bentuk sekawan yang salah, dan setelah dikalikan pun dia juga masih melakukan kesalahan tepatnya pada perkalian pada bagian penyebut. Tampaknya terjadi semacam kerancuan di benak FI20 dengan konsep perkalian sekawan pada bentuk akar sehingga dapat dikatakan bahwa FI20 menganalogikan soal ini dengan soal lain yang sebenarnya berbeda, hal ini jelas terlihat pada hasil perkalian bagian penyebutnya yaitu dari $(3x^5 - 2x + 1) \cdot (3x^5 + 2x + 1)$ yang menurutnya akan didapatkan hasil $(3x^5 - 2x + 1)$, padahal hasil yang seperti itu terjadi pada saat $\sqrt{(3x^5 - 2x + 1)} \cdot \sqrt{(3x^5 - 2x + 1)}$, kemungkinan besar struktur kognitif pada FI20 belum menyadari bahwa bentuk tersebut berbeda. Pada saat wawancara FI20 tidak merasakan ada kesalahan pada perhitungannya ini. Dengan kata lain, FI20 hanya melakukan aktifitas prosedural dan belum menginternalisasi metode limit fungsi.

➤ Tipe jawaban *ketiga* (jawaban dari FD16 dan FI36)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} = \frac{a}{p} = \frac{1}{3}$$

Pada jawaban tertulis siswa ini sekilas masing kosong dari makna, karena tidak diberikan proses pengerjaan yang detail, hanya saja langsung ditentukan jawaban akhir. Sehingga sangat perlu diingat kembali bahwa pada materi limit fungsi SMA, siswa juga diajarkan dengan rumus-rumus instan yang terkadang diberikan oleh guru untuk memudahkan siswa dalam menentukan nilai limit suatu fungsi.

Hal ini sebagaimana petikan wawancara dengan FI36:

FI36	: <i>Iya bu, katanya pak Ali bisa dikerjakan begini misalkan (di kertas itu tertulis $\frac{a^m + Bx}{p^n + \dots}$) jika $m = n$ maka limitnya sama dengan $\frac{a}{p}$.</i>
Peneliti	: <i>untuk m dan n itu pangkatnya apa dek?</i>
FI36	: <i>(mulai sadar dan befikir) o iya ya bu ini seharusnya ada x nya disini (dia menambahkan sehingga tertulis $\frac{ax^m + Bx}{px^n + \dots}$).</i>
Peneliti	: <i>Coba jelaskan apa maksudnya?</i>
FI36	: <i>m dan n pangkat tertinggi bu, dan letaknya pasti yang paling kiri.</i>
Peneliti	: <i>Adakah cara lain dalam mengerjakan soal ini? Yang tidak melalui terkaan seperti ini?</i>
FI36	: <i>Mungkin ada bu, tapi saya belum bisa. Saya lupa bu.</i>

Dari petikan wawancara dengan FI36 ternyata dia mampu menjelaskan berdasarkan rumus cepat yang telah diberikan oleh guru, meskipun dalam

menjawabnya sebenarnya dia masih dengan cara coba-coba. Berarti mereka belum mampu menggunakan metode limit fungsi secara sempurna.

➤ Tipe jawaban *keempat* (Jawaban dari FD3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} && \dots \text{(i)} \\ &= \dots && \dots \text{(ii)} \\ &= \frac{1 - \frac{2\infty^2}{\infty^5} + \frac{3\infty^2}{\infty^5} - \frac{2}{\infty^5}}{3 - \frac{2\infty}{\infty^5} + \frac{1}{\infty^5}} && \dots \text{(iii)} \\ &= \frac{1}{3} && \dots \text{(iv)} \end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut, terlihat bahwa FD3 membagi fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan x^5 . Untuk langkah selanjutnya FD3 melakukan penyederhanaan bentuk pecahan yang pangkat dari variabel x nya sama, tetapi pada pecahan yang pangkat dari variabel x nya berbeda FD3 melakukan substitusi langsung $x = \infty$ dan tidak disederhanakan terlebih dahulu (*lihat langkah (iii)*). Berikut petikan wawancara dengan FD3:

Peneliti	: <i>Sekarang jelaskan jawabanmu 2b!</i>
FD3	: <i>Saya tidak bisa melanjutkan bu.</i>
Peneliti	: <i>Adik pakai metode apa?</i>
FD3	: <i>Pokok'e membagi dengan pangkat x yang terbesar.</i>

Dari petikan wawancara dengan FD3 tersebut terlihat bahwa metode yang dipilih untuk menentukan nilai limit fungsinya sudah tepat yaitu dengan membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut. Menurut hasil wawancara tersebut FD3 merasakan ada langkah yang *missing* (*lihat langkah (ii)*) dengan mengatakan

“saya tidak bisa melanjutkan bu”. Selanjutnya, apabila dicermati lebih dalam lagi ternyata FD3 melakukan perhitungan yang masih menemui bentuk $\frac{\infty}{\infty}$, tetapi FD3 tidak menyadari bentuk tak tentu tersebut, padahal tujuan menggunakan sebuah metode tertentu adalah untuk menghindari bentuk tak tentu. Berdasarkan hasil wawancara memang terbukti bahwa FD3 belum memahami bentuk tak tentu dan menganggap bahwa $\frac{\infty}{\infty}$ itu sama dengan 0. Berikut petikan wawancaranya:

Peneliti	: Kemudian $\frac{2x^2}{x^5}$ kamu apakan ini?
FD3	: Saya substitusikan bu.
Peneliti	: Berarti $\frac{\infty}{\infty}$ ya?
FD3	: Iya bu.
Peneliti	: Lalu hasilnya $\frac{\infty}{\infty}$ berapa dek?
FD3	: 0 bu.hehe

Dari beberapa petikan wawancara tersebut mengindikasikan bahwa FD3 hanya sekedar melakukan kegiatan prosedural dan belum memahami benar prosedur dari langkah-langkah pengerjaannya itu dari segi definisi ataupun teori. Artinya, FD3 belum mampu menginternalisasi metode membagi dengan pangkat tertinggi sebagai bagian dari dirinya.

➤ Tipe jawaban *kelima* (Jawaban dari FD9, FD10, FI17, FD18, FI25, dan FD32)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 3x^2 - 2}{1} \dots\dots\dots (i)$$

Dari jawaban tertulis kelima siswa tersebut terlihat bahwa mereka mengalami *misunderstanding* konsep yang sama, hal ini terlihat pada langkah pertama yang mereka kerjakan (*lihat langkah (i)*). Mereka mengalami kesalahan dalam hal mempersepsi antara makna perkalian dengan penjumlahan/pengurangan. Mereka mengira bahwa pencoretan (kansulasi) juga berlaku pada kasus penjumlahan/pengurangan, padahal sifat-sifat yang dimiliki oleh operasi penjumlahan/pengurangan dan perkalian itu tidaklah sama. Hal ini mengindikasikan bahwa mereka belum mampu menginternalisasi metode limit fungsi sebagai bagian dari dirinya.

➤ Tipe jawaban *keenam* (Jawaban dari FD27)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^5} + \frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{3 - \frac{2}{x^5} + \frac{1}{x^5}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}}{3 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut, terlihat bahwa FD27 membagi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan x^5 . Untuk langkah selanjutnya FD27 melakukan penyederhanaan bentuk pecahan yang pangkat dari variabel x nya sama, tetapi pada pecahan yang pangkat dari variabel x nya berbeda FD27 belum mampu melakukan

penyederhanaan yang tepat yaitu dia mengubah bentuk pecahan tersebut menjadi bentuk yang tidak senilai. Petikan wawancara dengan FD27 sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Lalu ini, $\frac{2x^2}{x^5}$ kenapa kok hasilnya menjadi $\frac{2}{x^5}$ ini adik jadikan apa?</i>
FD27	: <i>x nya saya hilangkan bu.</i>
Peneliti	: <i>Kok dihilangkan apa alasannya?</i>
FD27	: <i>Ya sudah insting saya bu seperti ini.</i>
Peneliti	: <i>Insting itu apa sih?</i>
FD27	: <i>hehe, iya bu saya kan tahu metode-metode nya tapi cuma sedikit walaupun ditanya pasti lupa. Pokoknya kalau bisa saya kerjakan ya saya kerjakan kalau tidak ya tidak bu.</i>

Dari petikan wawancara dengan FD27 tersebut memperjelas bahwa FD27 kurang memahami secara prosedural pada jawabannya dengan mengatakan bahwa jawabannya hanya melalui “*insting*”. FD27 tidak mengetahui kesalahannya terletak dimana. Hal ini mengindikasikan bahwa FD27 hanya melakukan aktifitas prosedural.

2) Interiorisasi: dari Aksi ke Proses

Dari tabel 4.2 dan 4.3 terdapat 8 siswa yang pemahamannya tentang konsep limit fungsi berada tahap proses. Siswa tersebut adalah FD2, FI5, FI7, FI11, FD19, FD21, FD28, dan FI33. Ada 5 tipe jawaban siswa yang dapat dikategorikan pada tahap proses.

➤ Tipe jawaban *pertama* (jawaban dari FD2, FI5 dan FD28) sebagai berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} \dots\dots\dots (i)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^5}}{3 - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}} \quad \dots\dots\dots (ii) \\
&= \frac{1 - 0 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} \quad \dots\dots\dots (iii) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Pada jawaban tertulis siswa tersebut, mereka membagi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan x^5 , lalu menyederhanakannya dengan menggunakan aturan pangkat (*lihat langkah (ii)*). Selanjutnya mereka mengerti bahwa yang masih berbentuk $\frac{2}{x}$, $\frac{3}{x^3}$, $\frac{2}{x^5}$, $\frac{2}{x^4}$, dan $\frac{1}{x^5}$ adalah menjadi 0 (*lihat langkah (iii)*). Perubahan bentuk tersebut dipahami oleh siswa hanya sebagai ketentuan yang sumbernya dari guru, tanpa mempunyai argumen secara teoritis. Berikut adalah petikan wawancara dengan FD2 dan FD28:

Petikan wawancara dengan FD2:

FD2	: Untuk nomer 2b saya menggunakan metode dengan membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut. (menjelaskan jawabannya di lembar jawabannya).
Peneliti	: Nah, itu pada langkahmu yang ketiga muncul angka 0? Itu apa alasannya kira-kira?
FD2	: Apa ya bu? Kemarin dari pak Ali contohnya begitu bu.
Peneliti	: Mungkin ada sifat/teorema yang menjamin?, atau mungkin kamu memahaminya bagaimana?
FD2	: Tidak tahu bu, cuma tahu contoh dari pak Ali begitu bu.

Dari petikan wawancara FD2 terlihat sudah mampu memilih dan menggunakan metode yang tepat dalam menentukan nilai limitnya, akan tetapi saat ditanya lebih lanjut tentang langkah-langkah jawabannya FD2 lebih banyak

memberikan alasan yang menyiratkan FD2 masih terpaku pada pekerjaan guru. Dengan kata lain, FD2 dalam mengerjakan soal 2b belum memiliki bekal konseptual yang matang untuk mendukung argumennya, dia hanya sekedar meniru pola pengerjaan dari guru. Hal ini juga senada dengan hasil wawancara FI5 berikut ini:

Peneliti	: <i>Nah, itu pada langkahmu yang ketiga muncul angka 0? Itu apa alasannya kira-kira?</i>
FI5	: <i>Hmm... (diam dan terlihat masih belum menemukan jawaban)</i>
Peneliti	: <i>Mungkin ada sifat/teorema yang menjamin?, atau mungkin kamu memahaminya bagaimana?</i>
FI5	: <i>Hmm... (masih terdiam)</i>
Peneliti	: <i>Berarti alasan mendapatkan 0 itu apa?</i>
FI5	: <i>Tidak tahu bu</i>

Dari kedua petikan wawancara di atas mereka sudah mampu menjelaskan alasan dalam memilih metode penyelesaiannya yang tepat dan mereka juga sudah mampu menginternalisasi metode tersebut. Akan tetapi pemahaman konseptual yang dimiliki kedua siswa masih kurang. Hal ini terlihat pada saat mereka ditanya mengapa bentuk $\frac{2}{x}, \frac{3}{x^3}, \frac{2}{x^5}, \frac{2}{x^4}$, dan $\frac{1}{x^5}$ dapat disamadengankan dengan 0. Mereka belum mampu memberikan alasan mengenai pertanyaan tersebut menurut definisi ataupun teorema limit fungsi, karena mereka cenderung hanya menganalogikan dengan soal yang hampir serupa dari contoh-contoh yang telah diberikan dengan guru.

➤ Tipe jawaban *kedua* (jawaban dari FI11, FD21 dan FI33) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} && \dots\dots\dots \text{(i)} \\ &= \frac{1 - 0 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} && \dots\dots\dots \text{(ii)} \\ &= \frac{1}{3} && \dots\dots\dots \text{(iii)} \end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis siswa tersebut terlihat bahwa mereka membagi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan x^5 , tanpa melakukan penyederhanaan bentuk pangkat terlebih dahulu. Pada tahap selanjutnya mereka merubah bentuk $\frac{2x^2}{x^5}, \frac{3x^2}{x^5}, \frac{2}{x^5},$

$\frac{2x}{x^5}$, dan $\frac{1}{x^5}$ adalah menjadi 0. Selanjutnya mereka mendapatkan nilai limitnya yaitu $\frac{1}{3}$, yang merupakan jawaban akhir yang benar. Berikut adalah petikan wawancara dengan FD21 dan FI33.

wawancara dengan FD21 dan FI33.

Petikan wawancara dengan FD21:

Peneliti	: Sekarang perhatikan dari jawabanmu ini $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} = \frac{1 + 0 - 0}{3 - 0 + 0}$ coba jelaskan maksudnya bagaimana?
FD21	: Kemaren katanya pak Ali kalau pangkatnya sama berarti sama dengan 1 bu, sedangkan kalau pangkat yang di atas lebih kecil dari pada pangkat penyebutnya sama dengan 0.

Petikan wawancara dengan FI33:

Peneliti	: <i>Coba jelaskan dari langkah satu ke langkah selanjutnya.</i>
FI33	: <i>Ya tadi kan penyebutnya tertinggi x^5 jadi semuanya dibagi dengan x^5 . kan $\frac{x^5}{x^5}$ sama dengan 1, sedangkan $\frac{2x^2}{x^5} = \frac{2}{x^3}$ kalau dimasukkan $x = \infty$ kan sama dengan 0 bu.</i>

Dari petikan wawancara dengan FD21 dan FI33 terlihat bahwa mereka dapat menjelaskan jawabannya secara prosedural dengan baik. Dalam beberapa hal alasannya diperkuat dengan menunjukkan “*katanya pak Ali kalau...*” berarti mereka sudah faham dengan penjelasan dari guru dan mampu mengaplikasikannya. Akan tetapi mereka belum mampu bila harus memberikan alasan secara definisi intuitif ataupun berdasarkan teorema. Dalam hal ini berarti mereka telah mampu menginternalisasi metode dengan baik, meskipun masih melalui pemahaman secara prosedural. Sedangkan untuk FI11 jawaban tertulis di atas dia kerjakan pada saat melakukan wawancara. Pada mulanya FI11 hanya menuliskan jawaban di lembar kerjanya hanya sebagai berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} = \frac{1}{3}$$

Dari jawabannya yang tanpa melalui langkah-langkah yang nyata tersebut, dia mampu menjelaskan alasan mendapatkan jawabannya tersebut secara lengkap. Dia mengatakan bahwa “*jika pangkat tertingginya sama berarti jawabannya sama dengan koefisien yang atas dibagi dengan yang bawah*”. FI11 ternyata tidak hanya mampu melakukan cara coba-coba seperti ini, tetapi pada saat wawancara dia juga mampu menentukan nilai limitnya dengan menggunakan metode “*membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut*” sebagaimana jawaban tertulis

dari FD21 dan FI33. Sehingga dapat dikatakan bahwa ketiga siswa tersebut telah mampu menginternalisasi sebuah metode sebagai bagian dari dirinya.

➤ Tipe jawaban *ketiga* (jawaban dari FI7 dan FD19) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} + \frac{x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^5}}{3 - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{\infty^3} - \frac{2}{\infty^5}}{3 - \frac{2}{\infty^4} + \frac{1}{\infty^5}} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis siswa tersebut terlihat bahwa sebelum mereka membagi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan x^5 , mereka menyederhanakan bentuk aljabarnya. Mereka juga dapat menggunakan penyederhanaan bentuk pangkat dengan baik.. Pada tahap selanjutnya mereka mensubstitusikan $x = \infty$ ke dalam fungsi yang telah disederhanakan tersebut, dan menuliskan hasil substitusinya masih dalam bentuk ∞^3 , ∞^4 , dan ∞^5 . Kemudian mereka dapatkan jawaban akhirnya adalah $\frac{1}{3}$, yang merupakan jawaban akhir yang benar. Berikut adalah petikan wawancara dengan FI7 dan FD 19.

Petikan wawancara dengan FI7 sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Oke, sekarang bisa dijelaskan hasil pengerjaanmu itu? Kok muncul angka 0. Bagaimana penjelasannya?</i>
FI7	: <i>Wah bu, saya tidak tahu, saya kemaren mengikuti contoh dari pak Ali yang kebetulan soalnya hampir mirip.</i>
Peneliti	: <i>Mungkin ada sifat/teorema yang menjamin?, atau mungkin kamu memahaminya bagaimana?</i>
FI7	: <i>(Diam dan tersenyum). Hmmm... Saya tidak tahu bu.</i>

Dari hasil petikan wawancara dengan FI7 tersebut terlihat bahwa dia belum dapat menjelaskan alasan dari hasil 0 yang dia tulis. Berarti FI7 belum memahami arti/makna secara konseptual, akan tetapi masih sebatas memahami secara prosedural saja. FI7 menganalogikan hasil jawabannya sebagaimana contoh soal yang pernah diberikan oleh guru dengan mengatakan “*saya kemaren mengikuti contoh dari pak Ali yang kebetulan soalnya hampir mirip*”.

3) Enkapsulasi: dari Proses ke Objek

Untuk nomer 2b ini tidak ada siswa yang pemahamannya sampai pada tahap objek.

4) Tematisasi: dari Objek ke Skema

Untuk nomer 2b ini tidak ada siswa yang pemahamannya sampai pada tahap skema.

d. Soal Nomor 3

1) Aksi

Dari tabel 4.2 dan 4.3 terdapat 14 siswa yang pemahamannya tentang konsep limit fungsi berada tahap aksi.

Ketujuh siswa yaitu FI1, FD2, FD8, FD9, FD39, FD30, dan FD31. Tipe jawaban mereka sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{(4)^2 + 9}}{4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{16 + 9}}{4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis di atas terlihat bahwa mereka mensubstitusikan nilai $x = 4$ ke dalam fungsi $\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}$. Mereka belum memaknai simbol $\lim_{x \rightarrow 4}$ sebagai suatu objek, sehingga meskipun mereka telah mensubstitusikan nilai x ke dalam fungsi tersebut simbol $\lim_{x \rightarrow 4}$ masih mereka tulis. Hal ini terjadi karena definisi dan teorema limit belum diinternalisasi.

Sedangkan ketujuh siswa lainnya, yaitu FD13, FI14, ED16, FI17, FD26, FD28, dan FI25. Tipe jawaban mereka adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{(4)^2 + 9}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{16 + 9}}{4} \\ &= \frac{4 + 3}{4} \\ &= 3 \quad \text{atau,} \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 3}{4} \\ &= \frac{\sqrt{16 + 9}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4+3}{4} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut terlihat bahwa mereka sebenarnya sudah memilih metode yang tepat yaitu metode substitusi langsung. Akan tetapi ada kesalahan dalam memahami bentuk $\sqrt{a+b}$ mereka menyamakan bentuk tersebut dengan $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, padahal bentuk keduanya tidaklah saling ekuivalen. Mungkin mereka menganalogikan bentuk tersebut dengan perkaliannya, karena kita ketahui bahwa $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Dugaan ini ternyata terbukti setelah melakukan wawancara dengan FD28 berikut ini:

Peneliti	: <i>Sekarang coba nomer 3 kamu teliti lagi! Menurut kamu ada kesalahan dimana?</i>
FD28	: <i>(diam dan tidak bisa menjawab)</i>
Peneliti	: <i>Coba sekarang ubahlah soal ini ke bentuk yang ekuivalen berdasarkan sifat-sifat akar, menurut kamu bagaimana? (peneliti menuliskan $\sqrt{a+b}$ dan $\sqrt{a \cdot b}$)</i>
FD28	: <i>Kalau yang $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ dan $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$</i>

Dari hasil wawancara tersebut terlihat bahwa FD28 kehilangan pengetahuan tentang konsep matematika dasar, yakni menyamakan sifat perkalian dengan penjumlahan. Dalam hal ini berarti mereka belum mampu menginternalisasikan metode substitusi dengan baik. Oleh sebab itu tingkat pemahaman mereka belum mencapai tahap proses.

2) Interiorisasi: dari Aksi ke Proses

Dari tabel 4.2 dan 4.3 terdapat 17 siswa yang pemahamannya tentang konsep limit fungsi berada tahap proses yaitu FI5, FI7, FD10, FI11, FD12, FD15,

FD19, FI20, FI22, FD24, FD27, FI29, FD32, FD34, FI35, F37, dan FD38. Pola jawaban mereka sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} &= \frac{\sqrt{(4)^2 + 9}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{16 + 9}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut mereka menentukan nilai limit dengan jalan substitusi langsung yakni mensubstitusikan nilai $x = 4$ ke dalam suatu fungsi

$\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)}$. Mereka telah mampu menggunakan substitusi langsung dengan baik

dan mendapatkan hasil yang benar pula. Akan tetapi pada soal permintaannya adalah “*Tentukan nilai limit fungsi dengan menggunakan Teorema Limit*”, dan mereka terlihat belum mampu menggunakan Teorema Limit. Berikut petikan wawancara dengan FI7, FD24, dan FD27.

Petikan wawancara dengan FI7:

Peneliti	: <i>Coba sekarang jelaskan jawabanmu yang nomer 3!</i>
FI7	: <i>Saya pakai cara substitusi langsung, karena saya lupa bu teoremanya.</i>

Petikan wawancara dengan FD24:

Peneliti	: <i>Sekarang coba jelaskan jawabanmu nomer 3! Kenapa kamu menggunakan substitusi langsung?</i>
FD24	: <i>Karena hasilnya tidak $\frac{0}{0}$.</i>
Peneliti	: <i>Untuk soal nomer 3 sebenarnya saya suruh menggunakan teorema, kenapa adik tidak menggunakan teorema dalam mengerjakan?</i>
FD24	: <i>Lupa caranya bu.</i>

Petikan wawancara dengan FD27:

Peneliti	: <i>Oke, sekarang coba jelaskan jawabanmu nomer 3?</i>
FD27	: <i>InsyaAllah menggunakan teorema bu.</i>
Peneliti	: <i>Teorema yang mana dek?</i>
FD27	: <i>Bukan bu, ini substitusi bu.hehe</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kok menggunakan substitusi langsung. Padahal ini saya suruh jelaskan teoremanya kan?</i>
FD27	: <i>Iya bu kan saya lupa bu teoremanya.hehe</i>
Peneliti	: <i>Ya sudah, trus alasan kamu menggunakan substitusi langsung kenapa?</i>
FD27	: <i>Gini bu, kalau nanti hasilnya tidak $\frac{0}{0}$ berarti bisa langsung bu.</i>

Dari ketiga petikan wawancara di atas dapat disimpulkan bahwa mereka dapat menggunakan metode substitusi dengan baik serta mampu menjelaskan alasan menggunakan metode tersebut, akan tetapi mereka belum bisa menerapkan teorema limit fungsi. Sedangkan untuk FI5 yang awalnya tingkat pemahamannya berada pada tahap aksi meningkat pada tahap proses, karena dalam wawancara FI5 dapat memperbaiki jawabannya. Sebagaimana petikan wawancara berikut ini:

Peneliti	: <i>Langkah selanjutnya?</i>
FI5	: <i>Saya substitusikan bu.</i>
Peneliti	: <i>Apakah setelah kamu substitusikan nilainya benar seperti itu?</i>
FI5	: <i>Bukan bu? Ada yang salah ini. Seharusnya jawabannya $\frac{5}{4}$.</i>
Peneliti	: <i>Apakah adik tahu dimana letak kesalahanmu?</i>
FI5	: <i>Gini bu seharusnya $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$</i>

Dari hasil wawancara tersebut FI5 dapat, memperbaiki jawabannya sehingga FI5 sudah mampu menggunakan metode substitusi langsung dengan benar dan tepat.

Sedangkan, salah satu dari mereka yakni FI11 sebenarnya sudah berfikir ke arah teorema limit akan tetapi hanya pada tahap satu saja dia mampu melakukan langkah-langkah yang diharapkan oleh soal, dan untuk tahap selanjutnya dia melakukan substitusi langsung tanpa mengacu pada teorema limit.

Berikut adalah jawaban dari FI11:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 9}}{\lim_{x \rightarrow 4} x} \\
 &= \frac{\sqrt{16 + 9}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{25}}{4} \\
 &= \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

Dari jawaban tersebut sebenarnya FI11 sudah mampu mengarahkan proses jawabannya menuju perintah dalam soal. Hal ini diperjelas dengan hasil wawancara dengan FI11 sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Selanjutnya untuk soal nomer 3, coba jelaskan bagaimana jawabanmu?</i>
FI11	: <i>Ini saya gunakan teorema limit fungsi yaitu bahwa</i> $\lim_{x \rightarrow a} \frac{ax}{bx} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} ax}{\lim_{x \rightarrow a} bx}$ <i>setelah itu baru saya substitusi.</i>

Dari petikan wawancara tersebut terlihat bahwa FI11 sudah berfikir ke arah konsep akan tetapi dia belum mampu memahami konsep tersebut secara sempurna, sehingga pemahaman dari FI11 masih sebatas pemahaman secara prosedural.

3) Enkapsulasi: dari Proses ke Objek

Untuk nomer 3 ini tidak ada siswa yang pemahamannya sampai pada tahap objek.

4) Tematisasi: dari Objek ke Skema

Untuk nomer 3 ini tidak ada siswa yang pemahamannya sampai pada tahap skema.

e. Soal Nomor 4

1) Aksi

Dari tabel 4.2 dan 4.3 terdapat 29 siswa yang pemahamannya tentang konsep limit fungsi berada tahap aksi yaitu FI1, FD2, FD3, FI4, FI5, FD8, FD9,

FD10, FI11, FD15, FD16, FI17, FD18, FI20, FD21, FI22, FD23, FD24, FI25, FD26, FD28, FD30, FD31, FI33, FI35, FI36, FD38, FD39, dan FI40. Secara umum ke 29 siswa tersebut belum dapat menggunakan metode yang tepat dalam menjawab soal nomer 4. Hal tersebut dikarenakan ada pengetahuan mereka yang hilang tanpa mereka sadari dan keterbatasan mereka dalam memahami berbagai teorema limit fungsi. Sehingga jawaban mereka cenderung salah dan kurang tepat. Seperti jawaban tertulis FI40 sebagaimana berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \sin^2 2x)}{4x^2} && \dots\dots\dots (i) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{4x^2} && \dots\dots\dots (ii) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \right) && \dots\dots\dots (iii) \\ &= \frac{2}{4} \cdot 0 \cdot 0 = 0 && \dots\dots\dots (iv) \end{aligned}$$

Dari jawaban FI40 tersebut terlihat ada kesalahan pada langkah (i) yaitu dalam menetapkan bentuk yang ekuivalen dengan $\cos 2x$, artinya konsep trigonometri FI40 sudah mulai terlupa. Kemudian pada langkah (ii) FI40 juga terlihat masih lemah dalam melakukan operasi pengurangan. Hal ini sebagaimana petikan wawancara dengan FI40 berikut:

Peneliti	: <i>Sekarang coba jelaskan jawabanmu yang nomer 4!</i>
FI40	: <i>(membaca soal). Saya menggunakan rumus sudut rangkap bu dimana $\cos 2x = 1 - \sin^2 2x$</i>
Peneliti	: <i>Menurut sampeyan bentuk itu benar sudah ekuivalen?</i>
FI40	: <i>Benar mungkin bu.</i>
Peneliti	: <i>Ini coba sampeyan teliti jawabanmu dulu. Ada kesalahan apa tidak?</i>
FI40	: <i>Tidak ada bu kayaknya.</i>

Dari hasil wawancara dengan FI40 tersebut, terlihat bahwa kesalahan yang telah dilakukan oleh FI40 ini tidak dia sadari. FI40 merasa pekerjaannya sudah benar, padahal pada bagian tersebut pengetahuan FI40 ada yang hilang. Hal ini mengindikasikan bahwa FI40 belum mampu mengkonstruksi mentalnya menuju pemahaman secara prosedural.

Sedangkan untuk jawaban FD2 berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \sin^2 x)}{4x^2} && \dots\dots\dots (i) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{4x^2} && \dots\dots\dots (ii) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} && \dots\dots\dots (iii) \\ &= \frac{2}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{4} && \dots\dots\dots (iv) \end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut, terlihat bahwa FD21 juga melakukan kesalahan yang hampir mirip dengan FI40. Pada langkah (i) FD21 kurang tepat dalam menentukan bentuk ekuivalen dari $\cos 2x$, artinya konsep trigonometri FD21 sudah mulai terlupa. Tetapi untuk langkah selanjutnya sebenarnya FD21 telah menuliskan algoritma yang benar. Hanya saja dari awal FD21 dalam mengubah bentuk $\cos 2x$ belum tepat, akibatnya proses pekerjaannya sampai akhir juga mengalami kesalahan. Berikut petikan wawancara dengan FD21:

FD21	: <i>Cos 2x saya ubah menjadi bentuk $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$</i>
Peneliti	: <i>Bentuk ekuivalen dari $\cos 2x$ benar seperti itu ya?</i>
FD21	: <i>Menurut saya benar bu.</i>
Peneliti	: <i>Adik kurang tepat, yang benar $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, iya coba nanti bukunya kelas satu bab tentang trigonometri dibuka lagi ya?</i>
FD21	: <i>O iya bu.</i>

Dari hasil wawancara dengan FD21 tersebut terlihat bahwa FD21 belum dapat menggunakan metode tersebut dengan benar dan tepat. Sehingga tingkat pemahaman FD21 juga masih sama dengan FI40 yaitu berada pada tahap aksi.

Tipe jawaban selanjutnya adalah jawaban dari FI22 berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \sin^2 x)}{4x^2} \dots\dots\dots (i)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sin^2 x}{4x^2} \dots\dots\dots (ii)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \dots\dots\dots (iii)$$

$$= \frac{2}{4} \cdot 1 \cdot 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

Dari jawaban tertulis FI22 tersebut terlihat bahwa pada langkah (i) yakni perubahan bentuk dari $\cos 2x$ menjadi $1 - \sin^2 x$ adalah dua buah bentuk yang tidak ekuivalen (sama), sehingga akibatnya FI22 sama dengan merubah bentuk soal awal. Dan bila dicermati lagi perubahan dari langkah (i) ke (ii) rupanya FI22 juga masih melakukan kesalahan dalam mengoperasikan. Hingga selanjutnya penggunaan teorema yang dilakukan oleh FI22 juga tidak sesuai dengan ide konsepnya. Hal ini berarti FI22 belum mampu menggunakan metode ini dengan baik. FI22 belum merasakan seluruh prosedur limit fungsi sebagai bagian internal dirinya.

Secara umum siswa yang berada pada tahap aksi ini masih melakukan aktifitas berupa perhitungan dan manipulasi aljabar secara empirik. Karena struktur kognitif mereka belum mampu melakukan perhitungan secara mental

dalam hal prosedur limit fungsi tersebut, maka tingkat pemahaman mereka belum mencapai tahap proses.

2) Interiorisasi: dari Aksi ke Proses

Dari tabel 4.2 dan 4.3 terdapat 6 siswa yang pemahamannya tentang konsep limit fungsi berada tahap proses yaitu FI7, FD12, FD19, FD27, FI29, dan FD32. Pola jawaban mereka sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{4x^2} && \dots\dots\dots (i) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{4x^2} && \dots\dots\dots (ii) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} && \dots\dots\dots (iii) \\ &= \frac{2}{4} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut terlihat bahwa langkah pertama yang mereka lakukan adalah mencari bentuk ekuivalen dari $\cos 2x$. Mereka mengetahui bahwa $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Kemudian mengoperasikannya menjadi bentuk yang lebih sederhana. Pada langkah selanjutnya terdapat penggunaan “*teorema limit perkalian*”, tetapi saat ditanya perubahan dari (ii) ke (iii) ternyata mereka tidak terlalu memahami perubahan tersebut. Hal ini sebagaimana petikan wawancara dengan FI7 dan FD27 sebagai berikut:

Petikan wawancara dengan FI7:

Peneliti	: <i>Sehingga sini ke sini (menunjukkan jawaban FI7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$) perubahan seperti itu dasarnya apa?</i>
FI7	: <i>Hmm... tidak tahu bu tetapi memang dulu pernah ada contoh yang seperti ini.</i>
Peneliti	: <i>Coba saya tunjukkan sebuah teorema ini Teorema $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ kamu tahu teorema ini?</i>
FI7	: <i>Tahu bu.</i>
Peneliti	: <i>Kira-kira bisa tidak menggunakan teorema ini tadi untuk menjawab dasar langkah-langkah jawaban kamu tadi?</i>
FI7	: <i>Iya bisa bu. (menulis jawaban seperti berikut $\frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} x}$).</i>
Peneliti	: <i>Lalu? Sudah cukup kah?</i>
FI7	: <i>Iya bu sudah. (kelihatan masih bingung dengan jawabannya sendiri).</i>

Petikan wawancara dengan FD27:

Peneliti	: <i>Iya, oke. Lanjut ke nomer 4. Tolong jelaskan jawabanmu!</i>
FD27	: <i>Ini itu di buku yang dituliskan pak Ali ada bu, walaupun saya tidak belajar tapi saya hapal bu nilainya.hehehe</i>
Peneliti	: <i>Ya sudah coba jelaskan jawabanmu!</i>
FD27	: <i>Ini pokoknya menurut teorema bu.</i>

Dari petikan wawancara di atas terlihat bahwa FI7 dan FD27 masih merasa kesulitan saat disuruh menjelaskan seputar alasan dari langkah (i) ke (ii), padahal sudah diberikan rambu-rambu berupa teorema limit perkalian. Hal ini

mengindikasikan bahwa mereka masih memahami penyelesaiannya dari segi proseduralnya saja. Kemungkinan besar mereka menjawab dengan menganalogikan dengan soal-soal yang sejenis atau hampir mirip. Sehingga jika ditanya seputar alasan secara formal/konseptual mereka masih kesulitan.

3) Enkapsulasi: dari Proses ke Objek

Untuk nomer 4 ini tidak ada siswa yang pemahamannya sampai pada tahap objek.

4) Tematisasi: dari Objek ke Skema

Untuk nomer 4 ini tidak ada siswa yang pemahamannya sampai pada tahap skema.

2. Tingkat Pemahaman Siswa Ditinjau dari Gaya Kognitif

Pada bagian ini akan dibahas penyajian data yang berupa tingkat pemahaman siswa dengan memperhatikan gaya kognitif. Penyajian data pada bagian ini meliputi persentase tingkat pemahaman siswa GK-FD dan GK-FI berdasarkan Teori APOS. Cara yang digunakan untuk mengetahui tingkat pemahaman siswa dari masing-masing gaya kognitif adalah sama sebagaimana menentukan tingkat pemahaman siswa secara umum. Bedanya, pada bagian ini penyajian data dilakukan dengan memperhatikan perbedaan gaya kognitif siswa. Untuk lebih jelasnya mengenai tingkat pemahaman siswa, disajikan pada Tabel 4.3.1 untuk siswa GK-FD dan Tabel 4.3.2 untuk siswa GK-FI.

Tabel 4.3.1 Jumlah dan Persentase Tingkat Pemahaman Siswa GK-FD mengenai Konsep Limit Fungsi Berdasarkan Teori APOS

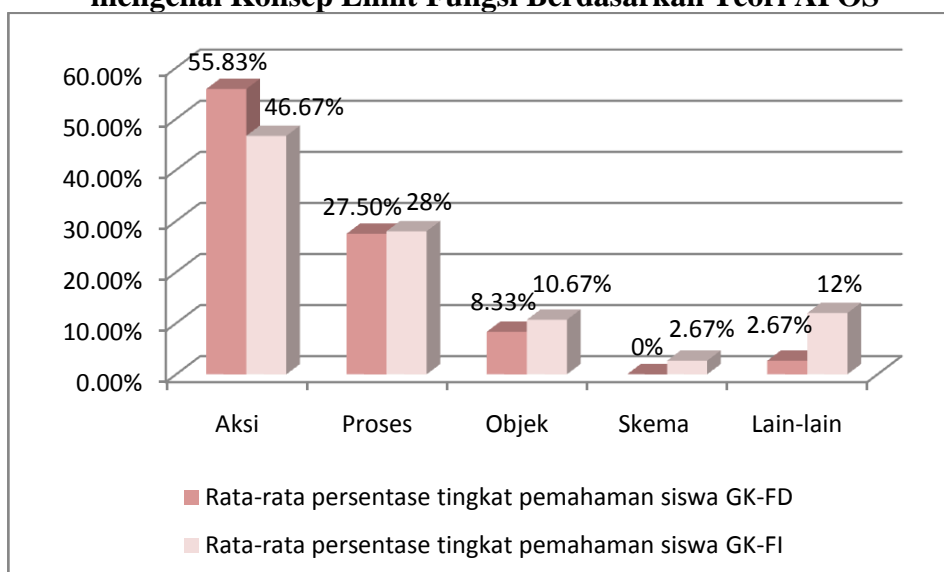
No. Soal	Jumlah/ Persentase	Tingkat Pemahaman Siswa					Total
		Aksi	Proses	Objek	Skema	Lain-lain	
1	Jumlah	9	12	2	0	1	24
	Persentase	37,5%	50%	8,33%	0%	4,17%	100%
2a	Jumlah	11	4	8	0	1	24
	Persentase	45,83%	16,67%	33,33%	0%	4,17%	100%
2b	Jumlah	17	5	0	0	2	24
	Persentase	70,83%	20,83%	0%	0%	8,33%	100%
3	Jumlah	13	8	0	0	3	24
	Persentase	54,17%	33,33%	0%	0%	12,5%	100%
4	Jumlah	17	4	0	0	3	24
	Persentase	54,17%	16,67%	0%	0%	12,5%	100%
Rata-rata	Jumlah	13,4	6,6	2	0	2	24
	Persentase	55,83%	27,5%	8,33%	0%	8,33%	100%
Total		67	33	10	0	10	120

Tabel 4.3.2 Jumlah dan Persentase Tingkat Pemahaman Siswa GK-FI mengenai Konsep Limit Fungsi Berdasarkan Teori APOS

No. Soal	Jumlah/ Persentase	Tingkat Pemahaman Siswa					Total
		Aksi	Proses	Objek	Skema	Lain-lain	
1	Jumlah	4	6	1	2	2	15
	Persentase	26,67%	40%	6,67%	13,33%	13,33%	100%
2a	Jumlah	5	2	7	0	1	15
	Persentase	33,33%	13,33%	46,67%	0%	6,67%	100%
2b	Jumlah	7	4	0	0	4	15
	Persentase	46,67%	26,67%	0%	0%	26,67%	100%
3	Jumlah	7	7	0	0	1	15
	Persentase	46,67%	46,67%	0%	0%	6,67%	100%
4	Jumlah	12	2	0	0	1	15
	Persentase	80%	13,33%	0%	0%	6,67%	100%
Rata-rata	Jumlah	7	4,2	1,6	0,4	1,8	15
	Persentase	46,67%	28%	10,67%	2,67%	12%	100%
Total		35	21	8	2	9	75

Persentase rata-rata tingkat pemahaman berdasarkan Teori APOS ditinjau dari gaya kognitif siswa *field dependent* dan *field independent* dapat dilihat pada diagram berikut:

Gambar 4.1 Diagram Persentase Tingkat Pemahaman Siswa GK-FI mengenai Konsep Limit Fungsi Berdasarkan Teori APOS



Dari diagram di atas, dapat dilihat bahwa secara umum persentase rata-rata tingkat pemahaman dari masing-masing gaya kognitif sama-sama masih berada

pada tahap aksi. Pada tahap aksi, persentase rata-rata tingkat pemahaman siswa GK-FD $>$ GK-FI dengan selisih 9,16%. Pada tahap proses, persentase rata-rata tingkat pemahaman siswa GK-FD $<$ GK-FI dengan selisih 0,5%. Pada tahap objek, persentase rata-rata tingkat pemahaman siswa GK-FD $<$ GK-FI dengan selisih 2,34%. Pada tahap skema hanya mampu dicapai oleh siswa GK-FI dengan persentase 2,67%.

Berikut ini diuraikan lebih rinci data yang telah dikumpulkan dengan berbagai tingkat pemahaman siswa pada saat menyelesaikan soal-soal limit fungsi dalam kerangka Teori APOS yang ditinjau dari gaya kognitif siswa. Hal ini dilakukan untuk memudahkan peneliti dalam melihat strategi kognitif dari masing-masing gaya kognitif dalam menyelesaikan persoalan limit fungsi. Oleh karena itu pemaparan data disajikan per gaya kognitif dengan perwakilan masing-masing gaya kognitif sebanyak 3 siswa., sehingga total ada 6 siswa. Pemilihan 6 siswa berdasarkan pertimbangan bahwa mereka dianggap sudah mampu mewakili dari masing-masing kelompok gaya kognitif (*representatif*). Selanjutnya, analisis data tersebut disajikan dengan pembahasan persiswa secara individu.

i. Wawancara dengan Siswa Bergaya Kognitif *Field Dependent* (GK-FD)

a) Wawancara dengan FD21

Berikut jawaban tertulis FD21 *Untuk soal nomer 1*,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) + \lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 + 4x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 + 6x - 5 \\ &= 3(3^2) + 6(3) - 5 \\ &= 27 + 18 - 5 = 40\end{aligned}$$

Meskipun jawaban FD21 dalam lembar jawabannya benar, tetapi FD21 masih kurang mampu menjelaskan seputar strateginya untuk memperoleh jawaban tersebut. Hal ini sebagaimana petikan wawancara dengan FD21 sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Ya sudah ini coba lihat hasil pekerjaanmu ini tertulis $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) + \lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 + 4x) = \lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 + 6x - 5)$ itu bagaimana kok bisa mendapatkan hasil seperti itu?</i>
FD21	: <i>Ini hanya saya kelompokkan bu, nanti kan hasilnya juga sama bu.</i>
Peneliti	: <i>Adakah sifat yang menjamin kalau penjumlahan limit fungsi kamu kerjakan sebagaimana jawabanmu tersebut?</i>
FD21	: <i>Peh, angel iki rodok'an. Ada bu teoremnya tapi saya lupa.</i>
Peneliti	: <i>Iya coba saja ceritakan!</i>
FD21	: <i>Gak ingat sama sekali bu, ya pokoknya mengerjakan begitu saja bu.</i>

Dari hasil wawancara tersebut FD21 belum menunjukkan pemahaman secara konseptual yang baik, karena saat ditanya mengenai strategi dalam menjawabnya FD21 belum memanfaatkan sifat-sifat yang ada pada limit fungsi. Hal tersebut nampak saat FD21 memberikan jawaban "*Gak ingat sama sekali bu*,

ya pokoknya mengerjakan begitu saja bu". Walaupun FD21 belum memanfaatkan teorema ataupun sifat-sifat limit fungsi, akan tetapi dari segi prosedural FD21 sudah mampu menginternalisasi metode limit fungsi dengan baik. Oleh karena itu, tingkat pemahaman FD21 berada pada tahap proses.

Berikut jawaban tertulis FD21 *Untuk soal nomer 2a*,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(\cancel{x - a})}{(\cancel{x - a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x + a) \\ &= a + a \\ &= 2a\end{aligned}$$

FD21 sudah tepat dalam menentukan nilai limit fungsinya, akan tetapi FD21 belum mampu menamai metode-metode limit fungsi. Hal ini sebagaimana petikan wawancara berikut:

Peneliti	: Nah, sekarang nomer 2a coba jelaskan bagaimana jawabanmu!
FD21	: Saya jawab berdasarkan pengalaman bu. Kan dulu pernah ada contoh seperti ini bu.
Peneliti	: Coba sekarang ceritakan saja jawabannmu! Ini kamu namanya pakai metode apa?
FD21	: Mencari akar persamaan bu.

Selanjutnya, dalam langkah-langkah jawabannya secara prosedural FD21 mampu menjawab dengan benar. Meskipun dalam wawancara sudah dicoba untuk diarahkan FD21 tampaknya masih belum menunjukkan pengetahuannya secara konseptual. Hal ini sebagaimana petikan wawancara berikut:

Peneliti	: <i>Coba ini dari $\frac{x-a}{x-a}$ ini kamu apakan?</i>
FD21	: <i>Dicoret bu.</i>
Peneliti	: <i>Sehingga hasilnya berapa?</i>
FD21	: <i>0 bu, eh 1 apa 0 ya? 1 bu.</i>
Peneliti	: <i>Kemudian untuk langkah (iii) ke (iv) itu bedanya apa?</i>
FD21	: <i>Kalau yang langkah ketiga masih ada simbol limitnya bu.</i>
Peneliti	: <i>Lalu kenapa pada langkah ketiga sudah tidak ada simbol limitnya?</i>
FD21	: <i>Karena sudah disubstitusikan bu.</i>

Dari petikan wawancara tersebut, ternyata FD21 sudah mampu menginternalisasi metode limit fungsi dengan baik dengan melakukan pencoretan tersebut. Selanjutnya, FD21 juga menunjukkan pemahaman tentang teorema substitusi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat pemahaman FD21 sudah berada pada tahap objek.

Berikut jawaban tertulis FD21 **Untuk soal nomer 2b**,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} &= \frac{x^5 + x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} && \dots\dots\dots \text{(i)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} + \frac{x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} && \dots\dots\dots \text{(ii)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 0 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} && \dots\dots\dots \text{(iii)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

FD21 sudah menentukan nilai limit fungsinya dengan benar. Akan tetapi saat FD21 disuruh menjelaskan seputar jawabannya FD21 terlihat masih kesulitan.

Peneliti	: <i>Sekarang kita lanjut dengan jawabanmu 2b. Coba jelaskan!</i>
FD21	: (Berpikir lama tanpa berkata apapun)
Peneliti	: <i>Ayo jelaskan saja proses jawabanmu itu! Cara yang seperti pekerjaanmu itu apa istilahnya?</i>
FD21	: <i>Opo yo jenenge? (Sambil berpikir). Saya tidak tahu namanya bu, pokoknya saya kalikan dengan $\frac{1}{x^5}$ bu.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kok adik memilih $\frac{1}{x^5}$ sebagai pengalinya?</i>
FD21	: <i>Hmmm.... Apa ya bu?</i>

Dari hasil wawancara tersebut, FD21 belum mampu menjelaskan alasan mengapa dia menggunakan metode tersebut. Dalam memilih metode limit fungsi FD21 kurang mempertimbangkan alasan-alasan yang bersumber dari fikirannya. Hal ini sebagaimana petikan wawancara sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Sekarang perhatikan dari jawabanmu ini</i> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{3x^5} - \frac{x^2}{2x} - \frac{2}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5} - \frac{x^5}{x^5} + \frac{1}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+0-0}{3-0+0}$ <i>coba jelaskan maksudnya bagaimana?</i>
FD21	: <i>Kemaren katanya pak Ali kalau pangkatnya sama berarti sama dengan 1 bu, sedangkan kalau pangkat yang di atas lebih kecil dari pada pangkat penyebutnya sama dengan 0.</i>

Dalam menjawab pertanyaan wawancara seputar jawaban tertulisnya, FD21 hampir belum mampu mengaitkan langkah-langkah jawabannya dengan alasan yang sesuai dengan aturan (teoritis), FD21 hanya memberikan alasan berdasarkan kata-kata dari guru (meniru pola). Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat pemahamannya berada pada tahap proses.

Berikut jawaban tertulis FD21 *Untuk soal nomer 3,*

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 9}{x\sqrt{x^2 + 9}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{x^2}{x} + \frac{9}{x}}{x\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + 9}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 0}{1\sqrt{1 + 0}} \\
 &= \frac{4}{1.1} = 4
 \end{aligned}$$

FD21 memilih metode limit fungsi yang tidak tepat karena FD21 terkecoh dengan bentuk akar pada limit fungsi tersebut. Berikut petikan wawancara dengan FD21:

Peneliti	: <i>Sekarang coba jelaskan jawabanmu yang nomer 3!</i>
FD21	: <i>Ini apa ya jenenge yo?</i>
Peneliti	: <i>Dikalikan...?</i>
FD21	: <i>Dikalikan sekawan.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa pakai metode perkalian dengan sekawan?</i>
FD21	: <i>Karena akarnya tidak sama.</i>

Dari petikan wawancara tersebut FD21 sebenarnya menganalogikan soal tersebut dengan soal-soal yang telah dia temui sebelumnya. Mungkin pada beberapa soal yang telah ditemui sebelumnya, jika limit fungsi yang berbentuk akar berarti metode yang digunakan adalah perkalian dengan sekawan. Dalam hal ini FD21 belum menyadari bahwa pertama kali dalam menentukan nilai suatu limit fungsi adalah menggunakan metode substitusi langsung, baru jika hasilnya

tak terdefinisi (tak tentu) maka harus menggunakan metode lain. Hal ini sebagaimana petikan wawancara dengan FD21 sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Trus kenapa kok ini dikalikan dengan sekawan?</i>
FD21	: <i>Hmmm.. wayahe $\frac{5}{4}$ yo.(menghitung dalam imajinasi)</i>
Peneliti	: <i>Lalu menurut kamu cara yang seperti pekerjaanmu tadi tepat atau tidak?</i>
FD21	: <i>Tidak tahu bu.hehe</i>

Dari hasil wawancara tersebut, dalam memilih metode limit fungsi FD21 belum memiliki alur pemrosesan yang terstruktur. Yaitu, FD21 tidak mencoba metode substitusi langsung terlebih dahulu. FD21 terburu-buru menggunakan metode lain (perkalian sekawan) dalam menghitung nilai limit fungsinya. Hal ini terjadi karena pengalaman FD21 dalam kasus lain, bahwa pada saat menemui limit yang fungsinya berbentuk akar biasanya menggunakan metode perkalian dengan sekawan.

Walaupun pada saat wawancara FD21 juga mencoba dengan cara substitusi langsung (dalam imajinasi) dan menghasilkan jawaban $\frac{5}{4}$, tetapi di saat ditanya tentang jawabannya dengan metode perkalian sekawannya tadi tepat atau tidak FD21 belum mampu memutuskan bahwa metode perkalian sekawan tadi tidaklah tepat, dikarenakan nilai limit fungsi sudah terdefinisi hanya dengan menggunakan substitusi langsung. Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat pemahaman FD21 masih berada pada tahap aksi.

Berikut jawaban tertulis FD21 *Untuk soal nomer 4*,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \sin^2 x)}{4x^2} \dots\dots\dots (i)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{4x^2} \dots\dots\dots \text{(ii)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \dots\dots\dots \text{(iii)}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4} \dots\dots\dots \text{(iv)}$$

FD21 belum mampu melakukan manipulasi aljabar dengan baik karena kesalahan FD21 dalam mengubah bentuk yang ekuivalen dari $\cos 2x$. Sebagaimana petikan wawancara berikut:

Peneliti	: Okelah, sekarang lanjut saja ya. Ke nomer berikutnya.
FD21	: Cos 2x saya ubah menjadi bentuk $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$
Peneliti	: Bentuk ekuivalen dari $\cos 2x$ benar seperti itu ya?
FD21	: Menurut saya benar bu.

Dari hasil wawancara tersebut FD21 belum menyadari kesalahannya dalam merubah bentuk yang ekuivalen dengan $\cos 2x$. Dalam hal ini berarti FD21 belum menginternalisasi metode limit fungsi sebagai bagian internal dari dirinya. Oleh karena itu tingkat pemahaman FD21 masih berada pada tahap aksi.

b) Wawancara dengan FD27

Berikut jawaban tertulis FD27 *Untuk soal nomer 1*,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 2x - 5 + 3x^2 + 4x \\ &= 2(3) - 5 + 3(3)^2 + 4(3) \\ &= 6 - 5 + 27 + 12 \\ &= 1 + 27 + 12 \\ &= 40 \end{aligned}$$

FD27 sudah mampu menggunakan metode limit fungsi yang tepat dalam menentukan nilai limit fungsinya. FD27 memilih metode substitusi langsung dan mampu menggunakan metode tersebut dengan baik. Akan tetapi saat ditanya seputar alasan menggunakan substitusi langsung berikut jawaban FD27:

Peneliti	: <i>Coba pean liat dulu jawabanmu, metode apa yang kamu gunakan dalam menjawab nomer 1a ini?</i>
FD27	: <i>Metode, hmmm metode sub... (menjawab dengan ragu-ragu)</i>
Peneliti	: <i>Iya jawab saja metode apa dek?</i>
FD27	: <i>Substitusi bu.</i>
Peneliti	: <i>Iya bagus, ini namanya substitusi langsung. Lalu, alasan adik menggunakan cara substitusi langsung apa?</i>
FD27	: <i>Karena kalau menggunakan cara substitusi langsung bisa langsung ketemu jawabannya bu.</i>
Peneliti	: <i>Maksudnya langsung ketemu jawabannya bagaimana? Atau mungkin yang dikatakan tidak ada jawabannya itu bagaimana?</i>
FD27	: <i>Pokoknya kalau sudah pada soal yang sulit-sulit bu.</i>

Dari hasil wawancara tersebut FD27 kurang mampu menjelaskan hasil jawabannya dengan baik. FD27 juga belum mampu memberikan alasan mengenai penggunaan metode substitusi langsung tersebut dengan berkenaan bentuk yang sudah terdefinisi jika $x = 3$. Terlepas dari hal tersebut, untuk nomer 1 ini ternyata FD27 juga mampu menggunakan cara lain dengan mengacu pada teorema penjumlahan limit fungsi. Oleh karena FD27 memiliki pemahaman konseptual yang berkenaan dengan teorema limit fungsi berarti tingkat pemahaman FD27 berada pada tahap proses.

Berikut jawaban tertulis FD27 *Untuk soal nomer 2a,*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\cancel{x-a})(x+a)}{\cancel{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} x + a \\ &= x + a \\ &= a + a = 2a\end{aligned}$$

Nampaknya FD27 juga merasa kesulitan dalam menjelaskan seputar jawaban tertulisnya tersebut, meskipun jika dilihat dari jawaban tertulisnya sudah sempurna. Berikut petikan wawancaranya:

Peneliti	: <i>Coba sekarang jelaskan jawabanmu yang nomer 2a!</i>
FD27	: <i>Menurut saya berdasarkan yang dibelajarkan oleh pak Ali bu, pada waktu pelajaran matematika bu ya caranya seperti ini bu.</i>
Peneliti	: <i>Cara yang seperti ini namanya apa?</i>
FD27	: <i>Kalau disuruh menyebutkan metode saya tidak tahu bu.</i>
Peneliti	: <i>Coba ini ke sini namanya diapakan? (menunjuk $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a)}{(x - a)}$)</i>
FD27	: <i>Saya tidak ngerti bu. Ini hanya insting saya bu.</i>
Peneliti	: <i>Perhatikan! Berarti kan bentuk $x^2 - a^2$ sampeyan rubah dulu ke bentuk $(x + a)(x - a)$ ini namanya apa?</i>
FD27	: <i>Diakarkan bu.</i>

Dari hasil wawancara tersebut, FD27 nampak kesulitan dalam menjelaskan langkah-langkah pengerjaannya. FD27 tidak terlalu peduli dengan nama dari metode-metode limit fungsi, walau sebenarnya dia mampu menggunakannya metode tersebut untuk mencari nilai dari limit fungsi. kemudian

saat FD27 ditanya seputar alasan menggunakan metode tersebut berikut jawabannya:

Peneliti	: <i>Nah, sekarang apa alasan kamu menjawab nomer 2a dengan cara pemfaktoran? Kenapa tidak kamu substitusikan langsung?</i>
FD27	: <i>Karena bentuknya kuadrat-kuadrat bu.</i>

Dari hasil wawancara tersebut FD27 belum mampu memberikan alasan mengapa menggunakan metode limit fungsi tersebut, FD27 menunjukkannya dengan mengatakan “*Karena bentuknya kuadrat-kuadrat bu*”, padahal tidak selamanya bentuk limit kuadrat-kuadrat bisa digunakan metode sebagaimana jawaban FD27 tersebut. Meskipun secara prosedural jawaban FD27 benar, akan tetapi FD27 belum mengaitkan definisi ataupun teorema untuk memperkuat jawaban tertulisnya tersebut. Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat pemahaman FD27 masih berada pada tahap proses.

Berikut jawaban tertulis FD27 *Untuk soal nomer 2b*,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} \dots\dots\dots (i)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^5} + \frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{3 - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}} \dots\dots\dots (ii)$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{3 - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{\infty^5}}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}}{3 + \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{3}$$

FD27 dapat menentukan nilai limit fungsi dengan menggunakan metode yang tepat. Berikut petikan wawancara seputar jawabannya tersebut:

Peneliti	: <i>Sekarang coba kamu jelaskan jawaban kamu yang nomer 2b!</i>
FD27	: <i>Pangkat yang lebih besar itu dijadikan penyebut. Kan pangkat tertingginya x^5 jadi semuanya dibagi x^5 gitu bu.</i>
Peneliti	: <i>Ya cara yang kamu lakukan ini namanya metode apa dek?</i>
FD27	: <i>Saya itu tidak mengerti tentang nama metode bu, sukur mengerjakan gitu bu, penting ada jawabannya.</i>

Dari hasil wawancara tersebut FD27 mampu menjelaskan tentang langkah pertama dari jawabannya tersebut. Penjelasan mengenai perubahan dari langkah (i) ke langkah (ii) dijelaskan dalam petikan wawancara berikut:

Peneliti	: <i>Sekarang coba jelaskan langkahmu yang pertama menuju langkah kedua</i>
FD27	: $\frac{x^5}{x^5}$ <i>kan sama dengan 1 bu, karena sama. hehe</i>
Peneliti	: <i>Lalu ini, $\frac{2x^2}{x^5}$ kenapa kok hasilnya menjadi $\frac{2}{x^5}$ ini adik jadikan apa?</i>
FD27	: <i>x nya saya hilangkan bu.</i>

Dari hasil wawancara tersebut terlihat FD27 belum mengetahui bahwa sebenarnya bentuk tersebut harus disederhanakan. Artinya, FD27 belum memiliki pemahaman konsep yang baik. Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat pemahaman FD27 berada pada tahap proses.

Berikut jawaban tertulis FD27 *Untuk soal nomer 3,*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 9}}{\lim_{x \rightarrow 4} x} \\ &= \frac{\sqrt{16 + 9}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

FD27 belum mampu mengerjakan sebagaimana permintaan soal, yang meminta menentukan nilai limit dengan berdasarkan pada teorema/sifat-sifat limit fungsi. Tetapi dia menggunakan metode substitusi langsung dan mampu melakukannya dengan langkah-langkah dan proses yang benar. Berikut petikan wawancara dengan FD27:

Peneliti	: <i>Oke, sekarang coba jelaskan jawabanmu nomer 3?</i>
FD27	: <i>InsyaAllah menggunakan teorema bu.</i>
Peneliti	: <i>Teorema yang mana dek?</i>
FD27	: <i>Bukan bu, ini substitusi bu.hehe</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kok menggunakan substitusi langsung. Padahal ini saya suruh jelaskan teoremanya kan?</i>
FD27	: <i>Iya bu kan saya lupa bu teoremanya.hehe</i>

Walaupun FD27 belum banyak melibatkan teorema sebagaimana soal yang diminta, akan tetapi FD27 dapat memilih metode yang tepat dalam menentukan nilai limit fungsi tersebut. Karena FD27 belum melibatkan teorema dalam pengerjaannya, oleh karena itu tingkat pemahaman FD27 masih berada pada tahap proses.

Berikut jawaban tertulis FD27 *Untuk soal nomer 4,*

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{4x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{4x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\
 &= \frac{2}{4} \cdot 1 \cdot 1 \\
 &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

FD27 sebenarnya telah mampu menggunakan metode yang tepat dalam menentukan nilai limit fungsinya. Akan tetapi FD27 saat ditanya seputar strategi menjawabnya tampak bahwa FD27 hanya meniru pola dari pengerjaan guru. FD27 belum memiliki pemahaman konseptual yang matang, karena dia hanya menjawab tanpa adanya alasan atau dasar menurut pengertiannya sendiri. Hal ini sebagaimana wawancara berikut:

Peneliti	: <i>Iya, oke. Lanjut ke nomer 4. Tolong jelaskan jawabanmu!</i>
FD27	: <i>Ini itu di buku yang dituliskan pak Ali ada bu, walaupun saya tidak belajar tapi saya hapal bu nilainya.hehehe</i>
Peneliti	: <i>Ya sudah coba jelaskan jawabanmu.</i>
FD27	: <i>Ini pokoknya menurut teorema bu.</i>

Dari petikan wawancara tersebut terlihat bahwa FD27 hanya menganalogikan jawabannya dengan pengerjaan guru tanpa menunjukkan pengetahuan yang mendalam dari segi konseptual, baik itu definisi, teorema, ataupun konsep trigonometri yang mendasarinya. Sehingga, tingkat pemahaman FD27 berada pada tahap proses.

c) Wawancara dengan FD31

Berikut jawaban tertulis FD31 *Untuk soal nomer 1*,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} 2x - 5 + \lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 + 4x &= \lim_{x \rightarrow 3} 2(3) - 5 + \lim_{x \rightarrow 3} 3(3)^2 + 4(3) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 6 - 5 + \lim_{x \rightarrow 3} 27 + 12 \\ &= 1 + 30 \\ &= 40 \end{aligned}$$

FD31 menggunakan metode substitusi langsung, tetapi belum memaknai simbol $\lim_{x \rightarrow 3}$, buktinya setelah mensubstitusikan nilai $x = 3$ simbol tersebut masih tetap ada. Artinya, FD31 belum memahami teorema substitusi bahwa $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. FD31 juga belum mampu mengungkapkan alasan mengapa menggunakan metode substitusi langsung tersebut. Berikut petikan wawancara dengan FD31:

Peneliti	: <i>Sekarang coba jelaskan jawabanmu di mulai dari nomer 1a!</i>
FD31	: <i>Nomer 1 menggunakan cara substitusi langsung.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kok adik memakai cara substitusi langsung?</i>
FD31	: <i>Karena gampang.</i>

Dari petikan wawancara dengan FD31 tersebut terlihat bahwa dia belum mampu memberikan alasan menggunakan metode substitusi langsung secara lebih teoritis. Di samping FD31 juga belum mampu menginternalisasi teorema substitusi dengan baik, sehingga tingkat pemahaman FD31 masih berada pada tahap aksi. Hal ini dikarenakan FD31 masih sebatas melakukan aktifitas prosedural saja.

Berikut jawaban tertulis FD31 *Untuk soal nomer 2a,*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 - a^2}{a - a} \\ &= \frac{0}{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

FD31 menggunakan metode substitusi langsung untuk menentukan nilai limit fungsinya. Padahal jika menggunakan metode tersebut akan menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$, sehingga seharusnya FD31 menggunakan metode lain. FD31 mengira bahwa $\frac{0}{0}$ itu sama dengan 0, hal ini sebagaimana petikan wawancara dengan FD31 berikut ini:

Peneliti	: ... <i>coba jelaskan jawabanmu! Ini kamu pakai cara apa?</i>
FD31	: <i>hmm.. tidak tahu namanya bu. (bingung menjelaskan)</i>
Peneliti	: <i>Substitusi ya?</i>
FD31	: <i>Iya bu.</i>
Peneliti	: <i>Hasilnya berapa jika disubstitusikan?</i>
FD31	: $\frac{0}{0}$ <i>itu sama dengan 0 bu.</i>
Peneliti	: <i>Adik tahu tidak bentuk tak tentu itu yang bagaimana?</i>
FD31	: <i>Tidak tahu bu.</i>

Dari hasil wawancara tersebut terlihat bahwa FD31 belum menyadari bahwa terdapat kesalahan dalam memilih metode limit fungsi. Hal ini dikarenakan FD31 belum mengenal istilah bentuk tak tentu suatu limit fungsi. FD31 hanya sekedar melakukan perhitungan empirik tanpa adanya pemikiran-pemikiran lebih lanjut di dalam struktur kognitifnya. Artinya, metode-metode limit fungsi masih

berada pada wilayah eksternalnya. Oleh karena itu, tingkat pemahaman FD31 masih berada pada tahap aksi.

Berikut jawaban tertulis FD31 *Untuk soal nomer 2b*,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - 2}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\infty}{\infty} + \frac{\infty}{\infty} - 2}{\frac{\infty}{\infty} - \frac{\infty}{\infty} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 0 + 0 - 2}{0 - 0 + 1} \\ &= \frac{-1}{1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

FD31 membagi rumus fungsi tersebut dengan x^5 . Saat ditanya mengapa dia menggunakan x^5 pembaginya berikut jawabannya:

Peneliti	: <i>Selanjutnya, jelaskan jawabanmu yang 2b!</i>
FD31	: (hanya diam)
Peneliti	: <i>Ya coba jelaskan saja jawabanmu!</i>
FD31	: <i>Ini dibagi dengan x^5 bu.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa yang dibuat pembagi kok x^5.</i>
FD31	: <i>Dipilih yang pangkatnya paling depan bu.</i>

Dari petikan wawancara tersebut FD31 menentukan pembaginya hanya dengan melihat pangkat yang paling depan. FD31 belum memaknai bahwa pembagi tersebut diperoleh dari pangkat tertingginya. Dalam hal ini berarti FD31 belum memahami tujuan dari menggunakan metode membagi pangkat tersebut. FD31 belum memahami metode limit fungsi ini dipakai untuk menghindari

bentuk tak tentu. Sehingga dari jawaban tertulisnya dia hanya menyederhanakan pada pembagian yang pangkatnya sama, sedangkan yang pangkatnya tidak sama dia gunakan cara substitusi langsung. Hal ini sebagaimana petikan wawancara berikut:

Peneliti	: $\frac{x^5}{x^5}$ hasilnya berapa dek?
FD31	: 1 bu.
Peneliti	: Nah, kalau $\frac{2x^2}{x^5}$ hasilnya berapa?
FD31	: Hasilnya ya tak hingga bu. Kan saya substitusikan

Dari hasil wawancara tersebut terlihat bahwa FD31 belum memahami bentuk tak tentu, karena seharusnya bentuk tersebut masih harus disederhanakan dan tidak langsung disubstitusikan. Dalam hal ini berarti FD31 belum menginternalisasi metode limit fungsi dengan baik. Oleh karena itu, tingkat pemahaman FD31 masih berada pada tahap aksi.

Berikut jawaban tertulis FD31 *Untuk soal nomer 3*,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{16 + 9}}{4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Karena, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

FD31 sudah memilih metode yang tepat yaitu metode substitusi langsung. Akan tetapi FD31 belum terlihat memaknai simbol $\lim_{x \rightarrow 4}$. Hal ini terlihat pada hasil jawaban tertulisnya, yaitu meskipun nilai $x=4$ sudah disubstitusikan ke dalam fungsinya, FD31 masih tetap menyertakan simbol $\lim_{x \rightarrow 4}$. FD31 belum mampu menginternalisasi metode substitusi dengan baik karena belum mampu mendasari pengerjaannya dengan teorema substitusi itu sendiri. Hal ini mengindikasikan bahwa FD31 hanya melakukan aktifitas prosedural, sehingga tingkat pemahamannya berda pada tahap aksi.

Berikut jawaban tertulis FD31 *Untuk soal nomer 4*,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{4x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{4x^2} \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \\
 &= \frac{2}{4} \cdot 1 \cdot 1 \\
 &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Pada jawaban tertulis dari FD31 terdapat beberapa operasi yang terlewatkan, tetapi anehnya proses jawaban selanjutnya langkah-langkahnya sudah benar. Kemudian saat wawancara FD31 ditanya seputar jawabannya itu, FD31 lebih banyak diam dan malah mengatakan jawabannya benar itu hanyalah kebetulan saja.

Berikut petikan wawancaranya:

Peneliti	: <i>Cos 2x itu ekuivalaen dengan berapa?</i>
FD31	: (diam)
Peneliti	: <i>Kemaren kok dapat jawaban seperti itu bagaimana?</i>
FD31	: (diam)
Peneliti	: <i>Aku mau tanya $\sin^2 x$ itu sama dengan berapa?</i>
FD31	: <i>Hemmm.... (belum menemukan jawaban)</i>
Peneliti	: <i>$\sin^2 x$ itu sama dengan? Sin x di kali?</i>
FD31	: <i>2 bu.</i>
.....	
Peneliti	: <i>La kemaren jawabannya kok benar bagaimana?</i>
FD31	: <i>Kebetulan bu.hehe</i>

Wawancara tersebut bermaksud untuk mengecek pemahaman dari FD31, tetapi ternyata FD31 belum memahami langkah-langkah pengerjaannya FD31 mengatakan jawabannya itu benar hanya karena “kebetulan”. Hal ini menunjukkan bahwa tingkat pemahaman FD31 berada pada tahap aksi.

ii. Wawancara dengan Siswa Bergaya Kognitif *Field Independent* (GK-FI)

a) Wawancara dengan FI7

Berikut jawaban tertulis FI7 *Untuk soal nomer 1*,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 2x - 5 + 3x^2 + 4x \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 + 6x - 5 \\ &= 3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 5 \\ &= 27 + 18 - 5 = 40\end{aligned}$$

Melalui wawancara dengan FI7 terungkap bahwa FI7 sudah dapat menentukan nilai limit fungsi dengan metode substitusi langsung, di samping itu FI7 juga sudah dapat melakukan manipulasi dengan menggunakan teorema limit.

Hal ini diperjelas dengan petikan wawancara berikut:

Peneliti	: <i>Coba ada ataukah tidak cara yang lain untuk mengerjakan soal 1a ini?</i>
FI7	: <i>Berdasarkan teorema bu. (Sambil menunjukkan $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) + g(x)\}$ pada lembar jawabannya).</i>
Peneliti	: <i>Langkah selanjutnya?</i>
FI7	: <i>Nilai $x = 3$ disubstitusikan bu ke $f(x)$ dan $g(x)$.</i>

Dari hasil wawancara tersebut terlihat bahwa FI7 sudah dapat menentukan nilai limit fungsi dengan menggunakan teorema limit. Artinya dia sudah memahami makna dari “teorema limit jumlah” adalah penjumlahan dari limit-limitnya. Selanjutnya, FI7 tidak langsung menggunakan cara substitusi, akan tetapi dia merubah dulu bentuk $\lim_{x \rightarrow 3} [2x - 5 + 3x^2 + 4x]$ menjadi

$\lim_{x \rightarrow 3} [3x^2 + 6x - 5]$. Sebagaimana dijelaskan pada petikan wawancara berikut ini:

Peneliti	: <i>Ini untuk langkah dari 2 ke 3 itu kamu apakan?</i>
FI7	: <i>Yang pangkatnya paling besar didahulukan yang pangkatnya sama di operasikan. (menunjuk penyederhanaan aljabar hasilnya $\lim_{x \rightarrow 3} [2x - 5 + 3x^2 + 4x] = \lim_{x \rightarrow 3} [3x^2 + 6x - 5]$ di lembar jawabannya.</i>

Berdasarkan hasil wawancara ini terlihat bahwa FI7 sudah berfikir ke arah konsep yang lengkap, dia sudah menguasai metode substitusi langsung dan dapat menggunakan teorema limit fungsi. Dalam penyelesaiannya FI7 juga mengintegrasikan pengetahuan baru (*limit fungsi*) dengan pengetahuan awal yang dimilikinya yaitu pengetahuan tentang konsep aljabar dengan melakukan "*penyederhanaan bentuk aljabar*". Dengan demikian berarti FI7 telah mampu menentukan nilai limit fungsi dengan menghubungkan konsep limit fungsi dengan konsep fungsi dan aljabar yang telah dimiliki sebelumnya, sehingga FI7 tingkat pemahamannya berada pada tahap skema.

Berikut jawaban tertulis FI7 *Untuk soal nomer 2a,*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\cancel{x-a})(x+a)}{\cancel{x-a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} x + a \\ &= a + a = 2a \end{aligned}$$

FI7 dapat menggunakan metode "*pemfaktoran*" dengan benar dan tepat sebagaimana yang tertera dalam lembar jawabannya. FI7 menggunakan metode pemfaktoran karena dia tahu bahwa jikalau dia menggunakan metode substitusi secara langsung hasilnya $\frac{0}{0}$. FI7 memperkirakan hasilnya $\frac{0}{0}$ tersebut tanpa

menuliskan jawabannya secara langsung (dalam imajinasi). Hal ini sebagaimana petikan wawancara dengan FI7 sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Lalu kenapa tidak menggunakan cara substitusi saja?</i>
FI7	: <i>Nanti kan hasilnya $\frac{0}{0}$.</i>
Peneliti	: <i>Sehingga kalau menemui bentuk seperti itu bagaimana?</i>
FI7	: <i>Pakai metode lain.</i>

Dari hasil wawancara tersebut FI7 dapat mengemukakan alasannya terkait dengan penggunaan metode pemfaktoran yaitu untuk menghindari bentuk $\frac{0}{0}$. Dan dengan bimbingan oleh peneliti FI7 dapat mengaitkan jawabannya tersebut dengan definisi limit fungsi.

Peneliti	: <i>Definisi limit itu apa sih dek?</i>
FI7	: <i>(tidak memberi jawaban)</i>
Peneliti	: <i>Limit itu maksudnya apa dek?</i>
FI7	: <i>mendekati.</i>
Peneliti	: <i>Oke trus maksud x mendekati a itu bagaimana ya kira-kira?</i>
FI7	: <i>Bisa lebih dan kurang bu.</i>
Peneliti	: <i>Sehingga alasan $\frac{(x-a)}{(x-a)}$ bisa dicoret jikalau x?</i>
FI7	: <i>x lebih atau kurang dari a.</i>

Dari hasil wawancara dengan FI7 tersebut terlihat bahwa dengan bimbingan dari peneliti dia mampu memberikan alasan dari pencoretan (kanselasi) yang dia gunakan dalam metode pemfaktoran tersebut. Meskipun hanya dalam bentuk definisi intuitif. Dengan demikian berarti FI7 mampu

menggunakan metode pemfaktoran dengan menggunakan definisi limit fungsi. FI7 mengatakan bahwa limit adalah “mendekati” dan dia mengatakan juga bahwa “ x lebih atau kurang dari a ”. Dari pernyataan itu menyiratkan bahwa FI7 sudah mengarah pada pemahaman konsep limit fungsi. Hal ini mengindikasikan bahwa FI7 tingkat pemahamannya berada pada tahap objek.

Berikut jawaban tertulis FI7 **Untuk soal nomer 2b**,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^5} + \frac{x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\cancel{3x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^5}}{3 - \frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x^5}} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{\infty^3} - \frac{2}{\infty^5}}{3 - \frac{2}{\infty^4} + \frac{1}{\infty^5}} \\
 &= \frac{1 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

FI7 sudah dapat menggunakan metode “membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut” dengan benar untuk menentukan nilai limit fungsi. FI7 menggunakan metode tersebut karena dia tahu bahwa jikalau dia menggunakan metode substitusi secara langsung hasilnya $\frac{\infty}{\infty}$. Berikut petikan wawancara dengan FI7:

Peneliti	: <i>Kemudian langkah selanjutnya?</i>
FI7	: <i>Diper-per bu atau dibagi dengan pangkat tertinggi.</i>
Peneliti	: <i>Dibagi dengan pangkat tertinggi itu tujuannya apa kira-kira?</i>
FI7	: <i>Mungkin untuk menghilangkan yang pangkatnya tertinggi dan untuk menyederhanakan yang lain.</i>
Peneliti	: <i>Kira-kira diubah menjadi bentuk yang lebih sederhana itu tujuannya untuk apa?</i>
FI7	: <i>Untuk menghindari $\frac{\infty}{\infty}$.</i>

Dari hasil wawancara tersebut terlihat bahwa FI7 mampu melakukan analisa yang cukup baik berkenaan dengan penggunaan metode tersebut. FI7 sudah menunjukkan pemahamannya dari segi prosedural, meskipun FI7 belum terlalu memahami maksud dari bilangan ∞ itu sendiri, sehingga dia masih menuliskan bentuk $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^4}$, dan $\frac{1}{\infty^5}$. Bentuk-bentuk $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^4}$, dan $\frac{1}{\infty^5}$ sudah dipahami oleh FI7 bahwa hasilnya adalah 0. Dari pernyataan-pernyataan yang telah dikemukakan, menyiratkan bahwa FI7 memiliki pemahaman secara prosedural. Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat pemahaman FI7 berada pada tahap proses.

Berikut jawaban tertulis FI7 **Untuk soal nomer 3**,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} &= \frac{\sqrt{4^2 + 9}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{16 + 9}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{25}}{4} \\
 &= \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

FI7 dapat menggunakan metode “*substitusi langsung*” dengan benar dan tepat serta dapat menjelaskan alasannya menggunakan metode tersebut. Sebagaimana petikan wawancara sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Sekarang coba jelaskan jawabanmu yang nomer 3!</i>
FI7	: <i>Ini disubstitusikan.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kok memakai cara substitusi?</i>
FI7	: <i>Kalau pakai teorema lupa bu.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kok tidak pakai cara yang lain saja?</i>
FI7	: <i>Substitusi masih bisa selama hasilnya tidak $\frac{0}{0}$.</i>

Dari hasil wawancara tersebut, FI7 sudah mampu menggunakan metode “*substitusi langsung*” dan mengetahui alasannya (terdefinisi atau tidak), akan tetapi belum melibatkan teorema limit dalam menjawabnya. Sehingga pemahaman FI7 berada pada tahap proses.

Berikut jawaban tertulis FI7 **Untuk soal nomer 4,**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{4x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{4x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\
 &= \frac{2}{4} \cdot 1 \cdot 1 \\
 &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

FI7 sudah melakukan langkah-langkah pengerjaan yang benar. Terlebih dahulu dia merubah bentuk yang ekuivalen dengan $\cos 2x$ yaitu $1 - 2\sin^2 x$. Selanjutnya, FI7 dapat melakukan langkah-langkah sesuai dengan prosedur yang tepat.

Peneliti	: <i>Sehingga sini ke sini (menunjukkan jawaban FI7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$) perubahan seperti itu dasarnya apa?</i>
FI7	: <i>Hmm... tidak tahu bu tetapi memang dulu pernah ada contoh yang hampir mirip.</i>

Dari hasil wawancara tersebut, terlihat bahwa FI7 melakukan analogi pada soal-soal yang hampir mirip untuk mengerjakan soal baru. Oleh karena itu, FI7 dapat melakukan tahap per tahap proses jawabannya secara sistematis. Berarti pemahamannya baik secara prosedural. Sedangkan saat ditanya lebih lanjut seputar teoremanya FI7 belum terlalu memahami. Sebagaimana petikan wawancara berikut:

Peneliti	: <i>Coba saya tunjukkan sebuah teorema ini Teorema $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ kamu tahu teorema ini?</i>
FI7	: <i>Tahu bu.</i>
Peneliti	: <i>Kira-kira bisa tidak menggunakan teorema ini tadi untuk menjawab dasar langkah-langkah jawaban kamu tadi?</i>
FI7	: <i>Iya bisa bu. (menulis jawaban seperti berikut $\frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \lim_{x \rightarrow 0} x}$)</i>
Peneliti	: <i>Lalu? Sudah cukup kah?</i>
FI7	: <i>Iya bu sudah. (kelihatan masih bingung dengan jawabannya sendiri).</i>

Dari petikan wawancara tersebut, FI7 mengatakan bahwa dia mengetahui teorema tersebut. Akan tetapi dia belum memahami secara mendalam, padahal teorema itulah yang harusnya menjadi dasar pada proses perubahan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{4x^2} =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. FI7 sudah macet hanya pada langkah pertamanya

padahal apabila dia lanjutkan akan ada kesesuaian hasil jawabannya tersebut.

Dalam hal ini berarti FI7 berada tahap proses, atau memahami secara prosedural saja.

b) Wawancara dengan FI5

Berikut jawaban tertulis FI5 *Untuk soal nomer 1,*

Ada, yaitu dengan substitusi langsung. Kalau jawaban a menggunakan cara teorema limit.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3} 2x - 5 + 3x^2 + 4x \\ &= 2 \cdot 3 - 5 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Melalui wawancara dengan FI5 terungkap bahwa FI5 memiliki kemampuan untuk membuat alternatif jawaban dengan prosedur yang berbeda.

Hal ini sebagaimana petikan wawancara dengan FI5 berikut:

Peneliti	: coba sampean jelaskan bagaimana kamu mendapatkan jawaban itu, dimulai dari nomer 1.
FI5	: Pertama x nya dimasukkan ke dalam fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ karena penjumlahan maka hasilnya ditambahkan sehingga mendapatkan hasil limitnya 40.
Peneliti	: Ini namanya metode apa?
FI5	: Metode apa ya bu? (Dia kelihatan bingung)
Peneliti	: Nah, coba apakah ada cara lain dalam mengerjakan soal nomer 1 ini?
FI5	: Ada bu, yaitu substitusi langsung. Kalau cara yang pertama tadi berdasarkan teorema.

Dari petikan wawancara tersebut, FI5 sebenarnya sudah membuat dua alternatif jawaban yang keduanya sama-sama benar. Tetapi pernyataan FI5 yang mengatakan bahwa cara yang pertama itu berdasarkan teorema adalah kurang tepat, seharusnya jawaban yang berdasar pada teorema adalah cara yang kedua.

Berikut petikan wawancaranya:

Peneliti	: <i>Coba sekarang kembali ke jawaban yang nomer 1a, katanya tadi kan berdasarkan teorema. Kira-kita teorema apa yang mendasari pekerjaanmu nomer 1a?</i>
FI5	: <i>Itu bu, bahwa $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) + g(x)\}$ jadi untuk yang nomer 1a caranya berdasarkan teorema, sedangkan yang 1b menggunakan substitusi langsung.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kamu menganggap nomer 1b menggunakan substitusi langsung?</i>
FI5	: <i>Karena ini kan penjumlahan bu, kemudian fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ saya substitusikan sehingga memperoleh $\lim_{x \rightarrow 3} 2x - 5 + 3x^2 + 4x$ dan nilai limitnya sama yaitu 40.</i>

Dari petikan wawancara tersebut, ada persepsi dari FI5 yang masih perlu diluruskan yakni dalam memahami makna dari suatu teorema, karena dia sepertinya masih rancu mengenai langkah mana yang berdasar teorema dan mana yang tidak melibatkan teorema (*substitusi langsung*), sehingga FI5 mengutarakan alasan yang terbalik. Terlepas dari kemampuan FI5 menamai langkah pekerjaannya, sebenarnya FI5 sudah dapat menggunakan cara lain yang berdasarkan pada teorema limit untuk menentukan nilai limit fungsi. Sehingga tingkat pemahaman FI5 berada pada tahap objek.

Berikut jawaban tertulis FI5 *Untuk soal nomer 2a,*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} 1(x + a)$$

$$= 1(a + a) = 2a \rightarrow \text{substitusi}$$

FI5 dapat menggunakan metode “*pemfaktoran*” dengan benar dan tepat sebagaimana yang tertera dalam lembar jawabannya. Berikut petikan wawancara dengan FI5:

Peneliti : *Coba sekarang jelaskan jawabanmu yang nomer 2!*

FI5 : *Untuk soal nomer 2 saya menggunakan metode pemfaktoran bu terlebih dahulu $x^2 - a^2$ saya faktorkan sehingga didapatkan $(x+a)(x-a)$, kemudian saya coret dengan penyebutnya $(x-a)$ sehingga menghasilkan nilai satu. (sambil menunjukkan pekerjaannya). Setelah itu saya cari nilai limitnya dengan cara substitusi dan hasilnya $2a$.*

Dari petikan wawancara tersebut, terlihat bahwa FI5 sudah memiliki pemahaman konseptual yaitu dengan menyatakan kanselasi yang menghasilkan 1. Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat pemahaman FI5 berada pada tahap objek.

Berikut jawaban tertulis FI5 **Untuk soal nomer 2b**,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^5}}{3 - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}}$$

$$= \frac{1 - 0 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} = \frac{1}{3}$$

FI5 sudah dapat menggunakan metode “*membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut*” dengan benar untuk menentukan nilai limit fungsi. FI5

menggunakan metode tersebut karena dia tahu bahwa jikalau dia menggunakan metode substitusi secara langsung hasilnya $\frac{\infty}{\infty}$. Hal ini sebagaimana petikan wawancara berikut:

Peneliti	: <i>Iya, oke. Skarang coba jelaskan jawabanmu yang nomer 2b?</i>
FI5	: <i>Saya menggunakan metode dengan membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut. (menjelaskan jawabannya di lembar jawabannya).</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kamu memakai metode tersebut kok tidak pakai cara substitusi langsung saja?</i>
FI5	: <i>Karena nanti hasilnya $\frac{\infty}{\infty}$ bu.</i>

Selanjutnya peneliti menyambung pertanyaan seputar hasil akhir yang di lembar jawabannya tertera angka 0. Berikut petikan wawancaranya:

Peneliti	: <i>Nah, itu pada langkahmu yang ketiga muncul angka 0? Itu apa alasannya kira-kira?</i>
FI5	: <i>Hmm... (diam dan terlihat masih belum menemukan jawaban)</i>
Peneliti	: <i>Mungkin ada sifat/teorema yang menjamin?, atau mungkin kamu memahaminya bagaimana?</i>
FI5	: <i>Hmm... (masih terdiam)</i>
Peneliti	: <i>Berarti alasan mendapatkan 0 itu apa?</i>
FI5	: <i>Tidak tahu bu.</i>

Dari petikan wawancara tersebut terlihat bahwa FI5 belum sepenuhnya paham pada tiap-tiap langkah dari proses jawabannya, tetapi secara prosedural jawaban FI5 benar dan tepat. Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat pemahaman FI5 berada pada tahap proses.

Berikut jawaban tertulis FI5 *Untuk soal nomer 3,*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 9}}{\lim_{x \rightarrow 4} x} \rightarrow \text{teorema limit} = \lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \dots} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \dots} g(x)} \\ &= \frac{\sqrt{4^2 + 9}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{16 + 9}}{4} \\ &= \frac{4 + 3}{4} \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Dalam menentukan nilai limit fungsinya FI5 sudah menggunakan cara yang berdasarkan pada “*teorema limit pembagian*”. Akan tetapi selanjutnya FI5 tidak meneruskan langkah berdasarkan teorema limit, padahal bentuk tersebut masih belum sederhana. Seharusnya, teorema limit yang lain masih perlu digunakan, yaitu teorema limit akar, teorema limit pangkat, dan teorema limit penjumlahan. Tetapi di sini langkah tersebut hanya terhenti pada langkah pertama saja, hal ini kemungkinan terjadi karena dalam pembelajaran pun manipulasi sesuai dengan teorema ini tidak diajarkan sampai tuntas (*hanya diajarkan sampai pada langkah pertama*). Dalam hal ini berarti tingkat pemahaman FI5 belum sampai pada tahap objek.

Berikut jawaban tertulis FI5 *Untuk soal nomer 4,*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\sin x \ 2 \cos x)}{4x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \\ \text{Teorema } \frac{\sin x}{x} &= 1 / \frac{x}{\sin x} = 1 / \frac{\tan x}{x} = 1 \end{aligned}$$

FI5 belum mampu menentukan bentuk ekuivalen dengan $\cos 2x$, terlihat FI5 juga belum mampu menggunakan teorema dan rumus-rumus trigonometri dengan baik dalam pengerjaannya. Pada soal ini FI5 hanya melakukan perhitungan secara empirik dan belum mampu menginternalisasi metode limit fungsi dengan baik. Sehingga tingkat pemahamannya masih berada pada tahap aksi.

c) Wawancara dengan FI11

Berikut jawaban tertulis FI5 *Untuk soal nomer 1*,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} [2x - 5 + 3x^2 + 4x] \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} [3x^2 + 6x - 5] \\ &= 3 \cdot (3)^2 + 6(3) - 5 = 40\end{aligned}$$

Dari jawaban FI11 tersebut terlihat bahwa dia sudah menggunakan teorema penjumlahan dalam menentukan nilai limit fungsinya. Hal ini diperjelas dengan petikan wawancara sebagaimana berikut:

FI11	: Iya, ada bu. Menggunakan sifat (teorema) limit fungsi.
Peneliti	: Iya, coba jelaskan!
FI11	: Kita ketahui bahwa $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) + g(x)\}$ Jadi, nanti kita bisa substitusikan (sambil menjelaskan jawabannya)
Peneliti	: Coba jelaskan jawabanmu dari langkah dua ketiga!
FI11	: Sebelum saya substitusikan terlebih dahulu saya sederhanakan bu, dari suku-suku yang sejenis saya operasikan jadi satu dulu.
Peneliti	: Lalu, Mas Heri dapat mengambil kesimpulan apa dari jawaban nomer 1 ini?
FI11	: Hmmmm.... (sambil berfikir)
Peneliti	: Kalau dikaitkan dengan konsep fungsi?
FI11	: (bingung sambil tersenyum)
Peneliti	: Berarti nilai limit fungsinya sama dengan nilai...

Dari petikan wawancara tersebut terlihat bahwa FI11 sudah mampu menentukan nilai limit fungsi dengan menggunakan teorema limit fungsi. Untuk langkah selanjutnya FI11 tidak langsung menggunakan substitusi, tetapi dia menyederhanakan dulu bentuk aljabarnya. FI11 mampu melakukan penyederhanaan bentuk aljabar, FI11 mampu membedakan suku-suku sejenis dan suku-suku tak sejenis. Dalam hal ini berarti FI11 sudah mampu mengaitkan konsep limit fungsi dengan “*penyederhanaan suku-suku sejenis*” yang mana pemahaman FI11 ini menunjukkan kelebihan bila dibandingkan dengan siswa yang tidak melewati proses tersebut. FI11 juga mampu memberikan kesimpulan bahwa nilai limit fungsinya akan sama dengan nilai fungsinya. Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat pemahaman FI11 sudah mencapai tahap skema.

Berikut jawaban tertulis FI5 *Untuk soal nomer 2a,*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} \\ &= a + a = 2a\end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut terlihat bahwa FI11 sudah mampu menentukan nilai limit fungsi dengan benar dan tepat. FI11 juga sudah mampu menjelaskan alasan dari penggunaan suatu metode limit fungsi. Hal ini sebagaimana petikan wawancara berikut ini:

FI11	: <i>Saya menggunakan metode pemfaktoran bu. (sambil menjelaskan jawabannya yang tertulis di lembar jawabannya)</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kamu menggunakan metode pemfaktoran?</i>
FI11	: <i>Karena jika nilai $x=a$ disubstitusikan ke dalam fungsi $\frac{x^2 - a^2}{x + a}$ hasilnya $\frac{0}{0}$ sehingga harus menggunakan metode lainnya bu.</i>

Dari petikan wawancara tersebut mengindikasikan bahwa FI11 sudah menggunakan metode pemfaktoran dan melakukan kanselasi yang tepat. Sehingga tingkat pemahaman FI11 sudah berada pada tahap objek.

Berikut jawaban tertulis FI5 *Untuk soal nomer 2b*,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} = \frac{1}{3}$$

Dari jawaban tertulis tersebut terlihat FI11 tanpa melakukan langkah-langkah pengerjaan yang nyata. Tetapi setelah dilakukan wawancara FI5 dapat menjelaskan perihal jawabannya sebagaimana berikut:

Peneliti	: <i>Oh iya, kembali lagi dengan jawabanmu yang kemaren, kamu kan menjawab langsung $\frac{1}{3}$? Coba jelaskan apakah ada rumus cepatnya atau gimana gitu?</i>
FI11	: <i>Ya bu, kemaren sempat dituliskan rumus cepatnya dari pak Ali.</i>
Peneliti	: <i>O iya, coba lanjutkan.</i>
FI11	: <i>Jadi langsung bisa dilihat pangkat tertinggi jikalau sama berarti tinggal di tulis $\frac{1}{3}$. (sambil menunjukkan x^5)</i>

Dari hasil wawancara tersebut FI11 dapat menentukan nilai limitnya dengan menggunakan penyelesaian informal yang hanya dapat ditentukan dengan melihat koefisien pangkat tertinggi dari pembilang dan penyebut. Jikalau pangkat tertingginya sama maka hasilnya adalah koefisien pangkat tertinggi dari pembilang dibagi dengan koefisien pangkat tertinggi dari penyebut.

Dan dari hasil wawancara FI11 dapat menjelaskan alternatif proses jawaban yang lain sebagaimana berikut ini:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^5}}{3 - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}} \\
&= \frac{1 - 0 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Hal ini sebagaimana ptikan wawancara sebagaimana berikut:

Peneliti	: kenapa kamu langsung menjawab $\frac{1}{3}$? Atau mungkin kamu tulis saja di kertas yang telah saya sediakan ini.
FI11	: Iya bu. (menulis uraian proses jawabannya secara formal)
Peneliti	: Coba jelaskan jawabanmu yang sekarang!
FI11	: ini saya membagi pembilang dengan pangkat tertinggi dari penyebut, eh yang penyebutnya juga dibagi.hehe
Peneliti	: Lalu??
FI11	: (menjelaskan sambil menulis)
Peneliti	: O iya, kenapa ini muncul angka 0?
FI11	: Setelah disederhanakan tak hingga nya disubstitusikan bu?
Peneliti	: Bilangan tak hingga apa bisa ditentukan besarnya? Kok disubstitusikan?
FI11	: (menanggapi dengan senyuman dan kelihatan bingung)

Akan tetapi saat wawancara FI11 belum mampu memberikan alasan terdapat nilai 0 pada langkah pengerjaannya tersebut. Dalam menjelaskan FI11 belum mampu mengaitkan dengan definisi atau teorema limit fungsi. Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat pemahaman FI11 masih berada pada tahap proses.

Berikut jawaban tertulis FI11 *Untuk soal nomer 3,*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 9}}{\lim_{x \rightarrow 4} x} \\ &= \frac{\sqrt{16 + 9}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut terlihat bahwa pada langkah (i) FI11 sudah mencoba menggunakan teorema limit fungsi yaitu teorema pembagian akan tetapi dia belum mahir menggunakan teorema-teorema yang lain, sehingga FI11 belum dapat memenuhi permintaan soal yang dimaksud. Sehingga tingkat pemahaman siswa belum dapat dikatakan berada pada tahap proses.

Berikut jawaban tertulis FI11 *Untuk soal nomer 4,*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 2x)}{4x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{4x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 2x} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut terlihat bahwa FI11 masih melakukan kesalahan dalam melakukan manipulasi rumus fungsinya. Hal ini juga disadari oleh FI11 melalui wawancara sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Sekarang jelaskan kesalahanmu kemarin terletak di mana?</i>
FI11	: <i>Dalam menentukan bentuk ekuivalen dari $\cos 2x$ bu.</i>
Peneliti	: <i>Berarti sekarang sudah faham ya. Jadi dalam mengerjakan soal nomer 4 kita harus memahami tentang konsep apa?</i>
FI11	: <i>konsep Trigonometri bu.</i>

Dari hasil wawancara tersebut terlihat bahwa FI11 sudah menyadari kesalahan yang dia lakukan dalam mengubah bentuk ekuivalen dari $\cos 2x$, hal ini dikarenakan pengetahuan sebelumnya yaitu tentang konsep trigonometri kurang dikuasai dan sudah mulai terlupa. Sehingga dapat diketahui FI11 hanya melakukan aktifitas prosedural. Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat pemahaman FI11 masih berada pada tahap aksi.

C. TEMUAN PENELITIAN

1. Pemahaman siswa mengenai konsep limit fungsi berdasarkan Teori APOS pada umumnya berada pada tahap aksi. (*selengkapnya lihat Tabel 4.2*)
2. Sebagian besar siswa menganggap simbol $\lim_{x \rightarrow a}$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty}$ masih kosong dari makna.
3. Untuk nomer-nomer tertentu ternyata ada kriteria tertentu dari Teori APOS yang tidak dipenuhi (misalnya tahap skema untuk soal nomer 2a, serta tahap objek dan skema untuk soal nomer 2b, 3, dan 4).
4. Berdasarkan Tabel 4.2 siswa yang jawabannya di luar kriteria Teori APOS ternyata mencapai persentase 10,5%.
5. Secara umum tingkat pemahaman siswa GK-FD dan GK-FI berdasarkan Teori APOS sama-sama masih berada pada tahap aksi.
6. Strategi kognitif yang digunakan oleh siswa GK-FD dan GK-FI dalam menyelesaikan soal-soal limit fungsi cenderung berbeda, siswa GK-FI lebih terstruktur alur berpikirnya daripada siswa GK-FD. (*selengkapnya lihat Gambar 4.51 dan 4.52*)

D. PEMBAHASAN TEMUAN PENELITIAN

1. Pemahaman Siswa Mengenai Konsep Limit Fungsi Berdasarkan Teori APOS pada Umumnya Berada pada Tahap Aksi

Pemahaman siswa mengenai konsep limit fungsi yang berada pada tahap aksi berdasarkan Tabel 4.2 adalah sebesar 52%. Persentase tersebut sangatlah besar jika dibandingkan dengan tahap lain, yaitu tahap proses 27,5%, tahap objek 9%, dan tahap skema 1%. Hal ini disebabkan sebagian besar subjek dalam menyelesaikan soal-soal limit fungsi belum mampu menerapkan seluruh metode limit fungsi dengan baik, mereka hanya melakukan perhitungan secara empirik tanpa mengetahui prosedurnya salah ataupun benar (tanpa sadar).

Melalui data hasil jawaban tertulis dan wawancara dari beberapa siswa ternyata sebagian siswa kelas XI IPA 2 MAN Rejotangan masih kesulitan dalam memahami konsep limit fungsi. Mereka seringkali menyamakan konsep limit fungsi dengan konsep fungsi, kebanyakan mereka juga belum mengenal mengenai bentuk tak tentu suatu limit fungsi. Sebagaimana jawaban siswa berikut ini:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{0}{0} = 0$$

Dari jawaban tersebut terlihat bahwa mereka langsung memasukkan nilai $x = a$ ke dalam suatu fungsi tersebut. Mereka mengoperasikannya sehingga menghasilkan $\frac{0}{0}$. Mereka mengira bahwa $\frac{0}{0}$ itu sama dengan 0. Sehingga menurut mereka nilai limitnya sama dengan 0.

Hal ini diperjelas dengan wawancara sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Sekarang yang nomer 2a, coba jelaskan jawabanmu! Ini kamu pakai metode apa?</i>
FD31	: <i>hmm.. tidak tahu namanya bu. (bingung menjelaskan)</i>
Peneliti	: <i>Substitusi ya?</i>
FD31	: <i>Iya bu.</i>
Peneliti	: <i>Hasilnya berapa jika disubstitusikan?</i>
FD31	: $\frac{0}{0}$ <i>itu sama dengan 0 bu.</i>
Peneliti	: $\frac{0}{0}$ <i>itu sama dengan 0 ya?</i>
FD31	: <i>Iya no bu, masa sama dengan 1? (ucapnya dengan tersenyum)</i>
Peneliti	: <i>Adik tahu tidak bentuk tak tentu itu yang bagaimana?</i>
FD31	: <i>Tidak tahu bu.</i>

Kasus yang hampir sama juga dialami oleh beberapa siswa yang mensubstitusikan suatu nilai sedangkan bentuknya masih tak tentu. Sebagaimana jawaban siswa berikut:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} && \dots \text{(i)} \\
 &= \dots && \dots \text{(ii)} \\
 &= \frac{1 - \frac{2\infty^2}{\infty^5} + \frac{3\infty^2}{\infty^5} - \frac{2}{\infty^5}}{3 - \frac{2\infty}{\infty^5} + \frac{1}{\infty^5}} && \dots \text{(iii)} \\
 &= \frac{1}{3} && \dots \text{(iv)}
 \end{aligned}$$

Apabila dicermati lebih dalam lagi ternyata siswa melakukan perhitungan yang masih menemui bentuk $\frac{\infty}{\infty}$, tetapi mereka tidak menyadari bentuk tak tentu tersebut. Berdasarkan hasil wawancara memang terbukti bahwa mereka belum

memahami bentuk tak tentu dan menganggap bahwa $\frac{\infty}{\infty}$ itu sama dengan 0.

Berikut petikan wawancaranya:

Peneliti	: Kemudian $\frac{2x^2}{x^5}$ kamu apakan ini?
FD3	: Saya substitusikan bu.
Peneliti	: Berarti $\frac{\infty}{\infty}$ ya?
FD3	: Iya bu.
Peneliti	: Lalu hasilnya $\frac{\infty}{\infty}$ berapa dek?
FD3	: 0 bu.hehe

Dari petikan wawancara tersebut terlihat bahwa mereka mengalami *misunderstanding* mengenai bentuk tak tentu dari suatu limit fungsi. Dalam hal ini berarti mereka belum menyadari tujuan penggunaan metode-metode limit fungsi.

Kesulitan mereka juga disebabkan karena pemahaman konsep matematika dasar yang dangkal. Sebagaimana jawaban siswa berikut ini misalnya;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+3}{4} && \dots\dots\dots (i) \\ &= \frac{\sqrt{16+9}}{4} && \dots\dots\dots (ii) \\ &= \frac{4+3}{4} && \dots\dots\dots (iii) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis tersebut terlihat bahwa mereka sebenarnya sudah memilih metode yang tepat yaitu metode substitusi langsung. Akan tetapi ada kesalahan dalam memahami bentuk $\sqrt{a+b}$ mereka menyamakan bentuk tersebut dengan $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, padahal bentuk keduanya tidaklah saling ekuivalen (*lihat langkah (i)*). Mungkin mereka menganalogikan bentuk tersebut dengan

perkaliannya, karena kita ketahui bahwa $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$. Kemudian pada langkah selanjutnya siswa melakukan pencoretan yang salah (*lihat langkah (iii)*), karena mereka menganalogikan bahwa sifat penjumlahan itu sama dengan sifat pada perkalian. Hal ini nampak jelas saat peneliti memberikan sebuah permasalahan melalui pertanyaan wawancara berikut ini:

Peneliti	: <i>Sekarang coba nomer 3 kamu teliti lagi! Menurut kamu ada kesalahan dimana?</i>
FD28	: (diam)
Peneliti	: <i>Coba sekarang ubahlah soal ini ke bentuk yang ekuivalen berdasarkan sifat-sifat akar, menurut kamu bagaimana? (peneliti menuliskan $\sqrt{a+b}$ dan $\sqrt{a.b}$)</i>
FD28	: <i>Kalau yang $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ dan $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$</i>

Dari hasil wawancara dari beberapa siswa ternyata masih banyak siswa yang mengalami kesalahan dalam menggunakan aturan-aturan dalam operasi matematika dasar, sehingga dampaknya mereka sulit dalam memahami aturan-aturan konsep yang abstrak sebagaimana jawaban siswa sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \sin^2 x)}{4x^2} && \dots\dots\dots (i) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sin^2 x}{4x^2} && \dots\dots\dots (ii) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} && \dots\dots\dots (iii) \\ &= \frac{2}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dari jawaban tertulis siswa tersebut terlihat bahwa pada langkah (i) yakni perubahan bentuk dari $\cos 2x$ menjadi $1 - \sin^2 x$ adalah dua buah bentuk yang tidak ekuivalen (sama), sehingga akibatnya siswa sama dengan merubah

bentuk soal awal. Dan bila dicermati lagi perubahan dari langkah (i) ke (ii) rupanya siswa juga masih melakukan kesalahan dalam mengoperasikan, di sini siswa belum mampu memahami sifat distributif dengan baik. Hingga selanjutnya langkah yang dilakukan oleh siswa juga tidak sesuai dengan teorema limit perkalian (*lihat perubahan dari (ii) ke (iii)*).

Jadi secara garis besar siswa belum mampu mengintegrasikan berbagai macam pengetahuannya menjadi sebuah unit konseptual yang matang. Kemampuan siswa dalam mengorganisasikan pengetahuan dalam ingatan masih sangat kurang. Sehingga dalam mengerjakan soal siswa seringkali mengalami kesalahan perhitungan karena ada salah satu pengetahuannya yang hilang. Bahkan, seringkali siswa tidak menyadari kesalahan mereka tersebut. Hal ini sesuai dengan pendapat Zazkis & Campbell bahwa jika pemahaman siswa menurut Teori APOS masih berada pada tahap aksi maka siswa tersebut masih sekedar melakukan aktifitas prosedural.¹⁶⁷

Saat siswa masih sebatas melakukan aktifitas prosedural berarti siswa belum memiliki pengetahuan secara prosedural yang memadai. Jika pengetahuan siswa belum memadai maka siswa secara otomatis akan kesulitan dalam memahami suatu konsep matematika yang lebih kompleks yakni konsep limit fungsi. Apalagi dalam konsep limit fungsi sudah melibatkan definisi, teorema-teorema atau sifat-sifat yang seharusnya digunakan sebagai acuan dalam mengerjakan suatu persoalan.

¹⁶⁷ Zazkis, R. & Cambell. 1996. *Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teachers Understanding*. *Journal for Research in Mathematis Education*, 27 (5): 540-563.

Pada tahap ini siswa merasakan seluruh metode limit fungsi masih berada di wilayah eksternal, sehingga siswa belum mampu menggunakan metode-metode limit fungsi dengan mahir. Hasil analisis dari beberapa jawaban siswa sebenarnya kebanyakan siswa sudah mampu memilih metode limit fungsi yang tepat (*sebagaimana yang telah dijelaskan pada bagian penyajian data*). Akan tetapi, siswa belum mampu mentransformasi seluruh metode tersebut ke dalam wilayah internal (pikiran) nya, berarti dapat dikatakan bahwa siswa belum mampu *menginteriorisasikan* aksi ke proses.¹⁶⁸ Menurut Dubinsky, jika siswa belum mampu *menginteriorisasikan* aksi ke proses maka berdasarkan Teori *Triad* perkembangan skema siswa tersebut belum sampai pada tahap *intra*.

Siswa yang berada pada tahap aksi ini pada umumnya masih belum dapat menerapkan konsep/prinsip matematika dalam pikirannya. Hal ini disebabkan karena pengetahuan dasar matematika dari siswa masih lemah.¹⁶⁹ Karena kita ketahui bahwa dalam konsep limit fungsi siswa juga dihadapkan pada konsep-konsep sebelumnya, seperti konsep aljabar, trigonometri, suku banyak, fungsi, dan lain-lain. Jika siswa belum mampu mengintegrasikan pengetahuan baru dengan pengetahuan sebelumnya akan berdampak pada pekerjaan siswa sebagaimana jawaban siswa berikut ini:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^2}{x-a} = \frac{1^2}{1} = 1$$

¹⁶⁸ Aneshkumar Maharaj, dalam Minanur Rohman. *Analisis Miskonsepsi Siswa...*, hal. 22-23

¹⁶⁹ Hiebert & Lefevre, dalam Maryono, *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa...*, hal. 139.

Dari jawaban tertulis tersebut, terlihat bahwa mereka merubah bentuk $x^2 - a^2$ menjadi $(x - a)^2$, kemudian melakukan kanselasi sehingga menghasilkan nilai limitnya sama dengan 1. Berikut petikan wawancara dengan siswa:

Peneliti	: <i>Ini pakai cara apa?</i>
FI20	: <i>Pemfaktoran bu.</i>
Peneliti	: <i>Coba jelaskan!</i>
FI20	: <i>$x^2 - a^2$ itu saya faktorkan menjadi $(x - a)^2$ bu. Kemudian atas dan bawah dicoret, sehingga didapatkan 1^2 berarti jawabannya 1 .</i>
Peneliti	: <i>.....Kira-kira apa alasan adik menggunakan cara pemfaktoran?</i>
FI20	: <i>Karena jikalau disubstitusikan hasilnya $\frac{0}{0}$ bu.</i>

Dari petikan wawancara tersebut terlihat bahwa struktur kognitifnya sudah mampu melakukan perhitungan secara mental dalam hal metode substitusi. Siswa juga menyadari bahwa dengan metode substitusi hasilnya tak tentu sehingga dia harus menggunakan metode yang lain. Metode yang dipilih oleh siswa tersebut dalam menentukan nilai limit sebenarnya sudah tepat yaitu dengan menggunakan metode pemfaktoran. Akan tetapi, dia belum mampu *menginteriorisasi* secara sempurna metode pemfaktoran tersebut, karena hasil pemfaktoran dan kanselasi yang dikerjakan tidaklah tepat. Hal ini disebabkan karena penguasaan konsep awal tentang aljabar siswa belum matang.

Menurut Eisenhart, pengetahuan prosedural dan pengetahuan konseptual merupakan aspek penting dalam pemahaman matematika dan untuk memahami matematika harus menerapkan kedua pengetahuan tersebut.¹⁷⁰ Itulah sebabnya

¹⁷⁰ *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa...*, hal. 139

pada tahap aksi siswa dianggap masih sebatas melakukan aktifitas prosedural dan belum memiliki pengetahuan prosedural apalagi pengetahuan konseptual, siswa mengerjakan tanpa memiliki kesadaran (menggunakan pengetahuan) dalam melaksanakan tiap-tiap langkah dari proses jawabannya.

Untuk meningkatkan pemahaman siswa tersebut salah satunya adalah setiap pembelajaran hendaknya senantiasa mengarahkan pengetahuan prosedural ke arah konseptual. Tidak hanya itu saja, seharusnya dalam pembelajaran hendaknya menggunakan bahasa yang mudah dicerna oleh fikiran siswa. Salah satu caranya adalah saat memberikan penjelasan tentang penyelesaian suatu masalah siswa diajak mengingat kembali dasar dari perubahan tiap langkah tersebut, entah itu berhubungan dengan materi sebelumnya ataupun berkaitan dengan definisi ataupun teorema/sifat-sifat yang terdapat pada materi baru tersebut.

Dengan menanamkan pemahaman yang bertumpu pada pengetahuan prosedural yang dikuatkan dengan pengetahuan konseptual, siswa diharapkan mampu menerapkan pengetahuannya tersebut pada situasi permasalahan yang berbeda-beda. Karena menurut Hudojo, bahwa mempelajari suatu materi matematika yang baru, seseorang akan lebih mudah mempelajarinya jika itu didasari kepada apa yang telah diketahuinya.¹⁷¹

Hasil Penelitian ini juga sesuai dengan hasil penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Minanur Rohman yang juga menggunakan Teori APOS sebagai alat untuk analisis data. Judul penelitiannya adalah "*Identifikasi Struktur Kognitif*

¹⁷¹ *Ibid...*, hal.140

Siswa dalam Memahami Konsep Limit Fungsi". Dari hasil analisis data berdasarkan Teori APOS tersebut diperoleh kesimpulan bahwa 3 siswa yang menjadi subjek penelitiannya masih berada pada tahap aksi.

2. Sebagian Besar Siswa Menganggap Simbol $\lim_{x \rightarrow a}$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty}$ Masih Kosong dari Makna

Dari analisis data tes dan data hasil wawancara, sebagian besar siswa menganggap simbol limit ($\lim_{x \rightarrow a}$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty}$) masih kosong dari makna. Faktanya, adalah banyak siswa yang tidak menyertakan simbol limit tersebut dalam langkah-langkah pengerjaannya. Memang dalam matematika kita juga sering dihadapkan pada simbol-simbol yang kosong dari arti, misalnya $x + y = z$ belum tentu itu bermakna atau berarti bilangan demikian juga tanda $+$ belum tentu berarti operasi tambah untuk dua bilangan. Makna huruf dan tanda itu tergantung dari permasalahan yang mengakibatkan terbentuknya model itu. Hal ini berbeda dengan simbol limit ($\lim_{x \rightarrow a}$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty}$). Simbol limit tersebut tidaklah kosong dari arti, tetapi simbol limit tersebut dipakai untuk menunjukkan suatu konsep dalam struktur matematika. Simbol-simbol matematika tersebut bersifat artifisial yang memiliki arti setelah sebuah makna diberikan kepadanya.¹⁷²

Seperti bentuk $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dan $f(x)$, kedua simbol tersebut memiliki makna dan penggunaan yang berbeda, dan hal ini dapat diketahui jika seseorang

¹⁷² Moch. Masykur dan Halim Fathani, *Mathematical Intelligence: Cara Cerdas Mengasah Otak dan Menanggulangi Kesulitan Belajar*, (Jogjakarta: Ar-Ruzz Media, 2008), hal. 46-47.

memahami definisi dari simbol-simbol tersebut. Pada materi SMA konsep limit fungsi yang ditunjukkan dengan simbol $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ memiliki definisi intuitif yang berarti bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari a , maka $f(x)$ dekat ke L .¹⁷³ Perlu diperhatikan bahwa tidak ada yang mensyaratkan sesuatu agar tepat di a . Fungsi f juga tidak perlu terdefinisi di a .¹⁷⁴ Hal inilah sebenarnya yang membedakan makna dari sebuah simbol $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dengan simbol $f(x)$ untuk $x = a$. Jadi sesungguhnya peran simbol sangatlah berguna dalam memahami suatu permasalahan karena di dalam simbol menyimpan sebuah struktur matematika yang lengkap yang memuat konsep, definisi, dan teorema-teorema.

Siswa yang melupakan simbol-simbol dapat dikatakan bahwa mereka belum terlalu memahami definisi ataupun teorema-teorema yang membangun suatu konsep matematika. Siswa yang belum memahami definisi limit fungsi tercermin pada hasil pengerjaannya sebagaimana berikut:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{a^2 - a^2}{a - a} = \frac{0}{0} = 0$$

Dari jawaban tertulis siswa tersebut, terlihat bahwa dia belum memiliki pemahaman mengenai definisi limit fungsi. Siswa tersebut belum mampu membedakan simbol $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dan $f(x)$, sehingga dia cenderung melihat konsep limit sebagai konsep fungsi, yaitu menganggap bahwa $x = a$, padahal dalam konsep limit fungsi tak ada jaminan bahwa $x = a$, apalagi pada bentuk yang tidak terdefinisi. Dalam hal ini berarti siswa tersebut menganggap simbol $f(x)$ itu

¹⁷³ Purcell, *et all*, translate by I nyoman Susila., *Kalkulus Edisi 8*, (Jakarta: Erlangga, 2003), hal. 64.

¹⁷⁴ *Ibid...*, hal. 64

sama meskipun ditambah dengan simbol $\lim_{x \rightarrow a}$. Seperti juga dalam kasus jawaban

siswa sebagaimana berikut ini:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} 2x - 5 + \lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 + 4x && \dots\dots\dots (i) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 2(3) - 5 + \lim_{x \rightarrow 3} 3(3)^2 + 4(3) && \dots\dots\dots (ii) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} 6 - 5 + \lim_{x \rightarrow 3} 27 + 12 \\ &= 1 + 39 = 40 \end{aligned}$$

Bila dicermati lebih dalam (*perubahan dari langkah (i) ke (ii)*) langkah pengerjaan yang dilakukan oleh siswa tersebut mencerminkan bahwa dia belum mencoba membangun pengetahuannya dengan berdasar pada teorema tepatnya adalah teorema substitusi. Teorema substitusi sebenarnya telah mengatakan bahwa “*Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ asalkan $f(a)$ terdefinisi. Dalam kasus fungsi rasional nilai penyebut di a tidaklah 0*”. Dalam hal ini berarti siswa masih sekedar mencari sebuah jawaban yang setiap langkah pengerjaannya belum didasarkan pada pengetahuan konseptual. Hal ini diperjelas dengan petikan wawancara sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Oke, coba adik cermati jawaban adik tersebut kira-kira ada yang kurang tepat atau tidak dalam penulisan kamu!</i>
FD31	: <i>Saya rasa sudah benar bu, saya pakai cara substitusi langsung.</i>
Peneliti	: <i>Substitusi langsung itu ada atau tidak teoremanya?</i>
FD31	: <i>Lupa bu.</i>

Dalam kasus lain misalnya, *misunderstanding* tentang penggunaan teorema dan anggapan kosong tentang sebuah simbol akan berdampak pada ketidakmampuan untuk menentukan nilai dari suatu limit fungsi.

Sebagaimana jawaban siswa berikut ini:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} \cdot \frac{x + a}{x + a} \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$= \frac{(\cancel{x^2 - a^2})(x + a)}{(\cancel{x^2 - a^2})} \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$$= x + a$$

Dari jawaban siswa tersebut terlihat bahwa dia mengabaikan simbol limit, sehingga akibatnya kesimpulan jawabannya kurang lengkap (*lihat (iii)*). Dia menuliskan jawaban hanya sampai hasil $x + a$. Itulah contoh beberapa kasus yang membuktikan bahwa, jika sebuah langkah-langkah pengerjaan tidak didasarkan ide suatu konsep, maka akan menyebabkan kesulitan tersendiri bagi siswa pada saat menyelesaikan soal-soalnya. Hal ini sebagaimana pendapat Herman Hudojo bahwa keterampilan yang dimiliki oleh peserta didik didasarkan atas pemahaman terhadap konsep dan teorema yang telah dipelajari oleh peserta didik dan dari atas pemahamannya ini peserta didik diberikan latihan yang cukup, namun tidak berlebihan. Latihan tersebut hendaknya segera diberikan setelah konsep atau teorema dipahami oleh peserta didik.¹⁷⁵

3. Terdapat kriteria tertentu dari Teori APOS yang tidak dipenuhi pada nomer soal tertentu

Berdasarkan Tabel 4.2 ternyata untuk nomer-nomer tertentu ada kriteria tingkat pemahaman menurut Teori APOS tidak dipenuhi. Misalnya soal nomer 2a, tidak ada satupun siswa yang tingkat pemahamannya berada pada tahap skema. Karena tak satupun siswa yang mampu menggunakan Teorema d’Loupital

¹⁷⁵ Herman Hudojo, *Strategi Mengajar Belajar Matematika*, (Malang: IKIP Malang, 1990), hal. 164-166

(berhubungan dengan turunan fungsi) dalam menentukan nilai limit fungsinya. Hal ini disebabkan Teorema d’Loupital tidak disampaikan oleh guru, meskipun dalam beberapa referensi buku SMA teorema ini sudah diperkenalkan.

Sedangkan untuk soal nomer 2b, 3, dan 4 siswa mampu mengerjakannya dengan hasil dan proses yang benar, akan tetapi siswa belum mampu menjelaskan alasan dari langkah-langkah jawabannya tersebut berdasarkan pada definisi, sifat, teorema, ataupun rumus-rumus yang terdapat pada konsep limit fungsi. Hal ini sebagaimana jawaban tertulis siswa pada nomer soal 2b sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^2 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} - \frac{2x^2}{x^5} + \frac{3x^2}{x^5} - \frac{2}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}} \dots\dots\dots (i) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^5}}{3 - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}} \dots\dots\dots (ii) \\ &= \frac{1 - 0 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} \dots\dots\dots (iii) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Pada jawaban tertulis siswa tersebut, mereka membagi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan x^5 , lalu menyederhanakannya dengan menggunakan aturan pangkat (*lihat langkah (ii)*). Selanjutnya mereka mengerti bahwa yang masih berbentuk $\frac{2}{x}$, $\frac{3}{x^3}$, $\frac{2}{x^5}$, $\frac{2}{x^4}$, dan $\frac{1}{x^5}$ adalah menjadi 0 (*lihat langkah (iii)*). Perubahan bentuk tersebut dipahami oleh siswa hanya sebagai ketentuan yang sumbernya dari guru, tanpa mempunyai argumen secara teoritis (hanya meniru pola). Berikut adalah petikan wawancara dengan FD2 dan FD28:

Petikan wawancara dengan FD2:

FD2	: Untuk nomer 2b saya menggunakan metode dengan membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut. (menjelaskan jawabannya di lembar jawabannya).
Peneliti	: Nah, itu pada langkahmu yang ketiga muncul angka 0? Itu apa alasannya kira-kira?
FD2	: Apa ya bu? Kemarin dari pak Ali contohnya begitu bu.
Peneliti	: Mungkin ada sifat/teorema yang menjamin?, atau mungkin kamu memahaminya bagaimana?
FD2	: Tidak tahu bu, cuma tahu contoh dari pak Ali begitu bu.

Dari petikan wawancara FD2 terlihat sudah mampu memilih dan menggunakan metode yang tepat dalam menentukan nilai limitnya, akan tetapi saat ditanya lebih lanjut tentang langkah-langkah jawabannya FD2 lebih banyak memberikan alasan yang menyiratkan FD2 masih terpaku pada pekerjaan guru. Dengan kata lain, FD2 dalam mengerjakan soal 2b belum memiliki bekal konseptual yang matang untuk mendukung argumennya, dia hanya sekedar meniru pola dari guru. Hal ini juga senada dengan hasil wawancara FI5 berikut ini:

FI5	: Saya menggunakan metode dengan membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut. (menjelaskan jawabannya di lembar jawabannya).
Peneliti	: Kenapa kamu memakai metode tersebut kok tidak pakai cara substitusi langsung saja?
FI5	: Karena nanti hasilnya $\frac{\infty}{\infty}$ bu.
Peneliti	: Nah, itu pada langkahmu yang ketiga muncul angka 0? Itu apa alasannya kira-kira?
FI5	: Hmm... (diam dan terlihat masih belum menemukan jawaban)
Peneliti	: Mungkin ada sifat/teorema yang menjamin?, atau mungkin kamu memahaminya bagaimana?
FI5	: Hmm... (masih terdiam)
Peneliti	: Berarti alasan mendapatkan 0 itu apa?
FI5	: Tidak tahu bu

Dari kedua petikan wawancara di atas mereka sudah mampu menjelaskan alasan dalam memilih metode penyelesaiannya yang tepat dan mereka juga sudah mampu menginternalisasi metode tersebut. Akan tetapi pemahaman konseptual yang dimiliki kedua siswa masih kurang. Hal ini terlihat pada saat mereka ditanya mengapa bentuk $\frac{2}{x}$, $\frac{3}{x^3}$, $\frac{2}{x^5}$, $\frac{2}{x^4}$, dan $\frac{1}{x^5}$ dapat disamadengankan dengan 0. Mereka belum mampu memberikan alasan mengenai pertanyaan tersebut menurut definisi ataupun teorema limit fungsi bahwa $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0$, dimana a adalah bilangan real, dan n adalah bilangan positif, atau cukup dengan mengatakan bahwa suatu bilangan apabila dibagi dengan ∞ akan menghasilkan nilai yang sangat kecil sekali yaitu 0. Tetapi mereka belum mampu memberikan penjelasan baik secara formal ataupun intuitif sebagaimana yang telah dijelaskan tadi. Hal ini sebagaimana yang telah dijelaskan oleh Zaskis dan Campbell bahwa jika pemahaman beradasrakan Teori APOS berada pada tahap proses, maka siswa tersebut memiliki pemahaman prosedural.¹⁷⁶

4. Jawaban siswa yang berada di luar kriteria Teori APOS

Dari jawaban tertulis siswa ternyata banyak siswa yang jawabannya tidak bisa dianalisis menurut kriteria Teori APOS yaitu mencapai persentase 10,5%. Hal ini disebabkan mereka tidak menjawab soal atau jawabannya tidak mencerminkan penggunaan metode limit fungsi sama sekali, sehingga peneliti tidak bisa menganalisis tingkat pemahamannya berdasarkan Teori APOS.

¹⁷⁶ Zaskis dan Campbell (dalam Maryono), *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa...*, hal. 148

Banyaknya siswa yang tidak menjawab ini mencerminkan siswa tidak merespon tugas yang telah diberikan, sehingga mereka tidak bisa diklasifikasikan pada tahap tertentu.

Kemungkinan faktor yang menyebabkan siswa tidak menjawab soal ini adalah karena siswa belum memiliki pemahaman yang cukup untuk melakukan aksi, sehingga dalam benaknya belum membentuk suatu struktur kognitif. Jika hal tersebut dibiarkan maka akan menyebabkan dangkalnya pengetahuan-pengetahuan yang dimiliki oleh siswa. Padahal menurut Hiebert dan Carpenter dari sudut pandang psikologi mengatakan bahwa belajar matematika haruslah dengan pemahaman.¹⁷⁷

5. Secara umum tingkat pemahaman siswa GK-FD dan GK-FI berdasarkan Teori APOS sama-sama masih berada pada tahap aksi.

Secara umum tingkat pemahaman siswa GK-FD dan GK-FI berdasarkan Teori APOS masih berada pada tahap aksi. Hal ini disebabkan karena baik siswa GK-FD ataupun GK-FI belum mampu menginternalisasi metode-metode limit fungsi dengan baik. Akan tetapi pada tahap yang lebih tinggi dari Teori APOS siswa GK-FI mampu menunjukkan tingkat pemahaman yang lebih bila dibandingkan dengan siswa GK-FD. Hal ini dapat dilihat dari Tabel 4.41 dan Tabel 4.42 yang menyatakan bahwa Pada tahap proses, persentase rata-rata tingkat pemahaman siswa GK-FD < GK-FI dengan selisih 0,5%. Pada tahap objek, persentase rata-rata tingkat pemahaman siswa GK-FD < GK-FI dengan

¹⁷⁷ Hiebert & Carpenter (dalam Maryono), *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa...*, hal. 148

selisih 2,34%. Pada tahap skema hanya mampu dicapai oleh siswa GK-FI dengan persentase 2,67%.

Dari hasil persentase tersebut menggambarkan bahwa pada titik-titik tertentu siswa GK-FI memiliki pemahaman yang lebih dibanding siswa GK-FD walaupun pemahaman siswa GK-FI belum sempurna. Bahkan, yang mampu menunjukkan pemahaman yang lebih tersebut hanyalah beberapa siswa saja dari GK-FI. Hal ini sebagaimana teori yang mengatakan bahwa karakteristik individu yang memiliki gaya kognitif yang sama belum tentu memiliki kemampuan yang sama.¹⁷⁸

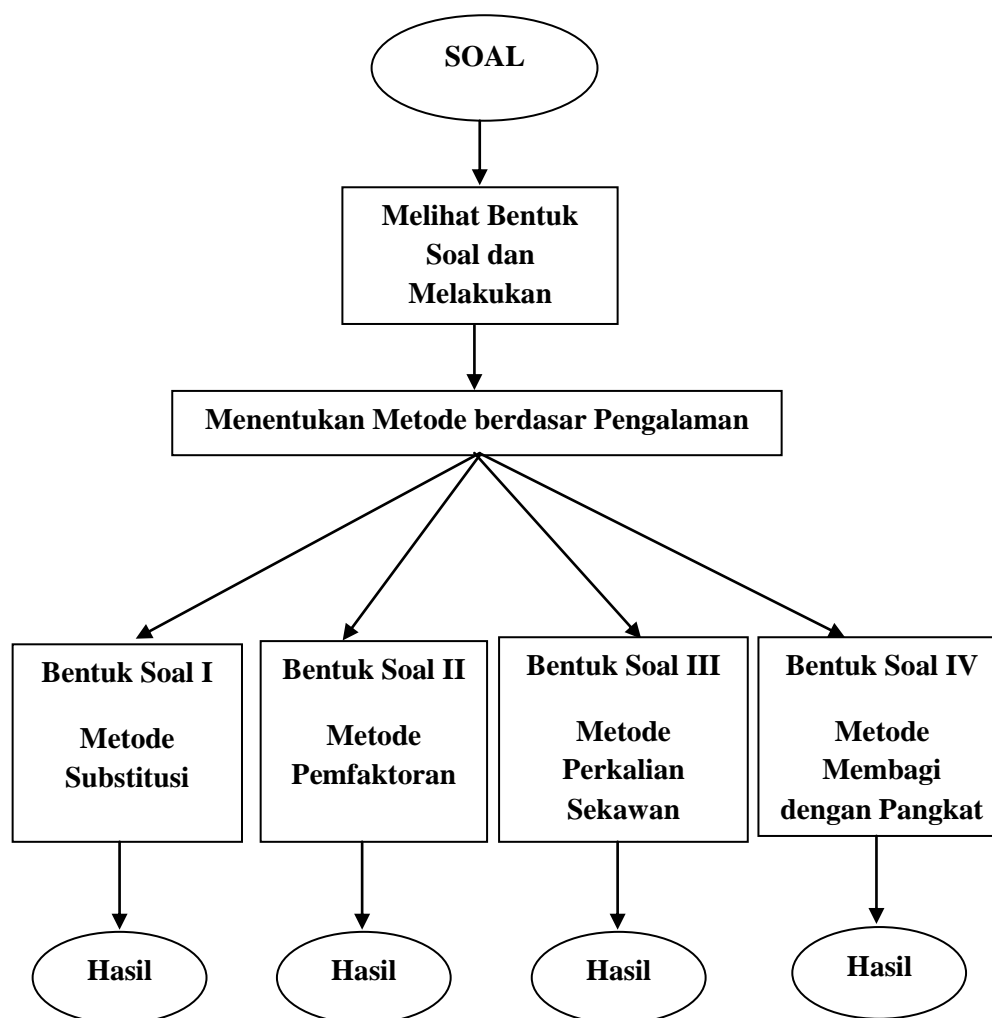
Sedangkan dari analisis dan deskripsi data dapat dilihat bahwa alur berfikir antara siswa GK-FI dan GK-FD yang dimaknai dengan “strategi kognitif” dalam menyelesaikan soal terdapat suatu perbedaan, walaupun perbedaan ini tak selamanya dimaknai selalu menghasilkan sebuah jawaban yang benar. Tetapi strategi kognitif siswa GK-FI cenderung lebih terstruktur bila dibandingkan dengan siswa GK-FD. Hal ini sebagaimana teori yang mengatakan bahwa individu yang memiliki gaya kognitif yang berbeda, kecenderungan perbedaan kemampuan yang dimilikinya lebih besar.¹⁷⁹

Di bawah ini akan disajikan sebuah bagan skematis yang diharapkan mampu memperjelas perbedaan kemampuan siswa GK-FI dan GK-FD melalui strategi kognitif yang dikembangkan dalam menyelesaikan persoalan limit fungsi yang akan disajikan pada gambar skematis 4.5.1 dan dan 4.5.2 sebagai berikut:

¹⁷⁸ Hamzah, B. Uno, *Orientasi Baru dalam Psikologi...*, hal.186

¹⁷⁹ *Ibid...*, hal. 186

4.2.1 Strategi Kognitif Siswa dengan Gaya Kognitif *Field Dependent* (GK-FD)
dalam Menyelesaikan Soal Limit Fungsi



Gambar 4.2.1 Alur Strategi Kognitif GK-FD

Hasil penelitian yang diwakili oleh 3 subjek penelitian pada siswa GK-FD yaitu FD21, FD27, dan FD31 terlihat bahwa strategi kognitif yang digunakan dalam menyelesaikan soal tentang limit fungsi pertama kali adalah melihat tipe soal kemudian mempersepsi metode limit fungsi sesuai dengan pengalaman soal yang pernah ditemui. Siswa GK-FD mempersepsi metode limit fungsi sesuai dengan bentuk soal yang pernah ditemui, mereka pun memiliki kesulitan dalam

mengingat nama-nama metode limit fungsi. Hal ini sebagaimana petikan wawancara berikut ini. Petikan wawancara dengan FD21:

Peneliti	: <i>Sekarang kita lanjut dengan jawabanmu 2b. Coba jelaskan!</i>
FD21	: <i>(Berpikir lama tanpa berkata apapun)</i>
Peneliti	: <i>Ayo jelaskan saja proses jawabanmu itu! Cara yang seperti pekerjaanmu itu apa istilahnya?</i>
FD21	: <i>Opo yo jenenge? (Sambil berpikir). Saya tidak tahu namanya bu, pokoknya saya kalikan dengan $\frac{1}{x^5}$ bu.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kok adik memilih $\frac{1}{x^5}$ sebagai pengalinya?</i>
FD21	: <i>Hmmm.... Apa ya bu?</i>

Petikan wawancara dengan FD27:

Peneliti	: <i>Coba sekarang jelaskan jawabanmu yang nomer 2a!</i>
FD27	: <i>Menurut saya berdasarkan yang dibelajarkan oleh pak Ali bu, pada waktu pelajaran matematika bu ya caranya seperti ini bu.</i>
Peneliti	: <i>Cara yang seperti ini namanya apa?</i>
FD27	: <i>Kalau disuruh menyebutkan metode saya tidak tahu bu.</i>
Peneliti	: <i>Coba ini ke sini namanya diapakan? (menunjuk $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$)</i>
	$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a)}{(x - a)}$
FD27	: <i>Saya tidak ngerti bu. Ini hanya insting saya bu.</i>
Peneliti	: <i>Perhatikan! Berarti kan bentuk $x^2 - a^2$ sampeyan rubah dulu ke bentuk $(x + a)(x - a)$ ini namanya apa?</i>
FD27	: <i>Diakarkan bu.</i>

Dari hasil wawancara seputar jawaban tertulis tersebut terlihat bahwa siswa GK-FD sukar mengingat nama-nama metode limit fungsi. Sehingga mereka kesulitan dalam menjelaskan seputar jawabannya. Hal ini sesuai dengan teori

yang dikemukakan oleh Daniels tentang kecenderungan umum seorang *field dependent* (FD) yaitu “*Have difficulty retrieving information from long term memory*”.¹⁸⁰ Yaitu bahwa individu GK-FD memiliki kesulitan dalam mengingat. Artinya siswa GK-FD memiliki kesulitan dalam mengingat nama-nama metode limit fungsi. Pentingnya mengingat nama ini adalah karena dalam sebuah nama dari suatu metode akan menyimpan makna tersendiri. Misalnya, metode “*membagi pangkat tertinggi dari penyebut*” berarti siswa akan lebih mudah mengartikannya dengan langsung memperhatikan bagian penyebut dan melihat pangkat tertingginya yang mana.

Salah satu penyebab kesulitan siswa GK-FD dalam mengingat adalah karena dalam menentukan suatu metode limit fungsi siswa GK-FD cenderung berpaku pada contoh guru pada soal-soal yang sejenis/hampir mirip. Hal ini disebabkan karena siswa GK-FD mengalami kesulitan dalam menggali dan menggunakan isyarat yang kurang menonjol.¹⁸¹ Siswa GK-FD kemungkinan akan terkecoh dengan mengerjakan soal seperti di bawah ini:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 9}{x\sqrt{x^2 + 9}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{x^2}{x} + \frac{9}{x}}{x\sqrt{\frac{x^2}{x} + \frac{9}{x}}} \end{aligned}$$

¹⁸⁰ Mehtap Cakan & Arif Altun, *Undergraduate Student's Academic Achievement, Field Dependent/Field Independent Cognitive Style and Attitude toward Computers*, (Educational Technology & Society, 2006). 9 (1), 289-297

¹⁸¹ *Ibid...*,

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+0}{1\sqrt{1+0}} = \frac{4}{1.1} = 4$$

Dalam hal ini siswa memilih metode limit fungsi yang tidak tepat karena dia telah terkecoh dengan bentuk akar pada limit fungsi tersebut.

Peneliti	: <i>Sekarang coba jelaskan jawabanmu yang nomer 3!</i>
FD21	: <i>Ini apa ya jenenge yo?</i>
Peneliti	: <i>Dikalikan...?</i>
FD21	: <i>Dikalikan sekawan.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa pakai metode perkalian dengan sekawan?</i>
FD21	: <i>Karena akarnya tidak sama.</i>

Dari petikan wawancara tersebut sebenarnya dia telah mempersepsi soal tersebut dengan soal-soal yang telah dia temui sebelumnya. Pada beberapa soal yang telah ditemui sebelumnya, jika limit fungsi yang berbentuk akar berarti metode yang digunakan adalah perkalian dengan sekawan. Dalam hal ini siswa GK-FD tersebut belum menyadari bahwa pertama kali dalam menentukan nilai suatu limit fungsi adalah menggunakan metode substitusi langsung, baru jika hasilnya tak terdefinisi harus menggunakan metode lain. Hal ini sebagaimana petikan wawancara dengan siswa GK-FD sebagai berikut:

Peneliti	: <i>Trus kenapa kok ini dikalikan dengan sekawan?</i>
FD21	: <i>Hmmm.. wayahe $\frac{5}{4}$ yo.(menghitung dalam imajinasi)</i>
Peneliti	: <i>Lalu menurut kamu cara yang seperti pekerjaanmu tadi tepat atau tidak?</i>
FD21	: <i>Tidak tahu bu.hehe</i>

Dari hasil wawancara tersebut, dalam memilih metode limit fungsi siswa GK-FD belum memiliki alur pemrosesan yang terstruktur. Yaitu, GK-FD tidak mencoba metode substitusi langsung terlebih dahulu. Siswa tersebut terburu-buru

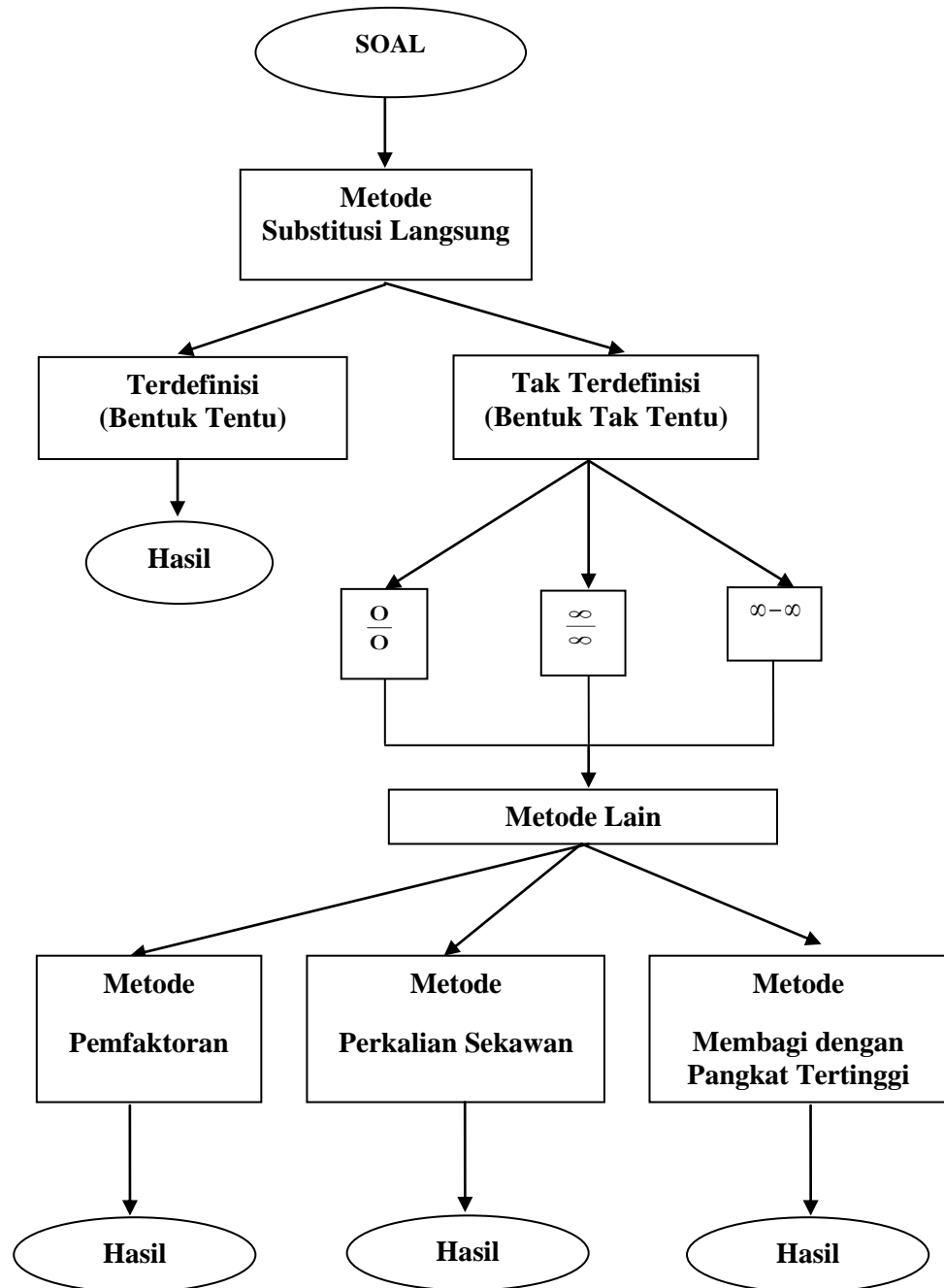
menggunakan metode lain (perkalian sekawan). Hal ini terjadi karena pengalaman dalam kasus lain, bahwa pada saat menemui limit yang fungsinya berbentuk akar biasanya menggunakan metode perkalian dengan sekawan. Walaupun pada saat wawancara siswa GK-FD juga mencoba dengan cara substitusi langsung (dalam imajinasi) dan menghasilkan jawaban $\frac{5}{4}$, tetapi di saat ditanya tentang jawabannya dengan metode perkalian sekawannya tadi tepat atau tidak siswa tersebut belum mampu memutuskan dengan mengatakan “*tidak tahu bu*”.

Siswa GK-FD tersebut mampu mencoba menggunakan metode substitusi dan perkalian dengan sekawan yang sama-sama menghasilkan jawaban yang terdefinisi tetapi belum mampu memutuskan jawaban yang benar itu mana, itu artinya siswa GK-FD cenderung menganggap bahwa nilai limit fungsi itu bersifat dinamis. Hal tersebut memberikan gambaran bahwa siswa GK-FD belum dapat memilah penggunaan metode dalam menentukan nilai limit fungsi dari soal yang diberikan.

Dari hasil tersebut menunjukkan bahwa siswa dengan gaya kognitif *field dependent* ada kecenderungan memandang permasalahan secara menyeluruh. Hal ini sesuai dengan teori bahwa individu GK-FD cenderung menerima suatu pola sebagai suatu keseluruhan. Mereka sulit untuk memfokuskan pada satu aspek dari satu situasi, atau menganalisa pola menjadi bagian-bagian yang berbeda.¹⁸²

¹⁸² Gregory A. Davis, *The Relationship Between Learning Style ...*, hal. 29

4.2.2 Strategi Kognitif Siswa dengan Gaya Kognitif *Field Independent* (GK-FI) dalam Menyelesaikan Soal Limit Fungsi



Gambar 4.2.2 Alur Strategi Kognitif GK-FI

Hasil penelitian yang diwakili oleh 3 subjek penelitian pada siswa GK-FI yaitu FI5, FI7, dan FI11 terlihat bahwa strategi kognitif yang digunakan dalam menyelesaikan soal tentang limit fungsi pertama kali adalah mencoba dulu dengan metode substitusi langsung. Dengan metode substitusi langsung tersebut siswa GK-FI dapat mengetahui apakah akan menjumpai bentuk tak tentu (tak terdefinisi) atau tidak. Jika menjumpai hasil yang bukan bentuk tak tentu maka mereka mampu memutuskan itulah hasil dari nilai limit fungsinya. Berarti dalam menentukan nilai limit fungsi metode substitusi tersebut dapat digunakan. Hal ini sebagaimana petikan wawancara dengan FI7 berikut ini:

Peneliti	: <i>Sekarang coba jelaskan jawabanmu yang nomer 3!</i>
FI7	: <i>Ini disubstitusikan.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kok memakai cara substitusi?</i>
FI7	: <i>Kalau pakai teorema lupa bu.</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kok tidak pakai cara yang lain saja?</i>
FI7	: <i>Substitusi masih bisa selama hasilnya tidak $\frac{0}{0}$.</i>

Sedangkan, saat menjumpai bentuk tak tentu siswa GK-FI akan menyadari bahwa mereka harus menggunakan metode yang lain (metode pemfaktoran/perkalian sekawan/membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut).

Sebagaimana petikan wawancara dengan FI5 berikut ini:

Peneliti	: <i>Iya, oke. Skarang coba jelaskan jawabanmu yang nomer 2b?</i>
FI5	: <i>Saya menggunakan metode dengan membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut. (menjelaskan jawabannya di lembar jawabannya).</i>
Peneliti	: <i>Kenapa kamu memakai metode tersebut kok tidak pakai cara substitusi langsung saja?</i>
FI5	: <i>Karena nanti hasilnya $\frac{\infty}{\infty}$ bu.</i>

Dari hasil analisis jawaban dan wawancara diperoleh bahwa apa yang dilakukan oleh siswa GK-FI untuk menentukan nilai limit fungsi adalah siswa GK-FI sudah mampu melihat bentuk tentu dan tak tentu sehingga mereka bisa memastikan bahwa jika menemui bentuk tak tentu secara otomatis harus menggunakan metode lain (metode pemfaktoran/perkalian sekawan/membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut). Sehingga dalam mengerjakan soal siswa GK-FI memiliki alternatif metode dengan memperhatikan syarat-syarat persepsinya.

Hal tersebut memberikan gambaran bahwa siswa GK-FI dapat memilah penggunaan metode dalam menentukan nilai limit fungsi dari soal yang diberikan. Berdasarkan teori, bahwa individu dengan gaya kognitif *field independent* lebih menunjukkan bagian-bagian terpisah dari pola menyeluruh dan mampu menganalisa pola ke dalam komponen-komponennya.¹⁸³ Artinya strategi kognitif yang muncul pada siswa GK-FI tersebut diperoleh dari upaya untuk memilah penggunaan metode-metode limit fungsi yang dikuasainya.

¹⁸³ *Ibid.*, hal. 29