

LOGIKA DASAR MATEMATIKA

MUNIRI

Berlogika??

Dalam kitab *AH-Mustashfa* karya Imam Al-Ghazali ia berkata dalam bahasa arab yang berbunyi "*Man lam ya'rif al-mantiq la yutsaqu bi' ilmihi*" yang artinya barangsiapa yang tak menguasai ilmu mantiq maka ilmu yang ia ajarkan tak dapat dipercaya. Ini berarti seorang yang memiliki cita-cita sebagai seorang guru hendaklah ia menguasai mantiq agar ilmu yang ia ajarkan itu bermanfaat dan dapat dipercaya.

Dalam kitab *Sullamul Munawraq* yang mana salah satu bait nya berbunyi "*Fayashim al-afkar 'an ghayy al-khattha wa 'an daqq al-fahm yaksyif al-ghitha*". "[Mantiq atau logika berfungsi untuk] menjaga pikiran agar tidak terpeleset ke dalam kesalahan, dan [juga] menyingkap tabir yang menyelimuti rumitnya pemahaman."

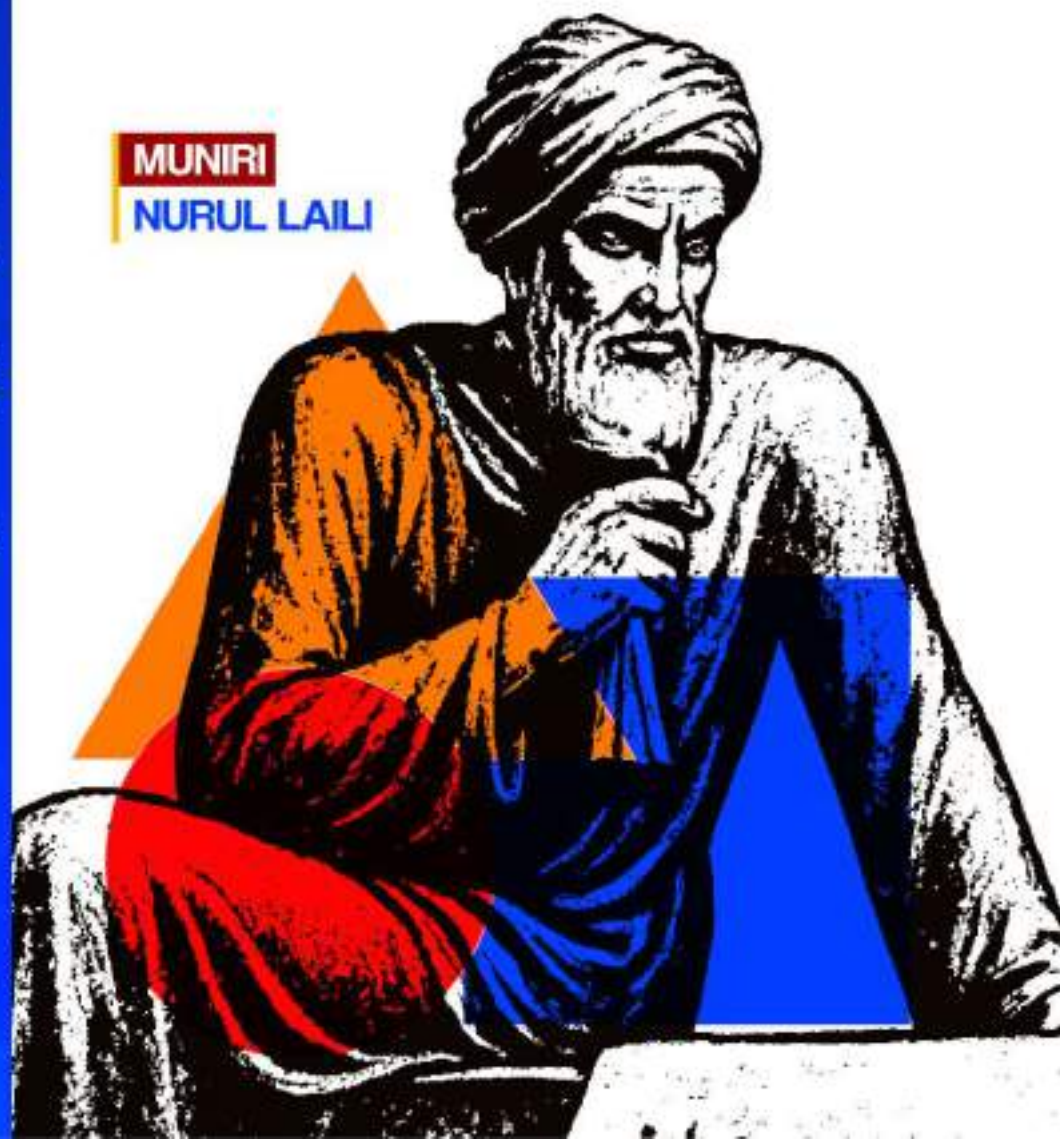
Logika Dasar MATEMATIKA



MUNIRI

NURUL LAILI

Logika Dasar Matematika



Akademia Pustaka

Jl. Durenkempul, Durenkempul, Tangerang
<http://akademiapustaka.com/>
redaksi@akademiapustaka@gmail.com
@akademiapustaka
akademiapustaka

081214179358



LOGIKA DASAR
MATEMATIKA

Muniri
Nurul Laili



LOGIKA DASAR MATEMATIKA

Copyright © Muniri & Nurul Laili, 2025

Hak cipta dilindungi undang-undang

All right reserved

Editor: Saiful Mustofa

Layouter: Endina Putri Shavyra

Desain cover: Dicky M. Fauzi

vii+186 hlm: 14 x 20 cm

Cetakan: Pertama, Oktober 2025

ISBN: 978-623-157-223-3

Anggota IKAPI

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memplagiasi atau memperbanyak seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari penerbit.

Diterbitkan oleh:

Akademia Pustaka

Jl. Raya Sumbergempol, Sumberdadi, Tulungagung

Telp: 0818 0741 3208

Email: redaksi.akademia.pustaka@gmail.com

Website: www.akademiapustaka.com

Berlogika??

Dalam kitab *Al-Mustashfa* karya Imam Al-Ghazali ia berkata dalam bahasa arab yang berbunyi “*Man lam ya’rif al-mantiq la yutsaqu bi’ ilmibi*” yang artinya barangsiapa yang tak menguasai ilmu mantiq maka ilmu yang ia ajarkan tak dapat dipercaya. Ini berarti seorang yang memiliki cita-cita sebagai seorang guru hendaklah ia menguasai mantiq agar ilmu yang ia ajarkan itu bermanfaat dan dapat dipercaya.

Dalam kitab *Sullamul Munawraq* yang mana salah satu bait nya berbunyi “*Faya’shim al-afkar ‘an ghayy al-khatha wa ‘an daqiq al-fahm yaksyif al-ghitha*”. “[Mantiq atau logika berfungsi untuk menjaga pikiran agar tidak terpeleset ke dalam kesalahan, dan [juga] menyingkap tabir yang menyelimuti rumitnya pemahaman.”

Persembahan:

Dipersembahkan Kepada yang mulia kedua orang tuaku, para guru serta Istri & anak-anakku tersayang

Al-Qur'an QS 17: 36:

Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggung jawaban

Kata Pengantar

Tiada kata indah selain ungkapan rasa syukur kehadirat Allah SWT, atas limpahan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga buku *Logika Dasar Matematika* dapat dihadirkan di hadapan para pembaca.

Buku ini dimaksudkan untuk memenuhi kebutuhan mahasiswa, yang sedang mempelajari dan memperdalam konsep berpikir logis dalam matematika yang menjadi landasan fundamental matematika. Materi yang disajikan dalam buku ini telah disesuaikan dengan berpedoman kurikulum berbasis kerangka kualifikasi nasional Indonesia (KKNI) serta silabi matakuliah Logika Matematika yang cakupannya memuat tentang pengertian logika, logika proporsional yang mengkaji tentang kalkulus proposisi, validitas dan konsistensi, analisis argument dan pembuktian kebenaran secara logis, serta logika kuantor yang mengkaji transformasi proposisi, interpretasi formula, bentuk normal prenex dan pembuktian pada logika kuantor disertai teladan-teladan dan soal-soal Latihan yang relevan.

Ungkapan terimakasih secara tulus disampaikan kepada semua pihak yang telah mensupport terbitnya buku ini, terkhusus kepada para guru dan dosen yang memberikan pengetahuan dan bimbingan ilmu logika dan penalaran formal dalam matematika.

Sajian buku ini telah didesain sebaik mungkin, namun masih terasa terdapat kekurangan dan kelemahannya.

Menyadari akan hal ini, saran dan kritik para pembaca sangat berarti buat penyempurnaan buku ini sehingga kehadirannya pada edisi berikutnya lebih bermakna, berguna serta bermanfaat buat generasi mendatang.

Tulungagung, Juli 2025

Penulis

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	v
Daftar Isi	vii

BAB I

PENDAHULUAN	1
A. Pengertian.....	1
B. Proposisi Kategorik.....	8
C. Lambang Boole dan Diagram Venn.....	10
D. Soal-Soal Latihan.....	16

BAB II

LOGIKA PROPOSISIONAL	19
A. Pendahuluan.....	19
B. Kalkulus Proposisi	27
C. Validitas dan Inkonsistensi pada Logika Proposisional ..	40
D. Bentuk Normal Formula	41
E. Pembuktian Logika.....	44
F. Analisis Argumen.....	68
G. Soal-Soal Latihan.....	78

BAB III

LOGIKA KUANTOR.....	85
A. Dasar-Dasar Logika Kuantor	87
B. Transformasi Proposisi ke Formula Logika Kuantor.....	95
C. Interpretasi Formula Pada Logika Kuantor	98
D. Bentuk Normal Prenex	108
E. Pembuktian Logika Kuantor	112
F. Soal – Soal Latihan.....	129

BAB IV

KONSEP HIMPUNAN	135
A. Himpunan	135
B. Relasi	163
C. Fungsi.....	169
D. Soal-Soal Latihan.....	179
Daftar Bacaan	183

BAB I

PENDAHULUAN

A. Pengertian

Logika merupakan studi sistematis tentang struktur proposisi dan syarat-syarat umum mengenai penalaran yang sah dengan menggunakan metode atau atauran tertentu yang dikenal dengan argumen-argumen. Secara umum dapat dimengerti bahwa logika adalah ilmu yang mempelajari cara berpikir yang logis.

Logika adalah metode atau teknik yang didesain untuk meneliti ketepatan penalaran serta mengkaji prinsip-prinsip penalaran yang benar untuk penarikan kesimpulan yang benar pula. Ilmu logika berhubungan dengan kalimat-kalimat (argumen) dan hubungan yang ada diantara argumen tersebut. Tujuannya adalah memberikan aturan-aturan sehingga orang dapat menentukan apakah suatu argumen bernilai benar. Argument dalam logika bersifat umum, baik bahasa sehari-hari maupun bukti matematika yang didasarkan atas hipotesa-hipotesa. Oleh karena itu aturan-aturan yang berlaku di dalamnya haruslah bersifat umum dan tidak tergantung pada kalimat atau disiplin ilmu tertentu.

Secara umum logika dibedakan menjadi dua yaitu:

1. Logika Pasti, logika tegas, dan
2. Logika Tidak Pasti, logika kabur atau samar.

Logika pasti atau logika tegas meliputi logika pernyataan (*propositional logic*), logika predikat (*predicate logic*), logika hubungan (*relation logic*) dan logika himpunan. Sedangkan logika tidak pasti meliputi logika samar atau kabur (Fuzzy Logic).

Logika proposisional membicarakan tentang pernyataan tunggal dan kata hubungannya sehingga didapat kalimat majemuk yang berupa kalimat deklaratif, sedangkan logika predikat menelaah variabel dalam suatu kalimat, kuantifikasi dan validitas sebuah argumen.

Adapun logika hubungan mempelajari hubungan antara pernyataan, relasi simetri, refleksif, antisimtris, dan seterusnya. Adapun logika himpunan membicarakan tentang unsur-unsur himpunan dan hukum-hukum yang berlaku di dalamnya. Berbeda dengan bidang kajian logika di atas, bahwa logika kabur menelaah pertengahan dari dua nilai biner yaitu benar-salah, ya-tidak, diterima-ditolak, atau nol-satu. Kondisi yang ditunjukkan oleh logika kabur ini antara lain : bernilai baik, bagus, banyak, sedikit, sekitar x , sering, pada umumnya, dan seterusnya. Logika kabur banyak diterapkan dalam kecerdasan buatan, mesin pintar atau sistem cerdas dan alat-alat elektronika. Program computer dengan menggunakan

logika samar mempunyai kapasitas penyimpanan lebih kecil dan cenderung lebih cepat bila dibanding dengan logika tegas atau logika pasti.

Jika seseorang melakukan penalaran untuk menemukan kebenaran, maka konklusinya harus berupa pernyataan/proposisi yang benar. Untuk mencapai konklusi yang benar tersebut, penalaran harus berdasarkan pengetahuan atau fakta-fakta yang ada dan sudah diketahui kebenarannya. Dengan kata lain bahwa kebenaran pengetahuan atau fakta tersebut harus benar-benar “benar” atau benar-benar “salah”.

Pengetahuan atau fakta yang menjadi dasar konklusi dari penalaran disebut premis. Semua proposisi dalam premis harus memiliki nilai kebenaran benar. Hal ini adalah merupakan syarat mutlak untuk mencapai konklusi yang benar. Aktivitas penalaran juga meliputi penyusunan proposisi-proposisi itu menjadi premis yang dijadikan dasar menarik kesimpulan. Jika susunan premis tidak tepat, maka tidak dapat dijadikan dasar dalam penarikan kesimpulan, seperti berikut ini:

Teladan 1.1.

Semua pegawai negeri adalah menerima gaji. (Benar)

Semua pegawai swasta adalah menerima gaji. (Benar)

Jadi: semua pegawai negeri adalah pegawai swasta. (bernilai salah)

Berbeda dengan penalaran di atas, yaitu susunan premis yang tepat, akan menghasilkan penalaran yang tepat pula.

Teladan 1.2.

Semua koruptor adalah penjahat (Benar)

Ada pejabat tinggi yang koruptor (Benar)

Jadi: Ada pejabat tinggi yang menjadi penjahat (Bernilai benar).

Proposisi-proposisi tersebut di atas adalah tepat, premisnya juga benar, sehingga konklusinya benar, sedangkan. Jika penalaran di atas dikosongkan dari hal ini atau maknanya dihapus dengan menggantinya dengan simbol huruf, maka pola penyusunan sebagai berikut:

Teladan 1.3.

Semua a adalah c

b adalah a

Jadi: b adalah c

atau

Semua x adalah y

y adalah z

Jadi: x adalah z

Pola susunan penalaran tersebut adalah bentuk penalaran yang sah.

Aliran dalam Logika

1. Logika Tradisional
 - Pelopornya adalah Aristoteles (384-322 SM)
 - Terdiri dari analitika dan dialektika. Ilmu analitika yaitu cara penalaran yang didasarkan pada pernyataan yang benar sedangkan dialektika yaitu cara penalaran yang didasarkan pada dugaan.
2. Logika Metafisis
 - Dipelopori oleh F. Hegel (1770-1831 M)
 - Menurut Hegel, logika dianggap sebagai metafisika dimana susunan pikiran dianggap sebagai kenyataan.
3. Logika Epistimologi
 - Diperkenalkan oleh FH. Bradley (1846-1924) dan Bernhard Bosanquet (1848-1923 M).
 - Prinsip dari logika epistimologi ini adalah untuk mencapai pengetahuan yang memadai, pikiran yang logis dan perasaan halus mendalam yang digabungkan. Selain itu, untuk mencapai kebenaran, logika harus dihubungkan dengan seluruh pengetahuan yang lainnya.
4. Logika Instrumentalis/Fragmatis
 - Dipelopori oleh Jhon Dewey (1859-1952)

- Prinsipnya adalah logika merupakan alat atau instrumen untuk menyelesaikan masalah.

5. Logika Simbolis

- Logika simbolis adalah ilmu tentang penyimpulan yang sah (absah) yang dikembangkan menggunakan metode matematika dengan bantuan simbol-simbol khusus sehingga memungkinkan seseorang menghindari makna ganda dari bahasa sehari-hari.

- Pelopornya adalah Leibniz, De Morgan, dan Boole

Logika ini menggunakan bahasa simbol untuk mempelajari secara rinci bagaimana akal harus bekerja dan bercirikan teknis, matematis, dan ilmiah. Pemakaian simbol matematika ini untuk mewakili bahasa dalam bentuk pernyataan yang bernilai benar atau salah. Logika simbolis ini kemudian menjadi dasar logika matematika modern yaitu logika formal yang semata-mata menelaah bentuk dan bukan isi dari apa yang dibicarakan

Keuntungan Belajar Logika

Belajar logika memberikan beberapa keuntungan, yaitu:

1. Meningkatkan kemampuan berpikir analitis dan kritis.

Logika melatih seseorang untuk menilai informasi secara cermat, teliti, objektif dalam penalaran diri sendiri maupun orang lain. Dengan logika, seseorang mampu

menganalisis masalah secara sistematis dan menemukan solusi yang tepat

2. Membantu dalam memecahkan masalah secara sistematis dan efektif.

Dengan kata lain bahwa logika mengajarkan cara mengatur setiap proses berpikir hingga mencapai kesimpulan yang valid, membuat seseorang berpikir secara lurus dan tertib.

3. Membantu menghasilkan argumen yang meyakinkan dan komunikasi yang lebih baik.

Logika merupakan tulang punggung untuk menyusun argumen yang kuat, baik lisan maupun tulisan, sehingga dapat mengarahkan orang lain pada kebenaran. Serta membantu mengenali berbagai jenis kekeliruan dan menghindari kesalahan dalam berpikir, sehingga penalaran yang digunakan lebih tepat

4. Membantu dalam pengambilan keputusan yang tepat dan akurat.

Artinya bahwa kemampuan berpikir logis membantu seseorang untuk mengambil keputusan yang lebih bijaksana dalam berbagai situasi, baik pribadi maupun profesional

5. Menjembatani dalam memahami ilmu lain termasuk bidang ilmu pengetahuan dan teknologi.

Ini menunjukkan bahwa logika merupakan konsep fundamental dalam algoritma dan pemrograman komputer, yang menjadi dasar pembuatan program dan sistem digital.

B. Proposisi Kategorik

Aristoteles membedakan proposisi kategorik berdasarkan kualitas dan kuantitasnya. Yang dimaksud kualitas proposisi adalah ada-tidaknya hubungan antara subjek dan predikat. Jika subjek dan predikatnya mempunyai hubungan, maka proposisi itu disebut afirmatif atau kalimat positif dan dinyatakan dengan $S = P$, tetapi jika hubungan subjek dan predikatnya tersebut tidak ada, maka disebut proposisi negatif dan dinyatakan dengan $S \neq P$.

Konsep kualitas di atas merupakan salah satu konsep inti dalam sistem logika dan digunakan dalam menemukan bermacam-macam syarat penalaran. Maka perlu ada pengertian yang jelas tentang hal-hal yang berhubungan dengan proposisi kuantitas. Dan proposisi yang ada harus menuju pada suatu konsep yang jelas, misalnya konsep “manusia” dikenakan kepada setiap individu yang namanya manusia, seperti nama orang, contohnya si Ahmad, si Amir, si Ani, si Joko, dan seterusnya.

Yang dimaksud proposisi kuantitas adalah proposisi yang menunjukkan adalah jumlah (kuantitas), seperti satu, dua, ada, beberapa, semua, sebagian, dan seterusnya. Proposisi yang term-subjeknya melibatkan semua atau setiap atau seluruhnya disebut *proposisi universal*, sedangkan proposisi

yang term-subjeknya melibatkan sebagian atau beberapa atau sekedar ada walau sedikit atau sekalipun banyak disebut *proposisi partikuler*.

Semua proposisi baik universal atau partikuler tentu akan dapat diklasifikasi menjadi proposisi afirmatif atau negatif. Berdasarkan ciri ganda ini ada empat macam proposisi yang sejak abad pertengahan dikenal dengan nama proposisi A, E, I, dan O sebagai berikut:

Proposisi A: semua S adalah P: Proposisi afirmatif universal

Teladan 1.4:

Setiap yang bernyawa adalah makhluk hidup

Setiap bilangan genap habis dibagi 2

Setiap jumlah 2 sudut berpelurus adalah 180 derajat

Proposisi E: semua S bukan P: Proposisi negatif universal

Teladan 1.5.

Setiap yang bernyawa bukan makhluk hidup

Setiap bilangan genap tidak habis dibagi 2

Setiap jumlah 2 sudut berpelurus lebih dari 180 derajat

Proposisi I: sebagian S adalah P: Proposisi afirmatif partikuler

Teladan 1.6.

Sebagian yang bernyawa adalah makhluk hidup

Sebagian bilangan genap habis dibagi 2

Terdapat jumlah 2 sudut berpelurus sama dengan 180 derajat

Proposisi O: sebagian S bukan P: Proposisi negatif partikuler

Teladan 1.7.

Sebagian yang bernyawa bukan makhluk hidup

Sebagian bilangan genap tidak habis dibagi 2

Terdapat jumlah 2 sudut berpelurus tidak sama dengan 180 derajat

C. Lambang Boole dan Diagram Venn

George Boole, seorang ahli matematika Inggris (1815-1864) menganggap logika Aristoteles sebagai aljabar. Dalam sistemnya setiap kelas dinotasikan dengan huruf, misalnya P melambangkan kelas yang berfungsi sebagai predikat dalam proposisi, sedangkan non-P dinotasikan dengan \bar{P} . Konsep sentral dari sistem Boole ini adalah “kelas kosong” artinya suatu kelas yang tidak mempunyai anggota. Kelas kosong dilambangkan dengan \emptyset .

Proposisi A, E, I, dan O dalam sistem Boole dilambangkan berikut ini:

Proposisi A: semua S adalah P: ini semakna dengan Proposisi

S yang bukan P adalah Kelas kosong: lambangnya $S\bar{P} = \emptyset$.

Teladan 1.8.

Setiap makhluk yang bernyawa adalah hidup

Semakna dengan Makhluk yang bernyawa tetapi tidak hidup adalah mustahil atau salah

Setiap bilangan genap habis dibagi 2

Semakna dengan bilangan genap yang tidak habis dibagi 2 adalah salah

Proposisi E: semua S bukan P: ini semakna dengan Proposisi S yang P adalah kelas kosong: lambangnya $SP = \emptyset$.

Teladan 1.9.

Setiap bilangan ganjil tidak habis dibagi 2

Semakna dengan bilangan ganjil yang habis dibagi 2 adalah salah

Proposisi I: sebagian S adalah P: ini semakna dengan Proposisi S yang P adalah tidak kelas kosong: lambangnya $SP \neq \emptyset$.

Teladan 1.10.

Sebagian bilangan prima adalah bilangan genap

Semakna dengan terdapat bilangan prima genap

Proposisi O: sebagian S bukan P: ini semakna dengan Proposisi

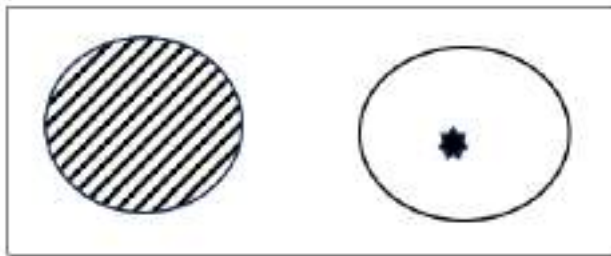
S yang bukan P adalah bukan kelas kosong; lambangnya $\overline{SP} \neq \emptyset$.

Teladan 1.11.

Sebagian bilangan prima bukan bilangan genap

Semakna dengan terdapat bilangan prima yang ganjil

Sedangkan seorang ahli matematika lainnya adalah John Venn (1834-1923) menggunakan diagram untuk mengungkapkan lambang-lambang dalam sistem Boole. Kelas dilambangkan dalam bentuk lingkaran dengan tanda huruf untuk menyatakan kelas apakah yang dimaksud. Jika kelas itu kosong, lingkaran tersebut diarsir, dan jika kelas mempunyai anggota di dalam lingkaran diberi tanda bintang (*) sebagaimana gambar berikut:



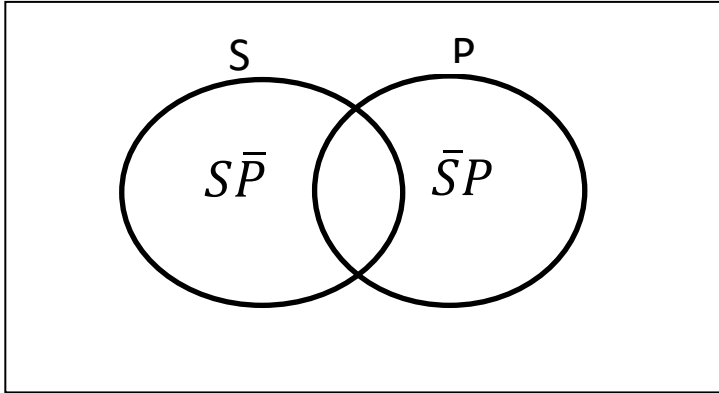
$$S = \emptyset$$

Kelas S adalah kosong

$$S \neq \emptyset$$

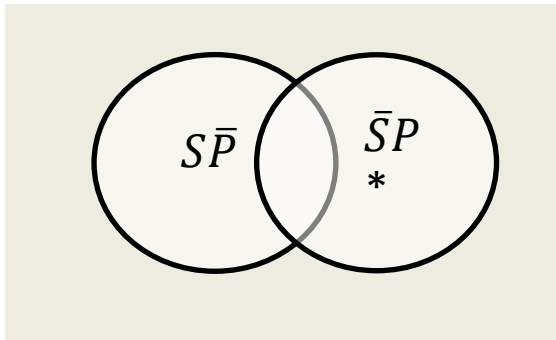
Kelas S tidak kosong

Dalam proposisi kategorik, keterhubungan S dan P digambarkan dalam dua lingkaran yang berpotongan satu dengan yang lain, sehingga terdapat tiga daerah yaitu (1) daerah, (2) daerah SP, dan (3) daerah $\bar{S}P$, sebagaimana gambar berikut:

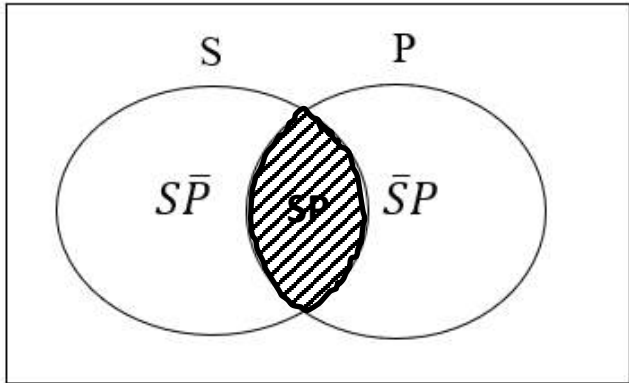


Dengan dasar diagram diatas, semua jenis proposisi A, E, I, dan O dapat diilustrasikan sebagai berikut:

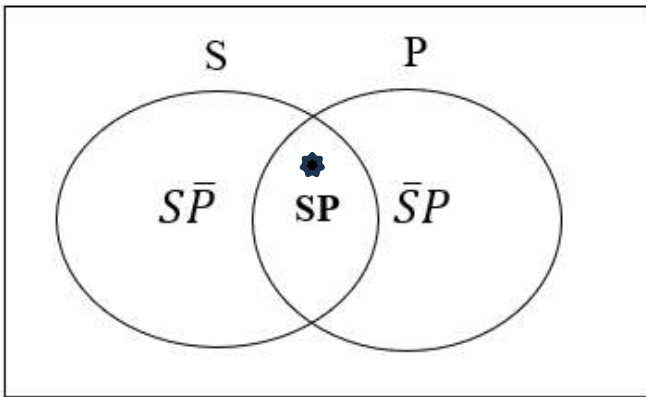
Proposisi A: semua S adalah P: ini semakna dengan Proposisi S yang bukan P adalah Kelas kosong: lambangnya $S\bar{P} = \emptyset$.



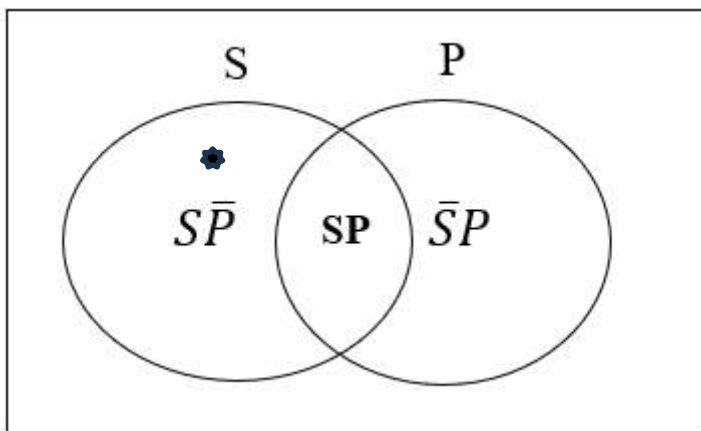
Proposisi E: semua S bukan P: ini semakna dengan Proposisi S yang P adalah kelas kosong: lambangnya $SP = \emptyset$.



Proposisi I: sebagian S adalah P: ini semakna dengan Proposisi S yang P adalah tidak kelas kosong: lambangnya $SP \neq \emptyset$.



Proposisi O: sebagian S bukan P: ini semakna dengan Proposisi S yang bukan P adalah bukan kelas kosong: lambangnya $S\bar{P} \neq \emptyset$.



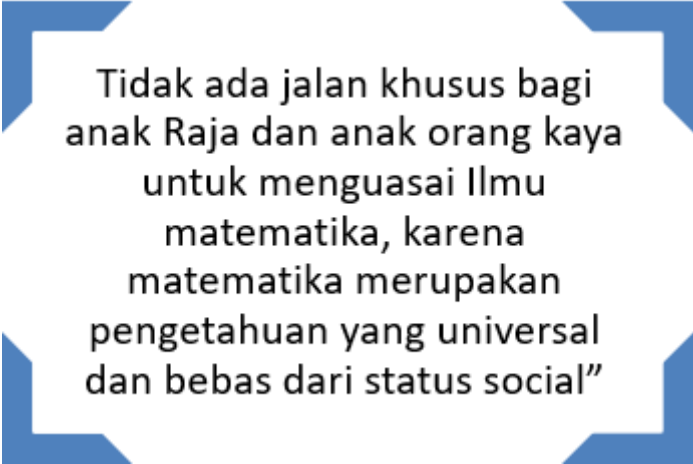
D. Soal-Soal Latihan

1. Ubahlah proposisi-proposisi dibawah ini ke dalam bentuk standar
 - (a) Penduduk yang merasa kurang memperoleh layanan prima, oleh perangkat desa diminta melapor.
 - (b) Hasilnya, lima mobil yang ada diduga keras merupakan hasil kejahatan.
 - (c) Berdasarkan kenyataan itulah sehingga pimpinan harus bersikap.
 - (d) Siapa lagi kalau bukan mereka yang biasa membuat keributan di kota ini.

2. Tulislah proposisi-proposisi di bawah ini menggunakan lambang Boole.
 - (a) Para pencuri itu tidak segan-segan beraksi di siang hari bolong.
 - (b) Tidak semua penjahat dapat di bekuk batang lehernya.
 - (c) Beberapa jenis anjing itu sangat galak.
 - (d) Semua binatang hanya dapat hidup dilingkungan tertentu.

3. Nyatakan proposisi-proposisi di bawah ini ke dalam diagram Venn!
 - (a) Logika tradisional adalah logika ciptaan Aristoteles
 - (b) Istilah logika tidak berasal dari Aristoteles

- (c) Tujuan logika adalah meningkatkan kemampuan berpikir tepat
- (d) Secara operasional, menganalisa bahasa



Tidak ada jalan khusus bagi anak Raja dan anak orang kaya untuk menguasai Ilmu matematika, karena matematika merupakan pengetahuan yang universal dan bebas dari status social”

BAB II

LOGIKA PROPOSISIONAL

A. Pendahuluan

Dalam kehidupan nyata sering dihadapkan pada suatu masalah yang menuntut kita untuk menentukan sikap atau mengambil suatu Keputusan untuk mencari solusi terbaik. Pengambilan keputusan yang didasarkan alasan atau fakta-fakta yang ada adalah suatu hal yang lazim dilakukan oleh kebanyakan orang. Suatu kesimpulan adalah benar apabila merupakan akibat dari fakta-fakta yang diajukan.

Argumentasi adalah kumpulan sebuah kesimpulan berserta fakta-faktanya. Apabila semua fakta-fakta yang diajukan berikut kesimpulan adalah benar dan terdapat hubungan logis diantara keduanya, maka argumentasi tersebut adalah benar atau valid. Akan tetapi terkadang meskipun fakta-fakta yang diajukan benar, bisa saja kesimpulan atau keputusan yang diambil menjadi salah akibat dari cara berpikir yang tidak logis. Hal inilah yang menyebabkan suatu argumentasi menjadi tidak valid. Karena berargumentasi adalah suatu hal yang sering dilakukan dalam kehidupan sehari-hari, maka kita dituntut untuk mampu mengidentifikasi validitas suatu argumentasi.

Logika proposisional merupakan alat bantu untuk mempergunakan dalam berargumentasi, verifikasi kesimpulan, maupun sebagai objek pembelajaran.

Kalau dicermati isi percakapan yang biasa kita lakukan, banyak kalimat atau pernyataan yang bisa kita tentukan benar atau salahnya. Dan biasanya diakhir percakapan diambil kesimpulan dari isi percakapan. Misalnya pada percakapan pendek :

Kemarin Ahmad pergi ke dokter karena sakit. Ahmad diperbolehkan tidak ikut les apabila sedang sakit. Oleh karenanya Ahmad tidak ikut les hari ini.

Apabila memperhatikan percakapan di atas, secara intuitif akan merasakan kebenaran dari kesimpulan : '*Ahmad tidak ikut les hari ini*'. Tetapi, valid-kah kesimpulan ini bila dibuktikan secara logika matematika?

Sebelum membahas bagaimana membuktikan kebenaran secara logika, mari lah kita mulai dengan dasar-dasar logika.

Definisi 2.1

Proposisi (*proposition*) adalah kalimat deklaratif (atau pernyataan) yang memiliki hanya satu nilai kebenaran; yakni benar saja atau salah saja, akan tetapi tidak keduanya (benar sekaligus salah).

Pada umumnya bentuk proposisi adalah kalimat berita yang bisa ditentukan kebenarannya.

Teladan 2.1

Berikut adalah contoh pernyataan yang merupakan proposisi.

1. Muhamad Hatta adalah presiden pertama Indonesia.
2. $2 + 2 = 4$.
3. $2 + 3 = 7$
4. Jika suatu himpunan mempunyai n buah elemen berbeda, maka himpunan tersebut memiliki 2^n buah subset.

Kalimat ke-2 dan 4 adalah proposisi yang bernilai benar, sedangkan kalimat ke-1 dan 3 adalah proposisi bernilai salah. Proposisi ke-4 merupakan hasil kombinasi dari 2 proposisi yang berbeda, yaitu: suatu himpunan mempunyai n buah elemen berbeda dan himpunan tersebut memiliki 2^n buah himpunan bagian.

Teladan 2.2

Berikut adalah contoh pernyataan yang bukan merupakan proposisi.

1. Mengapa komputer berguna?
2. Ketuk pintu sebelum masuk!
3. $x - y = y - x$

Kalimat ke-1 adalah kalimat tanya dan kalimat ke-2 adalah kalimat perintah, dimana keduanya tidak memiliki nilai kebenaran, oleh karena itu keduanya bukan proposisi.

Sedangkan pernyataan $x - y = y - x$ bisa benar sekaligus salah selama nilai dari x, y belum ditetapkan (ketika $x = y$ pernyataan menjadi benar, selain dari itu pernyataan menjadi salah), oleh karena itu pernyataan ke-3 pun bukan proposisi.

Proposisi dapat pula dituliskan secara simbolik untuk memudahkan proses manipulasi atau kalkulasi. Pada penulisan simbolik dari proposisi kita gunakan huruf kecil seperti p, q, r , dst. Proposisi yang bukan hasil kombinasi dari proposisi-proposisi disebut **atom**.

Pada saat kita memanipulasi atau mengkombinasikan atom, digunakan operator logika atau operator sambung (*connective operator*) yang dilambangkan dengan simbol-simbol sebagai berikut:

Definisi 2.2

- \sim : negasi; tidak; atau bukan
- \wedge : konjungsi; dan
- \vee : disjungsi; atau
- \oplus : *exclusive or*; or eksklusif
- \rightarrow : implies; implikasi kondisional; maka;
(*conditional implication*)
- \leftrightarrow : bikondisional; *if and only if* (iff); jika dan hanya jika.

Hasil kombinasi atom-atom yang terhubung oleh operator logika akan membentuk formula yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3

1. Atom adalah formula.
2. Jika p adalah formula, maka p adalah formula.
3. Jika p dan q adalah formula, maka $p \wedge q$; $p \vee q$; $p \rightarrow q$; dan $p \leftrightarrow q$ adalah formula.

Seluruh formula dibentuk dengan menerapkan aturan 1 ~ 3.

Dalam referensi lain, formula disebut juga sebagai proposisi majemuk (compound proposition).

Ada 4 macam formula operasi yang akan kita pelajari, yaitu (1) Operasi Konjungsi, (2) Operasi Disjungsi, (3) Operasi Implikasi, dan (4) Operasi Biimplikasi.

Definisi 2.4

Konjungsi antara pernyataan p dan q dinyatakan dengan " $p \wedge q$ ". Pernyataan " $p \wedge q$ " merupakan pernyataan yang benar jika p dan q kedua-duanya benar, dan dalam keadaan yang lain adalah salah.

Definisi 2.5

Disjungsi antara pernyataan p dan q dinyatakan dengan " $p \vee q$ ". Pernyataan " $p \vee q$ " merupakan pernyataan yang salah

jika p dan q kedua-duanya salah, dan dalam keadaan yang lain adalah benar.

Definisi 2.6

Implikasi antara pernyataan p dan q dinyatakan dengan " $p \rightarrow q$ ". Pernyataan " $p \rightarrow q$ " merupakan pernyataan yang salah jika p benar dan q salah, dan dalam keadaan yang lain adalah benar.

Definisi 2.7

Biimplikasi antara pernyataan p dan q dinyatakan dengan " $p \leftrightarrow q$ ".

Pernyataan " $p \leftrightarrow q$ " merupakan pernyataan yang Benar jika kebenaran p dan q sama, dan dalam keadaan yang lain adalah salah.

Definisi 2.8

Eksklusif or antara pernyataan p dan q dinyatakan dengan " $p \oplus q$ ".

Pernyataan " $p \oplus q$ " merupakan pernyataan yang Salah jika kebenaran p dan q sama, dan dalam keadaan yang lain adalah Benar.

Teladan 2.3

- 4 adalah bilangan positif dan 3 adalah bilangan negatif.

Kalimat ini dapat dinotasikan dengan formula $p \wedge q$ di mana pernyataan p adalah 4 adalah bilangan positif dan pernyataan q adalah 3 adalah bilangan negatif.

- Jika bumi adalah datar, maka $2 + 2 = 4$.

Kalimat ini dinotasikan dengan formula r, s, Dimana pernyataan r adalah bumi adalah datar, dan pernyataan s adalah $2 + 2 = 4$.

Pada teladan di atas, ada pernyataan yang mungkin terdengar janggal apabila dibaca, seperti 'jika bumi adalah datar, maka $2 + 2 = 4$ '. Kejanggalan ini terjadi disebabkan menyalahi kaidah semantik bahasa (baca: Bahasa Indonesia) sehari-hari. Meskipun demikian, pernyataan tersebut tetap memenuhi syarat pembentukan proposisi.

Meskipun proposisi sering kita gunakan dalam keseharian, masih sering terjadi kerancuan dalam mengartikannya. Sebagai contoh, kata 'atau' yang digunakan dalam percakapan bisa bermakna ganda pada proposisi. Karena kata 'atau' bisa berarti (salah satu dari) 'or eksklusif' atau 'or inklusif'. Untuk mengartikannya secara tepat, biasanya kita harus memperhatikan konteks atau keterkaitan isi pembicaraan.

Teladan 2.4

Setelah lulus SMU Alfian akan melanjutkan sekolah ke Politeknik Negeri Bandung atau Kumamoto National College of Technology Japan.'

Penggunaan 'atau' disini merujuk pada 'or eksklusif', karena tidak mungkin Alfian kuliah di dua kampus sekaligus, dimana lokasi keduanya secara fisik terpisah jauh.

Teladan 2.5

Pada istirahat siang, peserta seminar dipersilakan makan atau minum'. Penggunaan kata 'atau' di sini merujuk pada 'or inklusif', karena peserta seminar dibolehkan makan saja, minum saja, atau makan dan minum.

Begitu pula dengan kata 'dan' yang terkadang mengandung arti 'kemudian; lalu'.

Teladan 2.6

'Budi memasukan buku pelajaran ke dalam tas dan berangkat ke sekolah'.

Penggunaan kata 'dan' di sini mengandung arti 'kemudian' sehingga tidak bisa kita tukar posisi proposisi satu dengan lainnya, seperti menjadi 'Budi berangkat sekolah dan memasukan buku pelajaran ke dalam tas' yang artinya menjadi lain sama sekali dengan kalimat asal. Sedangkan pada logika proposisional, kita tidak mempermasalahkan pertukaran tempat formula ketika menggunakan operator logika \wedge , sebagai contoh $p \wedge q = q \wedge p$.

Pada pembahasan di bab ini, topik pembicaraan cenderung dititik beratkan pada logika yang berkaitan dengan matematika atau ilmu komputer. Akan tetapi penulis tidak menafikan bahwa logika tersebut bisa pula ditetapkan pada kehidupan sehari-hari.

B. Kalkulus Proposisi

Ketika menentukan nilai kebenaran suatu proposisi yang dinotasikan dalam bentuk formula, kita melibatkan kalkulasi. Oleh karenanya proses penentuan nilai kebenaran formula disebut juga sebagai kalkulus proposisi.

Untuk merepresentasikan nilai kebenaran pada buku ini digunakan peranan penulisan berikut :

- Benar atau True dinotasikan dengan 1
- Salah atau False dinotasikan dengan 0

Tujuan penulisan seperti ini untuk disepakati dan bertujuan agar ada keseragaman dan memudahkan dalam pemebahasann bab-bab berikutnya. Sebelum membahas hal-hal yang rumit, marilah kita kita ulang kembali mengenai nilai kebenaran dari suatu atom.

Formula-p harus bernilai salah apabila p bernilai benar atau sebaliknya, atau apabila dituliskan dalam bentuk tabel maka:

Tabel 2.1: Tabel kebenaran Negasi suatu proposisi

p	$\sim p$
1	0
0	1

Adapun nilai kebenaran untuk masing-masing formula; $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, dan $p \oplus q$ jika dituliskan dalam bentuk tabel adalah sebagai berikut:

Tabel 2.2: Tabel Nilai Kebenaran Proposisi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Bedasarkan tabel di atas, maka dapat diperoleh kalimat untuk memudahkan pemahaman makna konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi serta disjungsi eksklusif atau plus cronecker.

Sebagai contoh, bila ada partai politik berjanji dalam kampanye 'Apabila partai kami menjadi pemenang pemilu, maka tarif pajak akan kami turunkan'. Meskipun pada kenyataan dikemudian hari pajak naik atau turun, apabila ternyata partai politik tersebut kalah, sudah barang tentu penulis yakin, tidak ada seorang pun yang akan menuduh partai tersebut sebagai partai politik pembohong. Contoh lain dari implikasi adalah sebagai berikut.

Teladan 2.7

Jika kucing bermain di dalam rumah, maka rumah tidak tenang. Apabila diketahui kucing tidak bermain di dalam rumah, apakah dapat disimpulkan 'rumah akan tenang.'

Solusi:

Apabila pernyataan 'kucing bermain di dalam rumah' dilambangkan dengan p , dan 'rumah tidak tenang' dengan q , maka 'kucing tidak bermain di dalam rumah' dapat dilambangkan dengan formula $\sim p$ dan 'jika kucing bermain di dalam rumah, maka rumah tidak tenang' dilambangkan dengan $p \rightarrow q$.

Apabila kita menganggap kesimpulan 'rumah akan tenang' atau $\sim q$ adalah benar. Dengan kata lain pernyataan $\sim p \rightarrow \sim q$ adalah benar, maka akan menyalahi logika yang ada.

Karena dalam kehidupan sehari-hari, meskipun kucing tidak bermain di dalam rumah pun, masih memungkinkan rumah tidak tenang (bisa disebabkan adanya pesta, atau keributan lain di luar rumah). Atau sebagai ilustrasi lain mengenai logika implikasi adalah sebagai berikut: 'Jika Bagus tidak ikut lomba, maka dia pasti tidak mendapatkan hadiah.' Apabila kita berkesimpulan $\sim p \rightarrow \sim q$ adalah benar, maka pernyataan 'Jika Bagus mengikuti lomba, maka dia pasti memenangkan hadiah' haruslah benar juga. Pada kenyataannya, meskipun Bagus mengikuti lomba, namun Bagus belum tentu akan memenangkan hadiah tersebut.

Proposisi, Kontraposisi, Inversi, Konversi

Berkaitan dengan formula implikasi, terdapat beberapa varian dari formula implikasi $p \rightarrow q$. Formula $\sim q \rightarrow \sim p$ disebut **kontraposisi** dari formula $p \rightarrow q$, dimana kedua formula ini adalah ekuivalen secara logika (lihat definisi 3.7).

Sedangkan formula $q \rightarrow p$ adalah kebalikan (**converse**) dari formula $p \rightarrow q$, dan formula $\sim p \rightarrow \sim q$ adalah **inverse** dari formula $p \rightarrow q$.

Teladan 2.8

Diketahui sebuah pernyataan '*Jika Fulan tidak belajar maka ia tidak akan lulus ujian*'. Buatlah kontraposisi, converse, dan inverse kalimat tersebut.

Solusi:

Kontraposisi : 'Jika Fulan lulus ujian, maka ia belajar'.

Converse : 'Jika Fulan tidak lulus ujian, maka ia tidak belajar'.

Inverse : 'Jika Fulan belajar, maka ia akan lulus ujian'.

Pada formula $p \rightarrow q$, maka p disebut syarat cukup (sufficient Condition) untuk q , dan q disebut syarat perlu (necessary condition) untuk p . Bila dikatakan p adalah syarat cukup juga syarat perlu untuk q , dapat dinyatakan dengan $p \leftrightarrow q$.

Teladan 2.9

Seseorang yang mempunyai cucu pasti mempunyai anak akan tetapi mempunyai anak belum tentu punya cucu.

Berarti punya cucu' \rightarrow 'punya anak' adalah benar, tetapi 'punya anak' \rightarrow 'punya cucu' adalah salah, karena belum tentu benar.

Pada kasus ini, 'punya cucu' adalah syarat cukup untuk 'punya anak'.

Teladan 2.10 Buktikan bahwa himpunan kosong merupakan subset dari sebarang himpunan.

Bukti:

Pada pembuktian ini kita gunakan definisi tentang himpunan bagian dan implikasi (mengenai implikasi akan dibahas pada bab logika proposisional)

Apabila terdapat dua himpunan sebarang A dan B dimana $A \subseteq B$, jika $x \in A$, maka $x \in B$.

Kita analogkan bahwa \emptyset adalah A . karena \emptyset tidak memiliki elemen, maka kita tahu $x \in \emptyset$ adalah **salah**. Sedangkan $x \in B$ adalah pernyataan yang memiliki nilai salah atau benar.

Oleh karenanya, pernyataan $x \in \emptyset$ (salah) maka $x \in B$ (benar atau salah) maka kesimpulannya adalah **benar secara logika**.

Terbukti bahwa \emptyset adalah subset dari sebarang himpunan.

Teladan 2.11

Tunjukkan nilai kebenaran dari formula $(p \wedge q) \rightarrow (r \leftrightarrow (\sim s))$.

Solusi:

p	q	r	s	$\sim s$	$p \wedge q$	$r \leftrightarrow (\sim s)$	$(p \wedge q) \rightarrow (r \leftrightarrow (\sim s))$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0	0

Berdasarkan hasil kalkulasi, formula $(p \wedge q) \rightarrow (r \leftrightarrow (\sim s))$ selalu bernilai 1, kecuali ketika nilai kebenaran p, q, r, dan s masing-masing adalah 1, 1, 0, 0 dan 1, 1, 1, 1. Dengan kata lain, formula $(p \wedge q) \rightarrow (r \leftrightarrow (\sim s))$ diinterpretasikan salah ketika nilai p, q, r, dan s masing-masing adalah 1, 1, 0, 0 dan 1,1,1,1. Selain dari itu formula diinterpretasikan benar. Tabel di atas yang menuliskan nilai-nilai kebenaran dari formula pada berbagai kasus nilai p, q, r, dan s disebut sebagai tabel kebenaran (*truth table*).

Untuk Menyusun banyaknya baris suatu tabel kebenaran, ditentukan oleh banyaknya varian proposisi. Jika banyaknya proposisi n maka dapat ditentukan dengan rumus 2^n , sebagai contoh tabel Solusi teladan di atas, karena banyaknya proposisi 4, maka dapat dibuat banyaknya baris $2^4 = 16$. Dengan susunan nilai benar-salah pada kolom pertama $2^3 = 8$, artinya 8 baris bernilai benar, dan 8 baris berikutnya bernilai salah (1 1 1 1 1 1 1 1 – 0 0 0 0 0 0 0 0). Selanjutnya susunan nilai benar-salah pada kolom kedua $2^2 = 4$, artinya 4 baris pertama bernilai benar, dan 4 baris berikutnya bernilai salah, begitu selanjutnya 4 baris bernilai benar dan 4 baris bernilai salah (1 1 1 1 – 0 0 0 0 – 1 1 1 1 – 0 0 0 0).

Selanjutnya susunan nilai benar-salah pada kolom ketiga $2^1 = 2$, artinya 2 baris pertama bernilai benar, dan 2 baris berikutnya bernilai salah, begitu selanjutnya 2 baris bernilai benar dan 2 baris bernilai salah dan seterusnya hingga terisi lengkap (1 1 – 0 0 – 1 1 – 0 0 – 1 1 – 0 0 – 1 1 – 0 0)

Selanjutnya susunan nilai benar-salah pada kolom keempat $2^0 = 1$, artinya 1 baris pertama bernilai benar, dan 1 baris berikutnya bernilai salah, begitu seterusnya hingga terisi lengkap (1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0)

Definisi 2.9

Diketahui suatu formula F yang dibentuk dari atom-atom $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Interpretasi dari F dapat diketahui dengan cara mensubstitusikan nilai kebenaran 0 atau 1 pada masing-masing a_i , dimana $1 \leq i \leq n$.

Definisi 2.10

Formula F dikatakan benar pada suatu interpretasi jika dan hanya jika hasil evaluasi F adalah 1 pada interpretasi tersebut. Selain dari itu, F disebut salah pada interpretasi tersebut.

Teladan 2.12

Formula $(p \wedge q) \rightarrow (r \leftrightarrow (\sim s))$ adalah bernilai benar pada interpretasi $p = 0, q = 0, r = 0, s = 0$, akan tetapi bernilai salah pada interpretasi $p=1, q=1, r =1, s=1$.

Definisi 2.11

Suatu formula disebut **tautologi** (tautology) apabila interpretasi dari formula tersebut selalu benar, apapun nilai atomnya. Sedangkan formula dikatakan **kontradiksi** (contradiction) apabila interpretasinya selalu salah.

Teladan 2.13

Gunakan tabel kebenaran untuk memperlihatkan bahwa interpretasi formula $p \rightarrow (p \vee q)$ adalah tautologi.

Solusi:

Perhatikan table berikut.

p	Q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Dari tabel di atas diperoleh bahwa interpretasi dari implikasi kondisional di sini adalah tautologi.

Implikasi kondisional (\rightarrow) apabila interpretasinya adalah tautologi dapat dinotasikan dengan ' \Rightarrow ' dan bikondisional yang interpretasinya tautologi dinotasikan dengan ' \Leftrightarrow '. Pada tabel 2.2 dan tabel 2.1 tertulis formula implikasi kondisional dan formula bikondisional yang merupakan **tautologi**.

Teladan 2.14

Gunakan tabel kebenaran untuk memperlihatkan bahwa formula $p \wedge (q \wedge \sim p)$ adalah kontradiksi.

Solusi:

Perhatikan table berikut.

p	q	$\sim p$	$p \wedge (q \wedge \sim p)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Definisi 2.12

Dua formula p dan q adalah ekuivalen secara logika (*logically equivalent*) apabila keduanya memiliki nilai kebenaran

yang sama. Atau dengan ungkapan lain dua formula p dan q adalah ekuivalen jika dan hanya jika $p \Leftrightarrow q$.

Teladan 2.15

Gunakan tabel kebenaran untuk membuktikan bahwa $p \rightarrow q$ dan $\neg p \vee q$ adalah ekuivalen secara logika.

Solusi:

Perhatikan table berikut.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

kolom 3 dan kolom 5 yang masing-masing merupakan interpretasi dari formula $p \rightarrow q$ dan $\neg p \vee q$ adalah sama, oleh karenanya kedua formula tersebut adalah ekuivalen.

Teladan 2.16

Gunakan tabel kebenaran untuk membuktikan bahwa;

$p \Leftrightarrow q$ dan $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$ adalah ekuivalen secara logika.

Solusi:

Perhatikan table berikut.

p	q		$p \leftrightarrow q$	$\sim p \vee q$	$p \vee \sim q$	$(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
0	0		1	1	1	1
0	1		0	1	0	0
1	0		0	0	1	0
1	1		1	1	1	1

Karena interpretasi $p \leftrightarrow q$ dan $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$ adalah sama, maka kedua formula tersebut ekuivalen.

Berikut disajikan tabel **ekivalensi logis** dan **implikasi logis** yang dapat digunakan sebagai acuan untuk memudahkan kita dalam melakukan pembuktian secara deduktif dalam logika matematika, dinyatakan pada tabel berikut.

Tabel 2.3 Ekivalensi Logis

Hukum Ekivalensi Logis	
$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$	Negasi ganda
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$	Hukum komutatif
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	Hukum asosiatif
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Hukum Distributif

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	Hukum Idempoten
$p \vee 0 \Leftrightarrow p$ $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$ $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	Hukum Identitas
$p \vee \sim p \Leftrightarrow 1$	Tautologi
$p \wedge \sim p \Leftrightarrow 0$	Kontradiksi
$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$	Hukum de Morgan
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$	Hukum Kontraposisi
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$	Hukum Implikasi
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$ $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Hukum Ekuivalensi
$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	Hukum Eksportasi
$p \rightarrow q \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \rightarrow p)$	Reduksio ad Ubsurdum

Tabel 2.4 Implikasi Logis

Hukum Implikasi Logis	
$p \Rightarrow p \vee q$	Addisi
$p \wedge q \Rightarrow p$ $p \wedge q \Rightarrow q$	Simplifikasi
$(p \rightarrow 0) \Rightarrow \sim p$	Absurditas
$p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow p$	Modus Ponens
$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow p$	Modus Tollens
$(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$ $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$	Silogisme disjungtif
$p \Rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$	Silogisme konjungtif
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$ $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \Rightarrow p \leftrightarrow r$	Hukum Transitif
$(p \rightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee r))$ $(p \rightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r))$ $(p \rightarrow q) \Rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r))$	Hukum Implikasi
$((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \Rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee s))$ $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s))$	Dilema Konstruktif
$((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \Rightarrow ((\sim q \vee \sim s) \rightarrow (\sim p \vee \sim r))$ $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \Rightarrow ((\sim q \wedge \sim s) \rightarrow (\sim p \wedge \sim r))$	Dilema Distruktif

C. Validitas dan Inkonsistensi pada Logika Proposisional

Komposisi atau kombinasi beberapa kalimat deklaratif yang valid akan menghasilkan formula yang valid juga. Yang menjadi pertanyaan adalah bilakah suatu formula disebut valid pada logika proposisional? Berikut adalah definisinya.

Definisi 2.13

Suatu formula disebut valid jika dan hanya jika formula tersebut **tautologi**. Dan formula disebut **invalid** jika dan hanya jika **tidak valid**.

Definisi 2.14

Suatu formula disebut **inkonsisten** jika dan hanya jika formula tersebut **kontradiksi**. Dan formula disebut **konsisten** jika dan hanya jika tidak **inkonsisten**.

Pernyataan-pernyataan berikut adalah implikasi dari definisi di atas.

1. Formula adalah valid jika dan hanya jika negasinya inkonsisten.
2. Formula adalah inkonsisten jika dan hanya jika negasinya valid.
3. Formula adalah invalid jika dan hanya jika ada interpretasi yang bernilai salah.
4. Formula adalah konsisten jika dan hanya jika ada interpretasi yang bernilai benar.

5. Jika formula adalah valid, maka formula tersebut konsisten, tetapi tidak sebaliknya.
6. Jika formula adalah inkonsisten, maka formula tersebut invalid, tetapi tidak untuk sebaliknya.

Teladan 2.17

Dengan menggunakan tabel kebenaran, pembaca dapat menyimpulkan bahwa:

- Formula $p \wedge \sim p$ adalah inkonsisten, yang juga invalid.
- Formula $p \vee \sim p$ adalah valid, yang juga konsisten.
- Formula $p \rightarrow \sim p$ adalah invalid, yang juga konsisten.

D. Bentuk Normal Formula

Pada penjelasan sebelumnya, formula dibentuk dengan menggunakan kombinasi operator logika yakni (\sim ; \vee ; \wedge ; dan \rightarrow) dan akan tetapi, seperti pada teladan 3.14 dan 3.15, kita dapat membentuk formula yang ekuivalen dengan formula implikasi atau bikondisional hanya dengan menggunakan kombinasi (\sim ; \vee ; dan \wedge).

Formula yang hanya menggunakan kombinasi operator logika (\sim ; \vee ; dan \wedge) disebut formula bentuk normal, dan bentuk normal formula ada dua yaitu bentuk normal **konjungsi** dan bentuk normal **disjungsi**.

Definisi 2.15

Formula F dikatakan berbentuk **normal** konjungsi jika dan hanya jika F berbentuk $F: F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n$ dimana $n_1 \geq 1$ dan $n \in \mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat.

Teladan 2.18

Jika diketahui p, q, dan r adalah atom, maka formula $F: (p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee q)$

adalah berbentuk **normal konjungsi**.

Dan jika $F: F_1 \wedge F_2$ dimana $F_1 = (p \vee \sim q \vee r)$ dan $F_2 = (\sim p \vee q)$.

Definisi 2.16

Formula F dikatakan berbentuk normal disjungsi jika dan hanya jika F berbentuk $F: F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n$ dimana $n_1 \geq 1$ dan $n \in \mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat.

Teladan 2.19

Jika diketahui p, q, dan r adalah atom, maka formula $F: (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q)$ adalah berbentuk normal disjungsi.

Apabila $F: F_1 \vee F_2$ berarti $F_1: (p \wedge \sim q \wedge r)$ sedangkan $F_2 = (\sim p \wedge q)$.

Ketika kita merubah bentuk formula menjadi bentuk normal, tabel ekuivalensi logis (**tabel 2.3**) dapat kita gunakan sebagai referensi. Berikut prosedur transformasi formula ke dalam bentuk normal.

1. Gunakan

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$

$$F \rightarrow G \equiv \sim F \vee G.$$

untuk mengeliminasi operator logika \leftrightarrow dan \rightarrow

2. Gunakan secara berulang

$$\sim(\sim F) \equiv F$$

dan hukum DeMorgan

$$\sim(F \vee G) \equiv \sim F \wedge \sim G$$

$$\sim(F \wedge G) \equiv \sim F \vee \sim G$$

untuk memindahkan ' \sim ' ke tepat sebelum atom.

3. Secara berulang gunakan hukum distributive

$$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

$$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$$

dan hukum-hukum lainnya untuk mendapatkan bentuk normal.

Teladan 2.20

Ubahlah formula $(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S$ ke dalam bentuk normal konjungsi.

Solusi: perhatikan baik-baik langkahnya

$$(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge (\sim Q \vee R)) \rightarrow S$$

$$\Leftrightarrow \sim(P \wedge (\sim Q \vee R)) \vee S$$

$$\Leftrightarrow \sim P \vee \sim (\sim Q \vee R) \vee S$$

$$\Leftrightarrow (\sim P \vee (Q \wedge \sim R)) \vee S$$

$$\Leftrightarrow (\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee \sim R) \vee S$$

$$\Leftrightarrow (\sim P \vee Q \vee S) \wedge (\sim P \vee \sim R \vee S)$$

Bentuk normal konjungsi $(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S$ adalah $(\sim P \vee Q \vee S) \wedge (\sim P \vee \sim R \vee S)$.

Teladan 2.21

Ubahlah formula $(P \vee \sim Q) \rightarrow R$ ke dalam bentuk normal disjungsi.

Solusi:

$$(P \vee \sim Q) \rightarrow R \equiv \sim (P \vee \sim Q) \vee R$$

$$\equiv (\sim P \wedge Q) \vee R$$

$$\equiv (\sim P \wedge Q) \vee R$$

Bentuk normal disjungsi untuk $(P \vee \sim Q) \rightarrow R$ adalah $(\sim P \wedge Q) \vee R$.

E. Pembuktian Logika

Yang dimaksud pembuktian disini adalah proses menunjukkan benar atau salahnya suatu kesimpulan secara logika. Ketika membuktikan kesimpulan tersebut, maka fakta-fakta atau argumentasi-argumentasi (yang dinyatakan dalam bentuk proposisi) yang diasumsikan benar.

Fakta-fakta ini disebut sebagai premis (atau aksioma, atau postulat, atau hipotesa), dan kesimpulan yang ditetapkan dari premis-premis disebut juga sebagai konsekuensi logis.

Sebelum kita membicarakan lebih jauh mengenai pembuktian logika, mari kita perhatikan contoh-contoh pembuktian dalam matematika seperti berikut.

Teladan 2.22

Buktikan bahwa $n^2 - 2$ tidak habis dibagi oleh 5, dimana n adalah bilangan bulat positif.

Solusi:

Jika suatu bilangan n habis dibagi oleh 5, maka sisa dari pembagian tersebut adalah 0. Pada kasus ini $n = 5k$, dimana k adalah sembarang bilangan bulat positif.

Demikian pula bila hasil baginya bersisa 1 maka $n = 5k + 1$, bersisa 2 maka $n = 5k + 2$, bersisa 3 dan bersisa 4, berturut-turut $n = 5k + 3$ dan $n = 5k + 4$.

Bila kita analisis masing-masing kasus di atas, maka:

- $n = 5k \rightarrow (5k)^2 - 2 = 25k^2 - 2$, oleh karena $25k^2$ habis dibagi lima, tetapi 2 tidak habis dibagi 5 maka pada kasus ini $n^2 - 2$ tidak habis dibagi oleh 5.
- $n = 5k + 1 \rightarrow (5k + 1)^2 - 2 = 25k^2 + 10k - 1$, oleh karena $25k^2 + 10k$ habis dibagi lima, tetapi -1 tidak habis dibagi 5 maka pada kasus ini pun $n^2 - 2$ tidak habis dibagi oleh 5.

- $n = 5k + 2 \rightarrow (5k + 2)^2 - 2 = 25k^2 + 20k + 2$, pada kasus ini pun $n^2 - 2$ tidak habis dibagi oleh 5, karena 2 tidak habis dibagi oleh 5.
- $n = 5k + 3 \rightarrow (5k + 3)^2 - 2 = 25k^2 + 30k + 7$ pada kasus ini pun $n^2 - 2$ tidak habis dibagi oleh 5, karena 7 tidak habis dibagi oleh 5.
- $n = 5k + 4 \rightarrow (5k + 4)^2 - 2 = 25k^2 + 40k + 14$ pada kasus ini pun $n^2 - 2$ tidak habis dibagi oleh 5, karena 14 tidak habis dibagi oleh 5.

Karena pada ke-5 kasus di atas seluruhnya $n^2 - 2$ tidak habis dibagi oleh 5, maka disimpulkan bahwa $n^2 - 2$ tidak habis dibagi oleh 5. Dengan kata lain, ke-5 kasus di atas masing-masing merupakan premis, dan konsekuensi logis dari ke-5 premis di atas adalah $n^2 - 2$ tidak habis dibagi oleh 5.

Teladan 2.23

Bila $x \in \mathbb{R}$, maka didefinisikan nilai mutlak $|x| =$

$$\begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Buktikan bahwa $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Solusi:

Problem ini dapat dianalisis dengan 4 kasus: kasus 1. jika $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, kasus 2. jika $x \geq 0$ dan $y < 0$, kasus 3. jika $x < 0$ dan $y > 0$, dan kasus 4. jika $x < 0$ dan $y < 0$.

Untuk analisis masing-masing kasus sebagai berikut:

- Jika $x > 0$ dan $y > 0$, maka $x + y > 0$. Dimana $|x + y| = x + y = |x| + |y|$.
- Jika $x > 0$ dan $y < 0$, maka $x + y < x$ atau $x + y < |x| + |y|$.

Oleh karenanya $|x + y| < |x| + |y|$

- Jika $x < 0$ dan $y > 0$, hasil analisis sama dengan kasus diatas.
- Jika $x < 0$ dan $y < 0$, maka $x + y < 0$ dengan demikian $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = |x| + |y|$. Oleh karenanya $|x + y| = |x| + |y|$.

Berdasarkan hasil analisis ke-4 kasus di atas, diketahui semua kasus memenuhi pernyataan $|x + y| = |x| + |y|$ atau $|x + y| < |x| + |y|$.

Oleh karenanya pernyataan $|x + y| \leq |x| + |y|$ terbukti benar.

Bila diperhatikan cara pembuktian dari teladan di atas, hal pertama yang dilakukan adalah mencari kasus-kasus yang mungkin terjadi, kemudian secara parsial kita buktikan kebenaran kasus per kasus. Terakhir, berdasarkan hasil pembuktian kasus per kasus kita menarik Kesimpulan, dimana yang menjadi syaratnya adalah keseluruhan kasus adalah benar. Cara pembuktian seperti ini disebut juga sebagai pembuktian kasus per kasus (*proof by case*).

Pada contoh soal, baik pada teladan 2.22 maupun teladan 2.23, sebenarnya kasus-kasus yang kita periksa kebenarannya adalah suatu proposisi yang merupakan fakta, yang dimaksudkan fakta disini adalah proposisi yang bernilai benar.

Pada teladan 2.22 terdapat 5 fakta yaitu :

1. $25k^2 - 2$ tidak habis dibagi 5
2. $25k^2 + 10k - 1$ tidak habis dibagi 5
3. $25k^2 + 20k + 2$ tidak habis dibagi 5
4. $25k^2 + 30k + 7$ tidak habis dibagi 5
5. $25k^2 + 40k + 14$ tidak habis dibagi 5

Cara pembuktian yang sama juga digunakan pula pada pembuktian logika, yang diawali dengan proposisi-proposisi yang diasumsikan **benar** sebagai fakta. Pada kalkulus proposisi umumnya fakta disebut sebagai premis, aksioma, atau hipotesa, untuk selanjutnya kita gunakan istilah premis ketika merujuk pada fakta yang diasumsikan benar.

Penulisan premis dilambangkan dengan huruf P yang berindeks, seperti

P_1, P_2, \dots, P_n , Sedangkan kesimpulan (*conclusion*) dilambangkan dengan C.

Metode pembuktian yang kita gunakan dalam buku ini ada 2 yaitu:

1. **Pembuktian secara langsung** (*direct proof*). Formula yang digunakan dalam pembuktian adalah $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \dots \wedge P_n \Rightarrow C$

Formula di atas disebut juga sebagai argumen. Suatu argumen disebut valid jika dan hanya jika argumen tersebut adalah suatu implikasi logis yang merupakan tautologi.

2. **Pembuktian tak langsung** (*indirect proof*)

- Pembuktian dengan kontraposisif.

Argumen yang digunakan: $\sim C \Rightarrow \sim(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \dots \wedge P_n)$

- Pembuktian dengan kontradiksi.

Argumen yang digunakan: $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \dots \wedge P_n \wedge \sim C \Rightarrow 0$

Dari argumen-argumen di atas, terlihat bahwa pada metode manapun, jumlah premis yang digunakan dalam pengambilan kesimpulan adalah terbatas (*finite*). Pembuktian taladan 2.21 maupun 2.22 adalah pembuktian yang menggunakan metode pembuktian langsung.

Suatu cara pembuktian disebut konstruktif apabila ada langkah-langkah algoritma, ataupun prosedur yang tetap untuk mendeskripsikan cara pembuktian tersebut secara eksplisit. Sedangkan cara pembuktian disebut non-konstruktif jika cara pembuktian tidak ada arahan yang tetap menuju pembuatan kesimpulan, atau langkah-langkah pembuktian ditentukan secara intuitif. Untuk selanjutnya

pada buku ini penulis hanya membahas cara-cara pembuktian yang bersifat konstruktif.

Teknik pelaksanaan pembuktian yang dijelaskan pada buku ini ada 3 yaitu:

1. Tabel kebenaran
2. Penyederhanaan/ normalisasi
3. Aturan inferensi (*Rule of Inference*)

Selanjutnya akan dijelaskan detail cara-cara pembuktiannya. Akan tetapi apapun cara pembuktian yang digunakan, pada prinsipnya tetap mengacu pada metode pembuktian secara langsung atau pembuktian secara tidak langsung.

Tabel Kebenaran

Cara yang paling sederhana dalam membuktikan kebenaran suatu kesimpulan dari premis-premis yang dinotasikan sebagai formula adalah dengan mengguraikan tabel kebenaran. Dan seperti apa yang telah disinggung pada penjelasan sebelumnya, cara pembuktian tetap merujuk pada metode pembuktian secara langsung atau, secara tidak langsung.

Teknis pelaksanaan pembuktian disini cukup mudah, pertama tentukan formula dari premis-premis yang ada. Kemudian baru tentukan metode apa yang hendak digunakan, pembuktian secara langsung atau secara tak langsung. Terakhir baru kita buat tabel kebenaran

berdasarkan metode pembuktian yang kita gunakan. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh-contoh berikut.

Teladan 2.24

Periksalah kesimpulan dari premis-premis berikut dengan cara pembuktian langsung:

- Jika ada kucing di dalam rumah maka rumah tidak tenang.
- Kucing tidak ada di dalam rumah.

Kesimpulan : Rumah pasti tenang. (Betulkah ?)

Solusi:

Misalkan 'kucing ada di dalam rumah' adalah p , 'rumah tidak tenang' adalah q , maka proposisi 'jika ada kucing di dalam rumah maka rumah tidak tenang', 'kucing tidak ada di dalam rumah', dan 'rumah pasti tenang' masing-masing $p \rightarrow q$, $\neg p$, $\neg q$. Untuk pembuktian secara langsung dapat disusun formula $(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$ dengan tabel sebagai berikut:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg p$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1

Disini kita hanya perlu memperhatikan interpretasi yang menyebabkan premis $p \rightarrow q$ dan premis $\sim p$ menjadi benar. Premis $p \rightarrow q$ benar pada baris 1, 2, dan 4, sedangkan $\sim p$ benar pada baris 1 dan 2. Oleh karenanya interpretasi yang menyebabkan kedua premis $p \rightarrow q$ dan $\sim p$ menjadi **benar** adalah pada baris **kesatu** dan **kedua**. Akan tetapi ternyata interpretasi argumen atau formula $(p \rightarrow q) \wedge \sim p \rightarrow \sim q$ (pada baris kesatu dan kedua) **tidak seluruhnya benar**. Oleh karenanya formula $\neg q$ atau 'rumah pasti tenang' adalah kesimpulan yang **salah**.

Cara lain adalah kita periksa formula $(p \rightarrow q) \wedge \sim p \rightarrow \sim q$ apakah merupakan argumen yang valid atau tidak. Telah dijelaskan sebelumnya bahwa argumen adalah valid jika hanya jika merupakan tautologi. Berdasarkan hasil perhitungan pada tabel, argumen $((p \rightarrow q) \wedge \sim p) \rightarrow \sim q$ bukanlah **tautologi**, oleh karenanya kesimpulan 'rumah pasti tenang' adalah salah.

Teladan 2.25

Buktikan teladan 2.24 dengan cara pembuktian kontradiksi.

Solusi:

Karena kesimpulan adalah $\sim q$, maka pada perhitungan disini kita gunakan $\sim(\sim q) = q$. Oleh karena itu, kita hitung formula $((p \rightarrow q) \wedge \sim p) \rightarrow \sim q$ apakah hasilnya kontradiksi atau tidak.

Adapun tabel kebenaran untuk pembuktian masalah ini adalah sebagai berikut:

Dengan menggunakan pembuktian kontradiksi, maka argumen $((p \rightarrow q) \wedge \sim p) \wedge q$ diharapkan adalah inkonsisten. Akan tetapi, oleh karena interpretasi formula $((p \rightarrow q) \wedge \sim p) \wedge q$ tidak salah seluruhnya atau bukan kontradiksi maka kesimpulan yang dibuat disini adalah **salah**.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$((p \rightarrow q) \wedge \sim p)$	$((p \rightarrow q) \wedge \sim p) \wedge q$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0

Teladan 2.26

Buktikan bahwa formula $p \vee r$ adalah konklusi dari premis $p \vee q$ dan $\sim p \vee r$!

Solusi:

Untuk membuktikan, cukup kita periksa formula $p \vee q \wedge \sim p \vee r \rightarrow p \vee r$ apakah merupakan formula yang valid atau tidak, dapat anda perhatikan tabel berikut:

p	q	r	$p \vee q$	$\sim p \vee r$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \rightarrow (p \vee r)$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Terlihat dari tabel bahwa formula $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \rightarrow (p \vee r)$ adalah **tautologi**, berarti formula tersebut **valid**.

Sekilas, cara pembuktian dengan tabel kebenaran terlihat mudah. Akan tetapi semakin banyak formula dari premis-premis yang ada dan semakin bertambahnya jumlah atom yang digunakan semakin rumit serta semakin besar ukuran tabel yang mesti dibuat. Namun masih ada cara lain yang bisa digunakan untuk membuktikan kebenaran formula di atas dengan cara bukti kontradiksi (silakan dicoba sendiri).

Penyederhanaan/ Normalisasi

Pembuktian normalisasi adalah dengan cara menyambungkan premis-premis dengan operator logika konjungsi " \wedge " yang kemudian disederhanakan kembali ke dalam bentuk normal konjungsi atau disjungsi. Sebagai referensi dalam penyederhanaan formula, telah dituliskan daftar ekuivalensi logis pada **tabel 2.3**. Teknis pelaksanaan penyederhanaan formula dilakukan dengan melakukan

penggantian atau substitusi terhadap suatu formula dengan formula lain yang ekuivalen.

Teladan 2.23

Harga saham turun apabila suku bunga naik. Banyak investor kecewa apabila harga saham turun. Pada saat ini suku bunga naik. Tunjukkan bahwa kesimpulannya **banyak investor kecewa**.

Solusi:

Dari argumen di atas, dapat disusun premis dan kesimpulan :

P_1 : Jika suku bunga naik, maka harga saham turun.

P_2 : Jika harga saham turun, maka banyak investor kecewa.

P_3 : Suku bunga naik.

C : **Banyak investor kecewa.**

Apabila 'suku bunga naik' dilambangkan dengan variabel p , 'harga saham turun' dengan s , dan 'banyak orang kecewa' dengan u , maka masing-masing proposisi di atas bila direpresentasikan dalam formula menjadi :

P_1 : $p \rightarrow s$

P_2 : $s \rightarrow u$

P_3 : p

C : u

Berdasarkan cara pembuktian langsung maka kita hubungkan antara premis ke-1, ke-2 dan ke-3 dengan operator logika \wedge (dan) maka didapat :

$$\begin{aligned}
 ((p \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow u) \wedge p) &\Leftrightarrow ((\sim p \vee s) \wedge (\sim s \vee u) \wedge p) \\
 &\Leftrightarrow (p \wedge (\sim p \vee s) \wedge (\sim s \vee u)) \\
 &\Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge s) \wedge (\sim s \vee u) \\
 &\Leftrightarrow (0) \vee (p \wedge s) \wedge (\sim s \vee u) \\
 &\Leftrightarrow (p \wedge s) \wedge (\sim s \vee u) \\
 &\Leftrightarrow (p \wedge s \wedge \sim s) \vee (p \wedge s \wedge u) \\
 &\Leftrightarrow (p \wedge 0) \vee (p \wedge s \wedge u) \\
 &\Leftrightarrow (0) \vee (p \wedge s \wedge u)
 \end{aligned}$$

$$((p \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow u) \wedge p) \Leftrightarrow (p \wedge s \wedge u)$$

Oleh karena seluruh premis bernilai benar, maka $((p \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow u) \wedge p)$ adalah benar. Sedangkan berdasarkan hasil normalisasi, $(p \wedge s \wedge u)$ ekuivalen dengan $((p \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow u) \wedge p)$, maka dapat dipastikan bahwa $(p \wedge s \wedge u)$ benar juga. Karena $p \wedge s \wedge u$ bernilai benar hanya jika p , s dan u semuanya benar, sehingga bisa disimpulkan bahwa u adalah benar atau dapat disimpulkan **banyak investor kecewa**.

Teladan 2.28

Buktikan bahwa $p \rightarrow q$ adalah kesimpulan dari $p \rightarrow (\sim r \rightarrow q)$ dan $p \rightarrow \sim r$

Solusi:

Sekarang untuk memecahkan permasalahan menggunakan metode pembuktian tak langsung, yaitu dengan **kontradiksi** dimana argumennya menjadi:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \sim C \rightarrow 0.$$

Dari soal kita ketahui bahwa

$$P_1 : p \rightarrow (\sim r \rightarrow q) \Leftrightarrow p \rightarrow (r \vee q) \Leftrightarrow \sim p \vee r \vee q$$

$$P_2 : p \rightarrow \sim r \Leftrightarrow \sim p \vee \sim r$$

$$C : p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

Sehingga argument di atas, dapat disusun sebagaimana berikut ini.

$$(\sim p \vee r \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee q) \rightarrow 0$$

Atau

$$\underbrace{(\sim p \vee r \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r)}_A \wedge \underbrace{(\sim p \vee q)}_B \rightarrow 0$$

A

B

Langkah selanjutnya kita sederhanakan formula A:

$$(\sim p \vee r \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r)$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee r \vee q)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \wedge (\sim p \vee r \vee q) \vee (\sim r \wedge (\sim p \vee r \vee q))$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge r) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge r) \vee (\sim r \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \vee (\sim p \wedge r) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee 0 \vee (\sim r \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge 1) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge (1 \vee q)) \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \wedge 1 \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge q)$$

Sehingga, argumen $A \wedge B \rightarrow 0$ menjadi:

$$\sim p \vee (\sim r \wedge \sim p) \vee (\sim r \wedge q) \wedge (p \vee \sim q) \rightarrow 0$$

A

B

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge p) \vee (p \wedge \sim r \wedge \sim p)) \vee (p \wedge \sim r \wedge q)) \wedge \sim q \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow (0) \vee (0) \vee (p \wedge \sim r \wedge q)) \wedge \sim q \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim r \wedge q \wedge \sim q) \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim r) \wedge (q \wedge \sim q) \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim r) \wedge 0 \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow 1$$

Terlihat bahwa hasil penyederhanaan argumen adalah 1 (**tautologi**), dengan kata lain argumen di atas adalah **valid**, sehingga terbukti bahwa $p \rightarrow q$ adalah kesimpulan dari $p \rightarrow (\sim r \rightarrow q)$ dan $p \rightarrow \sim r$

Teladan 2.29

Buktikan bahwa premis $(p \vee q)$ dan $(\sim p \vee r)$ merupakan simpulan dari $(q \vee r)$!

Solusi:

Seperti pada soal sebelumnya kita gunakan metode pembuktian kontradiksi, dimana argumen yang kita gunakan menjadi:

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \wedge \sim (q \vee r) \rightarrow 0$$

Kemudian kita sederhanakan argumen di atas, adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \wedge \sim (q \vee r) \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \wedge \sim q \wedge \sim r \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge (p \vee q) \wedge (r \wedge (p \vee q))) \wedge \sim q \wedge \sim r \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)) \wedge ((r \wedge p) \vee (r \wedge q)) \wedge (\sim q \wedge \sim r) \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow (0 \vee (\sim p \wedge q)) \vee ((r \wedge p) \vee (r \wedge q)) \wedge (\sim q \wedge \sim r) \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge q) \vee (r \wedge p) \vee (r \wedge q)) \wedge (\sim q \wedge \sim r) \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \wedge q) \vee (r \wedge p) \vee (r \wedge q)) \wedge (\sim q \wedge \sim r) \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow (\sim q \wedge ((\sim p \wedge q) \vee (r \wedge p) \vee (r \wedge q))) \wedge (\sim r \wedge ((\sim p \wedge q) \vee (r \wedge p) \vee (r \wedge q))) \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow ((\sim q \wedge \sim p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r \wedge p) \vee (\sim q \wedge r \wedge q)) \wedge (\sim r \wedge \sim p \wedge q) \vee (\sim r \wedge r \wedge p) \vee (\sim r \wedge r \wedge q) \rightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow (0) \vee (\sim q \wedge r \wedge p) \vee (0) \wedge (\sim r \wedge \sim p \wedge q) \vee (0) \vee (0) \rightarrow 0$$

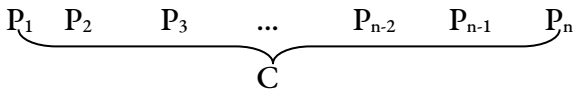
$$\Leftrightarrow (\sim q \wedge r \wedge p) \wedge (\sim r \wedge \sim p \wedge q) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\sim q \wedge r \wedge p \wedge \sim r \wedge \sim p \wedge q \rightarrow 0 \\
&\Leftrightarrow (\sim q \wedge q) \wedge (r \wedge \sim r) \wedge (p \wedge \sim p) \rightarrow 0 \\
&\Leftrightarrow (0) \wedge (0) \wedge (0) \rightarrow 0 \\
&\Leftrightarrow 0 \rightarrow 0 \\
&\Leftrightarrow 1
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(p \vee q)$ dan $(\sim p \vee r)$ merupakan simpulan dari $(q \vee r)$

Aturan Inferensi

Asumsikan kita diberikan satu himpunan proposisi yang terdiri dari sejumlah premis (P_1, P_2, \dots, P_n) dan kesimpulan (*conclusion*) C . Pembuktian kesimpulan berdasarkan premis pada himpunan tersebut dapat kita rangkai menjadi struktur pohon atau *tree*. Dan apabila digambarkan akan didapat bentuk seperti:



Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut ini

Teladan 2.30

Jika Fulan rajin bekerja, maka ia mendapat reputasi kerja yang baik. Bila Fulan memiliki reputasi kerja yang baik, maka karirnya akan meningkat dengan cepat. Belakangan ini Karir Fulan mandek. Oleh karenanya **Fulan tidak rajin bekerja**.

Solusi:

Apabila kita definisikan:

p : rajin bekerja

q : mendapat reputasi kerja yang baik

r : karir meningkat dengan cepat

maka, premis-premis yang ada dapat dilambangkan dengan formula:

$$P_1 : p \rightarrow q$$

$$P_2 : p \rightarrow r$$

$$P_3 : \sim r$$

Bila kita buktikan secara formal,

$$\frac{P_1 : p \rightarrow q \quad P_2 : p \rightarrow r}{C_1 : p \rightarrow r \quad P_3 : \sim r}$$

$$C : \sim p$$

Jika dibuktikan dalam aturan inferensi (*rule of inference*), maka langkah-langkahnya akan menjadi seperti berikut:

Langkah	Alasan
1. $p \rightarrow q$	premis P_1
2. $q \rightarrow r$	premis P_2
3. $\therefore p \rightarrow r$	dari langkah 1, 2; silogisme hipotetikal
4. $\sim r$	premis P_3

5. $\therefore \sim p$ dari langkah 3, 4; modus tollens

Pembuktian cara lain

$$\begin{array}{l} \underline{P_2 : q \rightarrow r} \quad \quad \quad \underline{P_3 : \neg r} \\ \underline{C_1 : \neg q} \quad \quad \quad \underline{P_1 : p \rightarrow q} \\ C : \neg p \end{array}$$

Dan berikut ini adalah aturan inferensinya

Langkah Alasan

1. $q \rightarrow r$ premis P_2
2. $\neg r$ premis P_3
3. $\therefore \neg q$ langkah 1,2; modus tollens
4. $p \rightarrow q$ premis P_1
5. $\therefore \neg p$ langkah 3,4; modus tollens

Berdasarkan pembuktian diatas, terbukti bahwa kesimpulan **Fulan tidak rajin bekerja** adalah benar.

Jika kita perhatikan dengan baik, akan diketahui bahwa pembuktian contoh di atas berbasiskan implikasi logis yang berbentuk $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow C$.

Jika $P_1, P_2, P_3, \dots, P_i$ (dimana $i < n$) telah muncul pada aturan inferensi dan implikasi $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_i \Rightarrow Q$ adalah **benar**, maka Q boleh disertakan pada kalkulasi aturan inferensi selanjutnya yaitu $Q \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow C$.

Tabel berikut adalah referensi aturan inferensi, yang pada dasarnya dihasilkan dari penurunan tautologi implikasi logis.

Tabel 2.5 Tabel Aturan Inferensi (Tautologi)

$\frac{P}{\therefore P \vee Q}$	adisi	$\frac{P \wedge Q}{\therefore P}$	simplifikasi
$\frac{P \quad P \rightarrow Q}{\therefore Q}$	Modus Ponens	$\frac{P \rightarrow Q \quad \sim Q}{\therefore \sim P}$	modus tollens
$\frac{P \vee Q \quad \sim P}{\therefore Q}$	silogisme disjungtif	$\frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow R}{\therefore P \rightarrow R}$	silogisme hipotetikal
$\frac{P \quad Q}{\therefore P \wedge Q}$	konjungsi	$\frac{P \vee Q \quad \sim P \vee Q}{\therefore Q \vee R}$	prinsip resolusi

Dalam membuktikan kesimpulan C secara formal, yang menggunakan P_1, P_2, P_3, \dots, C , maka P_i adalah salah satu dari :

- Premis
- Tautologi
- Konsekuensi logis dari komposisi premis atau tautologi sebelumnya.

Yang menjadi pertanyaan disini adalah: 'Mengapa tautologi boleh disertai kan pada proses kalkulasi aturan inferensi?' Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya,

pembuktian aturan inferensi berbasiskan implikasi logis yang formulanya memiliki bentuk umum $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow C$, dan tautologi adalah formula yang interpretasinya selalu benar. Misalkan tautologi T disertakan pada proses kalkulasi, maka didapat formula implikasi logis $T \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow C$. Disini cukup jelas terlihat bahwa meskipun tautologi disertakan pada proses perhitungan tautologi tidak akan mengubah nilai kebenaran dari implikasi logis.

Teladan 2.31

Buktikan bahwa $s \rightarrow r$ adalah kesimpulan dari premis-premis $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, $p \vee \sim s$, dan q .

Solusi:

Disini kita gunakan metode pembuktian secara langsung yang menggunakan argumen $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow C$

Berikut pembuktian menggunakan aturan inferensi

Langkah	Alasan
1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premis
2. $p \vee \sim s$	premis
3. q	premis
4. $\therefore \sim s \vee p$	langkah 2; hukum komutatif
5. $\therefore s \rightarrow p$	langkah 4; implikasi
6. $\therefore s \rightarrow (q \rightarrow r)$	langkah 1,5 silogisme hipotetik

- | | | |
|-----|--|--|
| 7. | $\therefore s \wedge q \rightarrow r$ | langkah 6, hukum eksportasi |
| 8. | $q \rightarrow (s \rightarrow (s \wedge q))$ | tautologi |
| 9. | $\therefore s \rightarrow (s \wedge q)$ | langkah 3,8; modus ponens |
| 10. | $\therefore s \rightarrow r$ | langkah 7,10; silogisme
hipotetikal |

Perlu diperhatikan bahwa pada langkah 8 digunakan tautologi $q \rightarrow (s \rightarrow (s \wedge q))$, sedangkan pada tabel tautologi formulanya adalah $q \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$. Meskipun nama atom yang digunakan berlainan, kedua formula tersebut adalah ekuivalen. Nama atom seperti p, q, r, dst yang digunakan dalam formula boleh diganti atau disubstitusi oleh nama lain, dengan catatan tidak diperbolehkan mengganti satu nama dengan dua nama berbeda.

Teladan 2.32

Buktikan dengan menggunakan metode kontradiksi bahwa $\sim p$ adalah kesimpulan dari premis-premis $p \rightarrow (q \wedge r)$, $r \rightarrow s$, dan $\sim (q \wedge s)$.

Solusi:

Disini kita gunakan metode pembuktian secara tidak langsung yang menggunakan argumen: $P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \wedge \sim C \Rightarrow 0$

Berikut pembuktian menggunakan aturan inferensi

Langkah	Alasan
1. $p \rightarrow (q \wedge r)$	premis
2. $r \rightarrow s$	premis
3. $\sim (q \wedge s)$	premis
4. $\sim (\sim p)$	negasi dari kesimpulan,
5. $\therefore p$	langkah 4 ; negasi ganda
6. $\therefore q \wedge r$	langkah 1,5 ; modus ponens
7. $\therefore q$	langkah 6 simplifikasi
8. $\therefore r \wedge q$	langkah 6 hukum komutatif
9. $\therefore r$	langkah 8 simplifikasi
10. $\therefore s$	langkah 2,9, modus ponens
11. $\therefore q \wedge s$	langkah 7,10 konjungsi
12. $\therefore (q \wedge s) \wedge \sim (q \wedge s)$	langkah 3,11 konjungsi
13. 0	langkah 12 kontradiksi

Pada proses kalkulasi, selain implikasi dilakukan pula substitusi pada formula. Berikut aturan substitusi pada suatu formula :

Aturan Substitusi 1: Jika seluruh kemunculan suatu atom pada formula yang tautologi diganti oleh atom lain, ataupun formula lain, maka formula yang baru dibentuk 'pun akan menjadi tautologi juga.

Teladan 2.33

Berdasarkan tabel 2.3 diketahui bahwa $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$ adalah tautologi. Apabila seluruh kemunculan p kita ganti dengan formula $q \rightarrow r$ dan seluruh kemunculan q diganti dengan $s \vee t$, maka akan didapatkan formula:

$$[q \rightarrow r] \rightarrow ((s \vee t) \rightarrow (q \rightarrow r) \wedge (s \vee t)).$$

Formula di atas, dapat dipastikan tautologi. Mengenai pembuktian tautologi, disilakan pada pembaca untuk melakukannya.

Teladan 2.34

Diketahui formula:

$$(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q) \text{ Hukum de Morgan}$$

Jika kita substitusikan seluruh kemunculan p dengan $\sim p$ dan seluruh kemunculan q dengan $\sim q$, maka akan kita dapatkan **tautologi** baru:

$$(\sim \sim p \wedge \sim \sim q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

Atau ekuivalen dengan formula

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(\sim(p \wedge q))$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$$

Aturan Substitusi 2: Jika formula P mengandung formula Q , dan Q diganti dengan formula lain yang ekuivalen secara logika dengan Q , maka formula yang baru dibentuk akan ekuivalen secara logika dengan P .

Teladan 2.35

Perhatikan formula

$$P: \sim [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$$

Apabila formula $Q = p \rightarrow q$ digantikan oleh formula $\sim p \vee q$, maka akan didapat formula

$$P: \sim [(\sim p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$$

Apabila $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$ kita substitusikan formula $(p \rightarrow (q \wedge r))$, akan didapat formula baru

$$P: \sim (p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$$

Teladan 2.36

Buatlah formula yang ekuivalen dengan $(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$ tetapi tidak menggunakan operator logika \wedge .

Solusi:

Berdasarkan hukum De Morgan, diperoleh:

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q) \text{ dan } (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (p \vee \sim q).$$

Kemudian formula ini kita substitusikan, maka akan didapat:
 $(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim (p \vee \sim q)$

F. Analisis Argumen

Setelah membahas pembuktian secara logika, pada sub bab ini akan dibahas mengenai analisis argumen, khususnya mengenai kesalahan-kesalahan yang sering kali terjadi pada argumen. Dalam percakapan sehari-hari sering terdengar orang berargumentasi dengan mengajukan fakta-fakta yang digunakan untuk mendukung kesimpulan yang dibuat

olehnya. Kendati demikian, sering kali pula orang terjebak pada kesalahan ketika melakukan proses pembuktian atau penarikan kesimpulan. Sehingga meskipun fakta-fakta atau premis yang dikemukakan adalah benar, namun argumen tersebut tetap, tidaklah valid. Sederetan proposisi yang gagal memenuhi persyaratan untuk pembuktian formal pada aturan inferensi disebut *fallacy*.

Sebelum membahas kesalahan-kesalahan yang umum dilakukan dalam argumen, marilah kita perhatikan contoh berikut.

Teladan 2.37

Pada suatu pabrik tempe terdapat argumentasi berikut:

Jika bahan baku kedelai berasal dari Indonesia atau Amerika, maka tempe yang diproduksi pasti bermutu baik. Jika tempe yang diproduksi bermutu baik maka tempe tersebut pasti laku dipasaran. Oleh karenanya, jika tempe yang diproduksi tidak laku, maka bahan baku kedelai yang digunakan bukan berasal dari Amerika.

Benarkah kesimpulan ini ?

Untuk memecahkan permasalahan di atas, maka perlu disusun premis-premis secara simbolik berikut ini.

a : bahan baku kedelai berasal dari Indonesia

b : bahan baku kedelai berasal dari Amerika

c : tempe yang diproduksi bermutu baik

d : tempe laku dipasaran

Sehingga:

- Jika bahan baku kedelai berasal dari Indonesia atau Amerika, maka tempe yang diproduksi pasti bermutu baik' dengan symbol logika $a \vee b \rightarrow c$
- Jika tempe yang diproduksi bermutu baik, maka tempe tersebut pasti laku dipasaran' dengan symbol logika $c \rightarrow d$
- 'Jika tempe yang diproduksi tidak laku, maka bahan baku kedelai yang digunakan bukan berasal dari Amerika' dengan symbol logika $\sim d \rightarrow \sim b$

Dimana 1 dan 2 merupakan premis dan 3 adalah Kesimpulan. Selanjutnya akan dibuktikan $\sim d \rightarrow \sim b$ adalah kesimpulan dari premis $a \vee b \rightarrow c$ dan $c \rightarrow d$.

Oleh Karena $\sim d \rightarrow \sim b$ adalah kontrapositif dari $b \rightarrow d$, sebenarnya kita cukup membuktikan kebenaran sampai $b \rightarrow d$.

Adapun pembuktian secara formalnya adalah

Langkah	Alasan
1. $a \vee b \rightarrow c$	premis P,
2. $c \rightarrow d$	premis P2
3. $b \rightarrow b \vee a$	adisi; tautologi
4. $\therefore b \rightarrow a \vee b$	langkah 3. komutatif
5. $\therefore b \rightarrow c$	langkah 1,4: silogisme hipotetikal
6. $\therefore b \rightarrow d$	langkah 2,5; silogisme hipotetikal

7. $\therefore \sim d \rightarrow \sim b$ langkah 6; kontraposisif

Dari analisis di atas terbukti bahwa kesimpulan 'jika tempe yang diproduksi tidak laku, maka bahan baku kedelai yang digunakan bukan berasal dari Amerika' adalah **benar**, sehingga argumen yang digunakan adalah **valid**. Akan tetapi cara pembuktian secara formal yang kita gunakan disini 'tidak membumi'. Atau dengan kata lain, pengguna argumen formal terkadang hanya membuat makin rumitnya pemecahan permasalahan yang pada mulanya sederhana.

Selanjutnya, perhatikan contoh selanjutnya yang juga merupakan turunan dari contoh di atas.

Teladan 2.38

Perhatikan argumen berikut.

Jika bahan baku kedelai berasal dari Indonesia atau Amerika, maka tempe yang diproduksi pasti bermutu baik. Jika tempe yang diproduksi bermutu baik, maka tempe tersebut laku dipasaran. Akan tetapi pada kenyataannya tempe yang diproduksi tidak laku dipasaran. Oleh karenanya, bahan baku kedelai yang digunakan bukan berasal dari Indonesia.

Validkah argumen ini ?

Solusi:

Seperti pada teladan 2.37, kita definisikan

a : bahan baku kedelai berasal dari Indonesia

b : bahan baku kedelai berasal dari Amerika

c : tempe yang diproduksi bermutu baik

d : tempe laku dipasaran

Sehingga:

- 'Jika bahan baku kedelai berasal dari Indonesia atau Amerika, maka tempe yang diproduksi pasti bermutu baik' dengan symbol logika $a \vee b \rightarrow c$
- 'Jika tempe yang diproduksi bermutu baik, maka tempe tersebut laku dipasaran' dengan symbol logika $c \rightarrow d$
- 'Tempe yang diproduksi tidak laku dipasaran' dengan symbol logika $\sim d$
- 'Bahan baku kedelai yang digunakan bukan berasal dari Indonesia' dengan symbol logika $\sim a$

Adapun pembuktian secara formalnya adalah

Langkah	Alasan
1. $a \vee b \rightarrow c$	premis P_1 ,
2. $c \rightarrow d$	premis P_2
3. $\sim d$	premis P_3
4. $a \rightarrow a \vee b$	adisi; tautologi
5. $\therefore a \rightarrow c$	langkah 1,4; silogisme hipotetikal
6. $\therefore a \rightarrow d$	langkah 2,5; silogisme hipotetikal
7. $\therefore \sim d \rightarrow \sim a$	langkah 6; kontraposisif
8. $\therefore \sim a$	langkah 3,7; modus ponens

Berikut jika kita ungkapkan pembuktian formal diatas secara naratif. Jika tempe yang diproduksi bermutu baik maka tempe tersebut akan laku dipasaran. Karena ternyata tempe yang diproduksi tidak laku dipasaran, maka tempe tersebut pasti tidak bermutu baik. Sedangkan jika bahan baku kedelai yang digunakan berasal dari Indonesia atau Amerika, maka tempe yang diproduksi bermutu baik, sehingga jika bahan baku kedelai yang digunakan berasal dari Indonesia, maka tempe yang dihasilkan pun pasti bermutu baik. Dengan kata lain, jika tempe yang diproduksi tidak bermutu baik, maka pasti bahan baku kedelai yang digunakan bukan berasal dari Indonesia. Karena diketahui tempe yang dihasilkan tidak bermutu bak maka dapat disimpulkan: bahan baku kedelai yang digunakan pasti bukan berasal dari Indonesia.

Teladan 2.39

Di bawah ini adalah pembuktian formal dari teladan 2.38 dengan metode pembuktian secara tidak langsung (**kontradiksi**).

Langkah	Alasan
1. $a \vee b \rightarrow c$	premis P_1 ,
2. $c \rightarrow d$	premis P_2
3. $\sim d$	premis P_3
4. $\sim (\sim a)$	negasi konklusi
5. $\therefore a$	langkah 4; negasi ganda
6. $a \rightarrow (a \vee b)$	adisi; tautologi

7. $\therefore a \rightarrow c$ langkah 1,4; silogisme hipotetikal
8. $\therefore a \rightarrow d$ langkah 2,7; silogisme hipotetikal
9. $\therefore \sim d \rightarrow \sim a$ langkah 6; kontraposisif
10. $\therefore \sim a$ langkah 3, 71; modus tollens
11. $\therefore a \wedge \sim a$ langkah 5,10 silogisme konjungsi
12. $\therefore 0$ langkah 11 kontradiksi

Atau bila dijelaskan secara naratif :

Jika kedelai yang digunakan dari Indonesia atau Amerika, maka tempe yang diproduksi bermutu baik. Sehingga jika kedelai yang digunakan dari Indonesia, maka tempe yang diproduksi pasti bermutu baik. Jika tempe yang diproduksi bermutu baik maka tempe tersebut akan laku dipasaran. Anggaplah kedelai yang digunakan dari Indonesia. Berdasarkan anggapan ini tempe yang diproduksi pasti laku dipasaran. Akan tetapi pada kenyataannya tempe yang diproduksi tidak laku dipasaran. Oleh karenanya dapat dipastikan bahwa kedelai yang digunakan bukan dari Indonesia.

Untuk membuktikan kebenaran suatu argumen memang tidaklah semudah membalikan telapak tangan. Akan tetapi, dengan ketekunan, latihan dan ketelitian, setidaknya kita dapat mengasah kemampuan membangun argumen yang logis, sekaligus juga kemampuan mengenali kevalidan suatu argumen.

Contoh-contoh hingga disini seluruhnya adalah argumen yang benar saja, untuk perbandingan, berikut adalah beberapa contoh dari kesalahan dalam membangun argumen.

Teladan 2.40

Perhatikan argumen berikut

Jika suku bunga naik, maka harga saham akan turun. Apabila harga saham turun, maka investor akan merugi. Oleh karenanya jika investor merugi, dapat dipastikan bahwa suku bunga naik.

Benar atau salahkah argumentasi tersebut?

Solusi:

Seperti biasa, sebelumnya kita buat dulu perjanjian mengenai simbol yang digunakan untuk masing-masing atom, yakni:

u : suku bunga naik

v : harga saham turun

w : investor merugi

Sehingga premis-premis dan konklusi pada argumen dapat kita notasikan dengan:

$P_1 : u \rightarrow v$

$P_2 : v \rightarrow w$

$P_3 : w$

C : u

Berikut adalah pembuktian formal dari argumen.

Langkah	Alasan
1. $u \rightarrow v$	premis P_1
2. $v \rightarrow w$	premis P_2
3. w	premis P_3
4. $\therefore u \rightarrow w$	langkah 1,2;
5. $\therefore u$	langkah 3,4; ???

Disini terlihat *fallacy* pada langkah ke 5, disebabkan penerapan aturan inferensi yang **salah**. Adapun aturan inferensi yang **salah** adalah:

$$\begin{array}{l} Q \\ \underline{P \rightarrow Q} \\ \therefore P \end{array}$$

Teladan 2.41

Perhatikan pula argumen **invalid** berikut ini.

Jika saya telah makan nasi, maka perut saya akan kenyang. Oleh karenanya jika saat ini perut saya kenyang, maka saya telah makan nasi.

Sepintas argumen ini terlihat benar, akan tetapi tetap merupakan argumen yang **invalid**.

Kesalahan pada argumen ini adalah menunjukkan kebenaran $P \rightarrow Q$ dengan $Q \rightarrow P$. Pada kehidupan nyata, jika

saat ini perut saya kenyang, mungkin saja disebabkan saya telah makan bubur, penganan, ataupun makanan lainnya.

Teladan 2.42

Argumen berikut merupakan argumen yang **invalid** juga.

Jika saya telah makan nasi, maka perut saya akan kenyang. Oleh karenanya jika saat ini saya belum makan nasi, maka saya masih lapar.

Kesalahan pada argumen ini adalah kesalahan penerapan modus tolens.

$$P \rightarrow Q$$

$$\frac{\neg P}{\quad}$$

$$\therefore \neg Q$$

Pada kenyataannya, meskipun saat ini saya belum makan nasi, mungkin saja perut saya telah kenyang (karena makan ubi, dan seterusnya).

G. Soal-Soal Latihan

1. Manakah yang merupakan proposisi ? Berikan alasannya!

(a) Bandung adalah ibukota Indonesia

(b) $2 + 2 = 4$

(c) Kemana engkau pergi ?

(d) Bukakan pintu untukku.

2. Buatlah tabel kebenaran untuk

(a) $p \wedge \sim q$

(c) $p \vee \sim q$

(b) $p \wedge \sim p \vee q$

(d) $p \vee \sim q \wedge r$

3. Ubahlah formula-formula berikut kedalam bentuk normal disjungsi!

(a) $\sim p \wedge q \rightarrow r$

(b) $p \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow s)$

(c) $\sim (p \vee \sim q) \wedge (s \rightarrow t)$

(d) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

(e) $\sim (p \wedge q) \wedge (p \vee q)$

4. Ubahlah formula-formula berikut kedalam bentuk normal konjungsi!

(a) $p \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$

(b) $\sim (p \rightarrow q) \vee (p \vee q)$

(c) $\sim (p \rightarrow q)$

$$(d) (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

$$(e) (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$$

5. Tentukan kebenaran dari formula-formula berikut dengan menggunakan tabel kebenaran!

$$(a) p \rightarrow (p \vee q)$$

$$(b) p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

$$(c) (p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow \sim q$$

$$(d) (p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$$

$$(e) ((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

6. Buktikanlah bahwa $\sim q \rightarrow \sim p$ adalah konsekuensi logis dari $p \rightarrow q$.

7. Ubahlah pernyataan-pernyataan berikut kedalam notasi matematika.

(a) Suatu relasi adalah relasi ekuivalen jika dan hanya jika memenuhi sifat refleksif, simetrik dan transitif.

(b) Jika kelembaban sangat tinggi, maka malam ini akan hujan.

(c) Penyakit kanker tidak akan tersembuhkan kecuali penyebabnya diketahui dan obat baru ditemukan.

(d) Dibutuhkan keberanian dan keahlian untuk memanjat tebing.

(e) Jika calon legislatif berusaha keras ketika masa kampanye, maka ada kemungkinan ia terpilih.

8. Pernyataan mengenai himpunan di bawah ini adalah salah. Tunjukkan fakta contoh yang tidak memenuhi pernyataan tersebut.
- (a) Jika $A \cap B = A \cap C$, maka $B = C$.
- (b) Jika $A \cup B = A \cup C$, maka $B = C$
9. Verifikasi ke-ekuivalen-an proposisi-proposisi dibawah ini dengan cara normalisasi bagian kiri atau kanan simbol \Leftrightarrow hingga menjadi sama dengan bagian lainnya.
- (a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow (\sim P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- (b) $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R))$
- (c) $(P \wedge Q) \wedge (\sim P \vee \sim Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q) \wedge (P \vee Q)$
- (d) $P \vee (P \rightarrow (P \wedge Q)) \Leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q) \vee (P \wedge Q)$
10. Buktikan kebenaran dari semua aturan inferensi pada tabel 3.5
11. Ubahlah kalimat argumentasi dibawah ini dalam notasi logika, dan tunjukkan benar atau salahnya kesimpulan di bawah ini dengan aturan inferensi.
- (a) Jika hitungan saya benar dan saya membayar penuh tagihan listrik, maka saya akan kehabisan uang. Tetapi jika saya tidak membayar tagihan listrik, sambungan listrik akan diputus. Oleh karenanya, jika saya tidak kehabisan uang dan sambungan listrik tidak diputus, maka hitungan saya salah.

(b) jika saya mendapatkan pekerjaan dan saya bekerja keras, saya pasti dipromosikan. Jika saya dipromosikan, saya akan menjadi senang. Saat ini saya tidak senang. Ini berarti bahwa saya tidak mendapatkan pekerjaan maupun tidak bekerja keras.

12. Jika DPR menolak mengesahkan UU baru, maka demo tidak akan berakhir kecuali demo sudah berjalan lebih dari 1 tahun dan presiden mengundurkan diri. DPR menolak mengesahkan UU baru dan demo baru saja dimulai. Oleh karenanya demo tidak akan berakhir.

Tunjukkan kebenaran dari kesimpulan.

13. Perhatikan argumen berikut

Jika saya belajar maka saya tidak akan gagal dalam ujian matematika. Jika saya tidak jalan-jalan ke Mall maka saya akan belajar. Akan tetapi saya gagal dalam ujian matematika. Oleh karena itu saya telah jalan-jalan ke Mall.

Tunjukkan benar atau salahnya argumen diatas menggunakan aturan inferensi.

14. Jika pasokan uang dolar tetap akan tetapi permintaan pasar melonjak, maka dolar akan menguat. Jika dolar menguat, maka para spekulan akan meraup keuntungan. Saat ini pasokan dolar adalah konstan. Apakah para spekulan akan meraup keuntungan saat ini?

15. Simaklah argumen berikut:

Jika tidak dibelikan kue oleh ibu, adik suka marah-marah. Dan adik suka bernyanyi gembira apabila tidak sedang marah. Karena saat ini adik sedang bernyanyi gembira, pasti adik telah dibelikan kue oleh ibu.

Validkah argumen di atas? Jika valid, buktikan, dan jika invalid, tunjukkan dimana letak kesalahannya. Gunakan penjelasan secara formal dan naratif.

16. Misalkan A dan B adalah sebarang himpunan, maka:

(a) $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $P(A) \subseteq P(B)$

(b) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

(c) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

Bukti:

Hanya akan dibuktikan bagian (1), sedangkan (2) dan (3) diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

- akan dibuktikan jika diketahui $A \subseteq B$, maka $P(A) \subseteq P(B)$

Misalkan $X \in P(A)$ berarti $X \subseteq A$. Oleh karena $A \subseteq B$ maka $X \subseteq B$ yang berarti pula $X \in P(B)$. Karena $X \in P(A)$ berakibat $X \in P(B)$ maka dapat disimpulkan bahwa $P(A) \subseteq P(B)$

- akan dibuktikan jika $P(A) \subseteq P(B)$ maka $A \subseteq B$.

Diketahui $P(A) \subseteq P(B)$. Misalkan $A \in P(A)$, akibatnya $A \in P(B)$. ini berarti bahwa $A \subseteq B$. terbukti.

Bukti untuk point (b) dan (c) dapat dijadikan sebagai latihan berlogika

BAB III

LOGIKA KUANTOR

Pada bab sebelumnya telah dipelajari penggunaan formula yang dibentuk dari premis untuk mengutarakan hal-hal yang cukup kompleks. sekaligus dijelaskan bahwa kalkulus proposisi hanya menangani formula atau premis dalam jumlah terbatas. Akan tetapi pada kehidupan nyata sering dihadapkan pada suatu formula atau premis yang jumlahnya tidak terbatas.

Teladan 3.1

Setiap binatang tidak berakal. Karena Kera adalah binatang, maka dia tidak berakal.

Berdasarkan kajian intuisi, dapat mengetahui bahwa kesimpulan di atas adalah benar. Apabila dinotasikan dengan formula berdasarkan logika proposisional, maka akan didapat

p : Setiap binatang tidak berakal

q : Kera adalah binatang

r : Kera tidak berakal.

Tetapi berdasarkan kerangka berpikir logika proposisional, r bukanlah konsekuensi dari p dan q . Hal ini

terjadi karena struktur pernyataan seperti pada contoh ini, tidak dikenal pada logika proposisional.

Pernyataan ‘setiap binatang tidak berakal’ mengandung pernyataan himpunan ‘binatang’, dimana individu yang merupakan elemen dari himpunan ‘binatang’ jumlahnya dapat dianggap tak hingga. Sedangkan pernyataan ‘Kera adalah binatang’ secara implisit menyatakan anggota dari himpunan ‘binatang’. Hubungan pernyataan dengan struktur seperti ini tidak terdapat pada logika proposisional. Apabila ingin membuktikan kebenaran dari pernyataan ‘setiap binatang tidak berakal’ dengan logika proposisional, maka bisa dibuktikan kebenaran dari seluruh elemen himpunan binatang. Ini adalah hal yang tidak mungkin dilakukan dalam logika proposisional. Oleh karena itu, untuk menentukan kebenaran dari kesimpulan di atas diperlukan suatu kerangka berpikir selain logika proposisional. Dan untuk memecahkan permasalahan seperti di atas biasa digunakan logika kuantor yang dikenal sebagai kalkulus predikat.

Pada dasarnya logika kuantor adalah hasil perluasan dari konsep logika proposisional dengan penambahan 3 komponen logika, yaitu : suku (term), predikat (predicate), dan quantifier.

Dengan menggunakan logika kuantor, akan lebih banyak lagi pernyataan-pernyataan dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan secara logika.

A. Dasar-Dasar Logika Kuantor

Dalam matematika maupun program komputer, sering ditemui pernyataan yang melibatkan variabel seperti :

- $x > 4$
- $x = y + 2$

Pernyataan-pernyataan di atas belum bisa ditentukan nilai kebenarannya selama nilai-nilai-nilai dari variabel yang terkait belum ditetapkan.

Jika dianalisis lebih jauh, pernyataan '*x lebih dari 4*' terdiri dari 2 bagian. Bagian pertama, yaitu *variabel x*, adalah subjek dari pernyataan. Sedangkan bagian kedua, yaitu predikat ('*lebih dari 4*'), menyatakan kriteria benar atau salah dari subjeknya. Dapat dipresentasikan '*x lebih dari 4*' dengan $P(x)$, dimana P melambangkan *predikat lebih dari 4*, dan x adalah *variabel*. $P(x)$ boleh juga disebut nilai dari fungsi proposisi P pada x . ketika nilai dari variabel x telah ditetapkan, maka $P(x)$ memiliki nilai kebenaran.

Teladan 3.2

Diketahui $Q(x,y)$ menotasikan pernyataan $x = y + 2$. Tentukan nilai kebenaran dari $Q(1,2)$ dan $Q(3,1)$.

Solusi:

Untuk mendapatkan nilai kebenaran $Q(1,2)$ adalah salah. Hal ini dapat ditunjukkan, jika disubstitusikan $x = 1$ dan $y = 2$ pada $Q(1, 2)$: dengan notasi $x = y + 2$. yaitu menjadi $1 = 2 + 2 = 4$ adalah salah.

Sedangkan $Q(3,1)$ adalah benar, yaitu $3 = 1 + 2$.

Definisi 3.1

Fungsi f yang menggunakan n -buah parameter disebut fungsi n -parameter, dimana fungsi ini memetakan n -buah elemen himpunan D pada sebuah elemen dari D , atau $f : D_n \rightarrow D$. dimana D *domain of discourse* atau domain dari f , dengan syarat $D \neq \emptyset$.

Pada referensi lain, domain disebut juga dengan *universal discourse*.

Teladan 3.3

Pernyataan $x + y$ dapat dinyatakan dengan *plus* (x, y), plus disini adalah fungsi 2-parameter, atau $plus : D \times D \rightarrow D$. Jika domain D didefinisikan sebagai himpunan bilangan bulat positif, maka hasil evaluasi $plus(1,2) = 1+2 = 3$.

Teladan 3.4

Pernyataan x^y dapat dinyatakan dengan *eksponen* (x, y), atau *eksponen*: $D \times D \rightarrow D$. Jika domain D sebagai himpunan bilangan bulat positif, maka hasil *eksponen* ($3,4$) = $3^4 = 81$

Definisi 3.2

Jika suku (term) didefinisikan secara rekursif maka :

1. Konstanta adalah suku
2. Variabel adalah suku
3. Jika f adalah fungsi n -parameter, dan t_1, \dots, t_n adalah suku, maka $f(t_1, \dots, t_n)$ adalah suku.

Seluruh suku dihasilkan dengan menerapkan aturan 1 sampai 3.

Berdasarkan definisi di atas, parameter suatu fungsi bisa berupa konstanta, variabel, maupun nilai dari suatu fungsi.

Catatan:

Apabila nilai atau hasil evaluasi dari suatu suku adalah d , maka dapat dipastikan bahwa d adalah elemen dari dominan D .

Teladan 3.5

Tentukan nilai dari $plus(plus(3,2), plus(2,1))$

Solusi:

$$\begin{aligned} plus(plus(3,2), plus(2,1)) &= plus(5, plus(2,1)) \\ &= plus(5,3) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Sesuai dengan penjelasan bab sebelumnya mengenai representasi nilai kebenaran, salah (atau *false*) direpresentasikan dengan '0' dan benar (atau *true*) dengan '1'.

Definisi 3.3

Jika P adalah fungsi yang memetakan dari domain D ke himpunan nilai kebenaran $\{0,1\}$, atau $P: D \rightarrow \{0,1\}$, maka P disebut predikat (*predicate*).

Definisi 3.4

Jika P adalah predikat yang berparameter sebanyak, n -buah, dan $t_1, t_2 \dots t_n$ adalah suku yang berdomainkan D , maka $P(t_1, t_2 \dots t_n)$ adalah formula atomik atau **atom**.

Teladan 3.6

$x > y$ dapat dinyatakan dengan *LEBIH DARI* (x, y), dimana *LEBIH DARI* disini adalah predikat 2-parameter, dan nilai dari predikat ini adalah 0 atau 1, tergantung dari nilai yang ditetapkan pada variabel x dan y . Jika diasumsikan domain D adalah himpunan bilangan bulat positif, maka *LEBIH DARI* ($3, 4$) = 0, sedangkan *LEBIH DARI* ($4, 3$) = 1.

Setelah mendefenisikan atom seperti di atas, dapat membentuk formula dengan cara mengkombinasikan atom-atom. Untuk menghubungkan antara satu atom dengan lainnya digunakan operator logika:

$$\sim, \quad \vee, \quad \wedge, \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow$$

Simbol *Quantifier*

Definisi 3.5

Simbol universal *quantifier* \forall melambangkan pernyataan ‘untuk seluruh’, dan digunakan pada pembentukan formula dengan bentuk :

$$(\forall x) P(x)$$

Dimana $(\forall x) P(x)$ bernilai benar apabila predikat $P(x)$ benar untuk setiap $x \in D$ dan selain dari itu $(\forall x) P(x)$ bernilai salah.

Formula $(\forall x) P(x)$ biasa dibaca sebagai ‘seluruh x untuk $P(x)$ ’, atau ‘setiap x untuk $P(x)$ ’.

Definisi 3.6

Simbol existential *quantifier* \exists formula yang digunakan: $(\exists x) P(x)$.

$(\exists x) P(x)$ bernilai benar apabila ada x yang menyebabkan $P(x)$ bernilai benar, dimana $x \in D$. Dan $(\exists x) P(x)$ bernilai salah apabila untuk setiap $x \in D$, $P(x)$ bernilai salah.

Formula $(\exists x) P(x)$ biasa dibaca dengan ‘ada x untuk $P(x)$ ’.

Hal yang perlu diperhatikan pada logika kuantor adalah formula yang menggunakan *quantifier* (baik \forall maupun \exists) dalam notasinya selalu diikuti oleh predikat, dimana parameter predikat tersebut berupa suku.

Teladan 3.7

Tuliskan pernyataan-pernyataan berikut ke dalam bentuk formula.

1. Setiap bilangan rasional adalah bilangan real
2. Ada bilangan yang merupakan bilangan prima
3. Untuk setiap bilangan x , ada bilangan y dimana $x < y$

Solusi:

Pertama-tama definisikan predikat sebagai berikut :

$P(x)$: x adalah bilangan prima

$Q(x)$: x adalah bilangan rasional

$R(x)$: x adalah bilangan real

$KURANG(x,y)$: x kurang dari y

Maka untuk pernyataan 1, 2, dan 3 di atas, dapat dinotasikan dengan:

1. $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$
2. $(\exists x) P(x)$
3. $(\forall x)(\exists y) KURANG(x,y)$

Ruang lingkup berlakunya suatu *quantifier* mengakibatkan terjadinya variabel terikat (*bound variable*) dan variabel bebas (*free variable*). Berikut definisinya:

Definisi 3.7

Kemunculan (*occurrence*) dari suatu variabel didalam formula disebut terikat (*bound*) jika dan hanya jika kemunculan tersebut terbatas pada ruang-lingkup *quantifier* yang menggunakan variabel tersebut. Kemunculan suatu variabel didalam formula disebut bebas (*free*) apabila variabel tersebut tidak terikat (*not bound*)

Definisi 3.8

Variabel suatu formula disebut variabel bebas apabila paling sedikit satu kemunculannya tidak terikat didalam formula tersebut. Variabel suatu formula disebut variabel terikat apabila paling sedikit satu kemunculannya terikat didalam formula tersebut.

Dari definisi 3.7 dan 3.8, bisa disimpulkan bahwa variabel dalam suatu formula bisa dibagi menjadi 3, yaitu: variabel bebas, variabel terikat, dan variabel bebas sekaligus variabel terikat. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Teladan 3.8

Perhatikan formula-formula berikut:

1. $(\forall x)P(x,y)$
2. $(\forall x)P(x,y) \wedge (\exists y)Q(y)$

Apakah variabel x dan y variabel bebas?

Solusi:

Formula ke-1: kemunculan variabel x terikat oleh *quantifier* \forall , sedangkan kemunculan variabel y tidak terikat oleh *quantifier* \forall . Oleh karenanya, disini x adalah variabel terikat, dan y adalah variabel bebas.

Formula ke-2: merupakan hasil kombinasi 2 formula, yaitu $F_1 : (\forall x)P(x,y)$ dan $F_2 : (\exists y)Q(y)$. Variabel x hanya muncul pada F_1 terikat oleh *quantifier* \forall , maka x adalah variabel terikat. Sedangkan variabel y muncul baik di F_1 maupun di F_2 . Pada F_1 kemunculan y tidak terikat *quantifier* \forall , sedangkan pada F_2 kemunculannya terikat *quantifier* \exists . Karenanya pada formula ke-2, variabel y adalah variabel terikat sekaligus pula variabel bebas.

Suatu formula disebut *well formed formula* apabila formula tersebut dapat diinterpretasikan, dan suatu formula

dapat diinterpretasikan jika dan hanya jika seluruh kemunculan variabelnya terikat.

Mengenai cara menginterpretasikan formula akan dijelaskan pada sub-bab selanjutnya. Berikut definisikan well formed formula, menggunakan atom, operator logika, dan *quantifier*.

Definisi 3.9

Well formed formula (wff) atau formula dalam logika kuantor adalah sebagai berikut:

1. Atom adalah formula
2. Jika F dan G adalah formula, maka $\sim F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, dan $(F \leftrightarrow G)$ adalah formula.
3. Jika F adalah formula dan x adalah variabel bebas dalam F , maka $(\forall x)F$ dan $(\exists y)F$ adalah formula.

Formula hanya dapat dibentuk dari aturan 1 hingga 3.

Pada definisi di atas, pada aturan ke-3 jelas-jelas tertulis bahwa *well formed formula* tidak mengandung variabel bebas.

Apabila diulas kembali keseluruhan sub-bab ini, dalam pembentukan formula, secara umum menggunakan variabel bebas.

1. Konstanta: Biasanya adalah nama dari objek, misalnya : Ali, Ahmed, dan 3.

2. Variabel: Biasa dituliskan dengan huruf kecil, baik itu memiliki indeks maupun tidak
3. Fungsi: Biasa dituliskan dengan huruf kecil seperti f , g , h , dst, maupun dengan bintang, string yang menggunakan huruf kecil seperti plus, minus, dst
4. Predikat: Biasa dituliskan dengan huruf kapital, P , Q , R dst, maupun dengan string yang dibentuk dari huruf kapital seperti *LEBIH DARI*, *KURANG DARI*, *BELAJAR*, *MENGAJAR*, dst

B. Transformasi Proposisi ke Formula Logika Kuantor

Langkah-langkah yang dilakukan dalam transformasi pernyataan ke dalam formula logika kuantor secara mudahnya adalah sebagai berikut:

1. Buat penafsiran mengenai pernyataan tersebut
2. Tentukan dan deklarasikan predikat-predikat yang digunakan
3. Tentukan *quantifier* yang diperlukan

Akan tetapi hal yang perlu diperhatikan ketika menterjemahkan kalimat atau pernyataan menjadi formula dalam logika kuantor adalah penafsiran atau cara memandang pernyataan itu sendiri. Penafsiran yang berbeda dapat mengakibatkan formula yang dihasilkan berbeda pula.

Hal lain yang perlu diperhatikan adalah dalam mentransformasikan sebuah pernyataan terkadang membutuhkan *quantifier* lebih dari satu.

Teladan 3.9

Tuliskan dalam bentuk formula pernyataan : x lebih dari y

Solusi :

Ketika menterjemahkan pernyataan 'x lebih dari y' ke dalam bentuk formula, apabila menafsirkan 'untuk setiap x ada y yang kurang dari', kemudian dinyatakan $x > y$ dengan predikat *LEBIH DARI* (x,y), maka akan didapat formula:
 $(\forall x) (\exists y) \text{LEBIH DARI} (x,y)$

Akan tetapi apabila menafsirkan 'untuk sembarang x dan y, jika x lebih dari y, maka tidak benar pernyataan y lebih dari x', maka formula yang didapatkan adalah : $(\forall x) (\forall y) \text{LEBIH DARI} (x,y) \rightarrow \sim \text{LEBIH DARI} (x,y)$

Teladan 3.10

Transformasikan pernyataan 'setiap orang memiliki seorang kawan karib' dalam bentuk formula.

Solusi:

Apabila menafsirkan bahwa pernyataan di atas sama dengan 'untuk setiap individu x ada individu lain y, dimana y adalah kawab karib x', dan predikat B(x,y) menyatakan 'y adalah kawan karib x', maka formula yang didapatkan adalah:

$$(\forall x) (\exists y) [B(x,y)]$$

Akan tetapi apabila lebih dicermati, akan menafsirkan lain lagi. Karena dalam permasalahan disini bisa melibatkan individu ke-3, yaitu z, dimana z bukan kawan karib x apabila z bukan y, atau formulanya adalah :

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[B(x,y) \wedge ((z \neq y) \rightarrow \sim B(x,z))].$$

Teladan 3.11

Ubahlah kalimat berikut kedalam formula

[Sebagian pabrik elektronika memproduksi sebagian komponen yang digunakan pada produk akhirnya]

Solusi:

dimulai dengan mendefinisikan predikat berikut

$P(x,y)$: x memproduksi komponen y

$Q(x,y)$: x adalah komponen dari y

Karena kalimat 'x memproduksi komponen y yang merupakan komponen dari z' ekuivalen dengan 'x memproduksi komponen y dan y adalah komponen dari z', maka dinotasikan dengan $P(x,y) \wedge Q(y,z)$. Sehingga formula dari kalimat awal adalah:

$$(\exists x)(\exists y)(\forall z)[P(x,y) \wedge Q(y,z)]$$

Teladan 3.12

Ubahlah kalimat berikut ke dalam formula

[Tidak ada orang tua menginginkan anaknya jadi penjahat].

Solusi:

Kalimat di atas ekuivalen dengan [Jika x adalah orang tua, maka x tidak ingin anaknya menjadi penjahat]. Dan predikat yang digunakan adalah:

$P(x,y)$: x adalah orang tua

$Q(x,y)$: x ingin anaknya menjadi penjahat

Sehingga notasi formula dari [Tidak ada orang tua menginginkan anaknya jadi penjahat] adalah :

$$(\forall x)P(x) \rightarrow \sim Q(x)$$

Silakan di analisis juga; setiap orang tua menginginkan anaknya shaleh

C. Interpretasi Formula Pada Logika Kuantor

Seperti pada logika proposisional, pada logika kuantor pun setiap formula memiliki nilai kebenaran, dimana nilai kebenaran suatu formula tergantung pada bagaimana interpretasi formula tersebut.

Definisi 3.10

Interpretasi suatu formula F pada logika kuantor dibentuk dari domain D yang non-empty, dan penetapan nilai pada konstanta, fungsi dan predikat yang muncul pada F:

1. Nilai konstanta tetapkan dari elemen D
2. Nilai fungsi n-parameter, ditetapkan pemetaan dari D_n ke D. Dimana,

$$D_n = \{(d_1, \dots, d_n) : d_1, d_2, \dots, d_n \in D\}$$

3. Untuk predikat n-parameter, ditetapkan pemetaan dari D_n ke nilai kebenaran $\{0,1\}$

Seluruh interpretasi formula pada domain D , dapat dievaluasi ke dalam nilai 0 atau 1 dengan aturan:

1. Jika diketahui formula G dan H , gunakan tabel kebenaran pada bab 3 ketika menginterpretasikan nilai kebenaran untuk formula $\sim G$, $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$, $(G \leftrightarrow H)$
2. Interpretasi $(\forall x) G$ adalah 1, jika nilai kebenaran G adalah 1 untuk setiap $x \in D$; selain dari itu interpretasi G adalah 0.
3. Interpretasi $(\exists y) G$ adalah 1, jika nilai kebenaran G adalah 1 untuk paling sedikit ada satu $x \in D$; selain dari itu interpretasi G adalah 0.

Catatan: formula yang mengandung variabel bebas tidak dapat dievaluasi. Untuk menghindari hal tersebut, formula yang ada (dalam buku ini) tidak mengandung variabel bebas, dan apabila dalam formula mengandung variabel bebas, maka variabel tersebut dianggap sebagai konstanta.

Teladan 3.13

Formula $(\forall x)P(x,y)$ tidak dapat diinterpretasikan. Alasannya adalah: predikat P pada formula adalah fungsi yang memetakan pasangan (x,y) ke himpunan $\{0,1\}$, dengan catatan domain dari pasangan (x,y) harus diketahui. Karena variabel y adalah variabel bebas, maka domain dari y tidak dapat diketahui. Sehingga domain dari pasangan (x,y) pun tidak diketahui.

Teladan 3.14

Diketahui formula:

1. $(\forall x)P(x)$
2. $(\exists x) \sim P(x)$

Dengan interpretasi I sebagai berikut :

Domain D : {1, 2}

Predikat P(x)

:	P(1)	P(2)
	1	0

Dapat difahami dengan mudah bahwa formula $(\forall x)P(x)$ adalah salah, dalam interpretasi disini, karena $P(x)$ tidak bernilai 1 untuk setiap nilai x (ketika $x = 2$, $P(2) = 0$). Sedangkan untuk formula $(\exists x) \sim P(x)$ diinterpretasikan benar, karena nilai $\sim P(2)$ adalah 1.

Teladan 3.15

Perhatikan formula F berikut:

$$(\forall x)(\exists y) P(x,y)$$

Interpretasi I didefinisikan sebagai berikut:

Domain D : {1, 2}

Predikat P(x):

P(1,1)	P(1,2)	P(2,1)	P(2,2)
1	0	0	1

Tentukan nilai kebenaran dari formula F.

Solusi:

Jika $x = 1$ ada y , yaitu $y = 1$, yang membuat $P(1,y) = 1$. Jika $x = 2$ juga ada y , yaitu $y = 2$, yang membuat $P(2,y) = 1$. Oleh karenanya pada interpretasi diatas, untuk setiap x pada D , ada y yang menyebabkan $P(x,y) = 1$, maka interpretasi formula $(\forall x)(\exists y)P(x,y) = 1$ atau benar dalam interpretasi I.

Berikut ini akan disajikan tabel ekuivalensi formula pada logika kuantor, untuk memudahkan para pembaca:

1. a. $\forall x \forall y p(x,y) \Leftrightarrow \forall x \forall y p(x,y)$
b. $\exists x \exists y p(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x$
2. a. $\exists x \forall y p(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x p(x,y)$
b. $\exists x \forall y p(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x p(x,y)$
3. a. $\sim \forall x p(x) \Leftrightarrow \exists x [\sim p(x)]$
b. $\sim \exists x p(x) \Leftrightarrow \forall x [\sim p(x)]$
c. $\forall x p(x) \Leftrightarrow \sim \exists x [\sim p(x)]$
d. $\exists x p(x) \Leftrightarrow \sim \forall x [\sim p(x)]$
4. a. $(\forall x) p(x) \vee q \Leftrightarrow (\forall x)(p(x) \vee q)$
b. $(\exists x) p(x) \vee q \Leftrightarrow (\exists x)(p(x) \vee q)$
5. a. $(\forall x) p(x) \wedge q \Leftrightarrow (\forall x)(p(x) \wedge q)$
b. $(\exists x) p(x) \wedge q \Leftrightarrow (\exists x)(p(x) \wedge q)$
6. a. $(\forall x) p(x) \vee (\forall x) q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall z)(p(x) \vee q(z))$

- b. $(\forall x) p(x) \vee (\exists x) q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists z)(p(x) \vee q(z))$
 c. $(\exists x) p(x) \vee (\forall x) q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall z)(p(x) \vee q(z))$
 d. $(\exists x) p(x) \vee (\exists x) q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists z)(p(x) \vee q(z))$
7. a. $(\forall x) p(x) \wedge (\forall x) q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall z)(p(x) \wedge q(z))$
 b. $(\forall x) p(x) \wedge (\exists x) q(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists z)(p(x) \wedge q(z))$
 c. $(\exists x) p(x) \wedge (\forall x) q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall z)(p(x) \wedge q(z))$
 d. $(\exists x) p(x) \wedge (\exists x) q(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists z)(p(x) \wedge q(z))$

Teladan 3.16

Diketahui formula $G : (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$

Berikut interpretasi I untuk G :

Domain D : {1, 2 }

Konstanta a:

a
1

Fungsi f :

F(1)	F(2)
2	1

Predikat P

P(1)	P(2)
0	1

dan Q:

Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)
1	1	0	1

Tentukan nilai kebenaran dari formula G.

Solusi:

Jika $x = 1$, maka

$$\begin{aligned} P(x) \rightarrow Q(f(x),a) &= P(1) \rightarrow Q(f(1),a) \\ &= P(1) \rightarrow Q(2, 1) \\ &= 0 \rightarrow 0 = 1 \end{aligned}$$

Jika $x = 2$, maka

$$\begin{aligned} P(x) \rightarrow Q(f(x),a) &= P(2) \rightarrow Q(f(2),a) \\ &= P(2) \rightarrow Q(1, 1) \\ &= 1 \rightarrow 1 = 1 \end{aligned}$$

Karena $P(x) \rightarrow Q(f(x),a)$ bernilai benar untuk setiap x pada domain D , maka formula $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x),a))$ adalah benar dalam interpretasi I.

Teladan 3.17

Evaluasi nilai kebenaran dari masing-masing formula dibawah ini:

1. $(\exists x) (P(x) \wedge Q(x,f(a)))$
2. $(\exists x) (P(x) \wedge Q(x,a))$
3. $(\forall x) (\exists y) (P(x) \wedge Q(x,y))$

dengan menggunakan interpretasi I yang sama dengan teladan 4.15.

Solusi:

- Formula ke-1

Jika $x = 1$,

$$\begin{aligned}P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)) &= P(f(1)) \wedge Q(1, f(a)) \\ &= P(2) \wedge Q(1, f(1)) \\ &= P(2) \wedge Q(1, 2) \\ &= 1 \wedge 1 = 1\end{aligned}$$

Jika $x = 2$

$$\begin{aligned}P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)) &= P(f(2)) \wedge Q(2, f(1)) \\ &= P(1) \wedge Q(2, 1) \\ &= 0 \wedge 0 = 0\end{aligned}$$

Karena ada elemen dari domain D , yaitu $x = 1$, yang menyebabkan formula $P(f(x)) \wedge Q(x, f(a))$ menjadi benar, maka formula $(\exists x) (P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$ adalah benar dalam interpretasi I .

- Formula ke-2

Jika $x = 1$,

$$\begin{aligned}P(x) \wedge Q(x, a) &= P(1) \wedge Q(1, 1) \\ &= 0 \wedge 1 = 0\end{aligned}$$

Jika $x = 2$

$$\begin{aligned}P(x) \wedge Q(x, a) &= P(2) \wedge Q(2, 1) \\ &= 1 \wedge 0 = 0\end{aligned}$$

Karena ada elemen dari domain D yang membuat formula $P(x) \wedge Q(x,a)$ menjadi benar, maka formula $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x,a))$ adalah salah satu interpretasi I .

▪ Formula ke-3

Jika $x = 1$, maka $P(x) = P(1) = 0$. Oleh karena itu, $P(x) \wedge Q(x,a) = 0$, untuk $y = 1$ dan $y = 2$. Karena ada x , yaitu $x = 1$, dimana $(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y))$ adalah salah, maka formula $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y))$ adalah salah interpretasi I .

Apabila interpretasi telah ditentukan, seluruh konsep pada logika proposisi, bisa dianalogikan pada formula untuk logika kuantor.

Definisi 3.11

Formula G disebut **konsisten** jika dan hanya jika ada interpretasi I yang menyebabkan evaluasi G menjadi 1 (benar). Jika formula G adalah benar dalam interpretasi I , maka I adalah model untuk G dan I memenuhi G .

Definisi 3.12

Formula G adalah **inkonsisten** jika dan hanya jika tidak terdapat interpretasi yang memenuhi G . Atau dengan kata lain, formula G selalu diinterpretasikan salah.

Definisi 3.13

Formula G adalah **valid** jika dan hanya jika setiap interpretasi untuk G memenuhi G .

Dengan ungkapan lain, definisi 3.13 menyatakan formula G adalah valid jika dan hanya jika terdapat interpretasi $I_1, I_2,$

... I_n untuk formula G , dan formula G diinterpretasikan benar oleh seluruh interpretasi I_1, I_2, \dots, I_n .

Definisi 3.14

Formula G adalah **konsekuensi logis** dari formula $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ jika dan hanya jika untuk setiap interpretasi I , interpretasi formula $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n$ benar didalam I , dan G pun benar didalam I .

Karena pada dasarnya logika kuantor adalah perluasan dari logika proposisional, maka apabila formula pada logika kuantor tidak mengandung variabel dan *quantifier*-nya, maka formula tersebut dapat diperlakukan sebagaimana layaknya formula pada logika proposisional.

Teladan 3.18

Buktikan bahwa :

1. $(\forall x)P(x) \wedge (\exists y) \sim P(y)$ adalah inkonsisten
2. $(\forall x)P(x) \wedge (\exists y) P(y)$ adalah valid
3. $P(a) \rightarrow \sim ((\exists y) P(x))$ adalah konsisten
4. $(\forall x)P(x) \vee (\exists y) \sim P(y)$ adalah valid

Solusi:

- Formula ke-1

Asumsikan interpretasi I memenuhi $(\forall x)P(x) \wedge (\exists y)\sim P(y)$, berarti pada I ada $y = e$ yang menyebabkan $\sim P(e)$ adalah benar. Apabila $\sim P(e)$ benar maka $P(e)$ adalah salah. Oleh karena $P(e) \wedge \sim P(e) = 0$, terlihat adanya ke-inkonsistenan

formula, karena itu tidak mungkin ada interpretasi yang memenuhi formula $(\forall x)P(x) \wedge (\exists y) \sim P(y)$.

▪ Formula ke-2

Aasumsikan interpretasi I memenuhi $(\forall x)P(x) \wedge (\exists y) P(y)$, berarti pada I ada $y = e$ yang menyebabkan $P(e)$ adalah benar. Karena e pun dapat dipastikan memenuhi formula $(\forall x)P(x)$, maka formula $(\forall x)P(x) \wedge (\exists y) P(y)$ dapat dipastikan selalu bernilai benar, maka formula ke-2 adalah valid.

▪ Formula ke-3

Asumsikan interpretasi I memenuhi $P(a) \rightarrow \sim((\exists y) P(x))$

- Pada I terdapat $x = e$ dimana $P(e) = 0$, sehingga $\sim P(e) = 1$. Ketika nilai $P(a) = 0$ maupun $P(a) = 1$, formula akan bernilai benar.
- Pada I terdapat $x = f$ dimana $P(f) = 1$, sehingga $\sim P(f) = 0$. Ketika nilai $P(a) = 0$, formula akan bernilai benar, sedangkan apabila $P(a) = 1$, maka formula bernilai salah.

Karena hasil evaluasi formula ada yang bernilai benar, maka formula $P(a) \rightarrow \sim((\exists y) P(x))$ adalah konsisten.

▪ Formula ke-4

Asumsikan interpretasi I memenuhi $(\forall x)P(x) \vee (\exists y)\sim P(y)$. Apapun nilai kebenaran $(\exists y) \sim P(y) \vee (\forall x)P(x)$ karena pasti benar, maka nilai kebenaran formula selalu benar. Oleh karena itu formula $(\forall x)P(x) \vee (\exists y) \sim P(y)$ adalah valid.

D. Bentuk Normal Prenex

Pada logika proposisional, dikenal bentuk normal konjungsi dan bentuk normal disjungsi. Pada logika kuantor pun ada bentuk normal yang disebut 'bentuk normal prenex'. Tujuan dari normalisasi ke bentuk normal prenex adalah untuk memudahkan proses pembuktian yang akan dijelaskan pada sub-bab berikutnya.

Definisi 3.15

Formula F disebut bentuk normal prenex jika dan hanya jika formula tersebut berbentuk:

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_nx_n)(M)$$

Dimana (Q_ix_i) , $i = 1, \dots, n$ masing-masing adalah salah satu dari $\forall x_i$ atau $\exists x_i$ dan M adalah formula yang tidak mengandung *quantifier*. $(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)$ disebut sebagai prefiks, dan M disebut matriks dari formula F.

Berikut beberapa contoh formula dalam bentuk normal prenex.

- $(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \vee Q(y))$
- $(\forall x)(\forall y)(\sim P(x,y) \leftrightarrow Q(y))$
- $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(Q(x,y) \rightarrow R(z))$

Asumsikan F adalah formula yang mengandung variabel bebas x. Untuk menekankan bahwa x adalah variabel bebas dalam F, formula F dinotasikan sebagai $F[x]$.

Asumsikan G adalah formula yang tidak mengandung variabel x, maka $(Qx)F[x] \vee G = (Qx) (F[x] \vee G)$

$$(Qx)F[x] \wedge G = (Qx) (F[x] \wedge G)$$

$$\sim ((\forall x) F[x]) = (\exists x) (\sim F[x])$$

$$\sim ((\exists x) F[x]) = (\forall x) (\sim F[x])$$

Asumsikan F[x] dan H [x] dua formula yang mengandung x, maka:

$$(\forall x) F[x] \wedge (\forall x) H[x] = (\forall x) (F[x] \wedge H[x])$$

$$(\exists x) F[x] \vee (\exists x) H[x] = (\exists x) (F[x] \vee H[x])$$

Akan tetapi, ada hal yang perlu diperhatikan, yaitu :

$$(\forall x) F[x] \vee (\forall x) H[x] \neq (\forall x) (F[x] \vee H[x])$$

$$(\exists x) F[x] \wedge (\exists x) H[x] \neq (\exists x) (F[x] \wedge H[x])$$

Karena variabel terikat yang muncul didalam formula berfungsi tidak lebih dari *place-holder*, maka arti suatu formula tidak berubah meskipun variabel terikat pada formula tersebut diganti seluruhnya oleh variabel lainnya. Misalnya formula $(\forall x)(M(x) \rightarrow H(x))$ yang ekuivalen dengan $(\forall z)(M(z) \rightarrow H(z))$. Oleh sebab itu, 2 formula diatas dapat ditransformasikan menjadi seperti berikut:

$$(\forall x) F[x] \vee (\forall x) H[x] = (\forall x) F[x] \vee (\forall z)H[z]$$

$$\begin{aligned} & \text{(Penggantian seluruh kemunculan} \\ & \text{variabel x dengan z pada } (\forall x) H[x]) \\ & = (\forall x) (\forall z)(F[x] \vee H[z]) \end{aligned}$$

$$(\exists x) F[x] \wedge (\exists x) H[x] = (\exists x) F[x] \wedge (\exists z) H[z]$$

(penggantian seluruh kemunculan variabel x dengan z pada $(\exists x) H[z]$)

$$= (\exists x) (\exists z) (F[x] \wedge H[z])$$

Atau secara umum:

$$(Q_1x)F[x] \vee (Q_2x)H[x] = (Q_1x)(Q_2z) (F[x] \vee H[z])$$

$$(Q_3x)F[x] \wedge (Q_4x)H[x] = (Q_3x)(Q_4z) (F[x] \wedge H[z])$$

Dimana $Q_1, Q_2, Q_3,$ dan Q_4 adalah salah satu dari *quantifier* \forall atau \exists . Sedangkan z tidak terkandung dalam $F[x]$.

Untuk mudahnya, berikut adalah langkah-langkah transformasi ke dalam bentuk normal prenex:

1. Gunakan ekuivalensi:

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$

$$F \rightarrow G \equiv \sim F \vee G$$

Untuk mengeliminasi operator logika \rightarrow dan \leftrightarrow

2. Gunakan secara berulang hukum-hukum:

$$\sim (\sim F) \equiv F$$

$$\sim (F \vee G) \equiv \sim F \wedge \sim G$$

$$\sim (F \wedge G) \equiv \sim F \vee \sim G$$

$$\sim ((\forall x) F[x]) \equiv (\exists x) (\sim F[x])$$

$$\sim ((\exists x) F[x]) \equiv (\forall x) (\sim F[x])$$

untuk memindahkan tanda negasi ke posisi tepat sebelum atom

3. Ganti nama variabel terikat, apabila diperlukan

4. Gunakan hukum:

$$\begin{aligned} (Qx)F[x] \vee G &\equiv (Qx)(F[x] \vee G) \\ (Qx)F[x] \wedge G &\equiv (Qx)(F[x] \wedge G) \\ (\forall x) F[x] \wedge (\forall x) H[x] &\equiv (\forall x) (F[x] \wedge H[x]) \\ (\exists x) F[x] \vee (\exists x) H[x] &\equiv (\exists x) (F[x] \vee H[x]) \\ (Q_{1x})F[x] \vee (Q_{2x})H[x] &\equiv (Q_{1x})(Q_{2z}) (F[x] \vee \\ &H[z]) \\ (Q_{3x})F[x] \wedge (Q_{4x})H[x] &\equiv (Q_{3x})(Q_{4z}) (F[x] \wedge \\ &H[z]) \end{aligned}$$

Teladan 3.19

Transformasikan formula $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x) Q(x)$ ke dalam bentuk normal prenex.

$$\begin{aligned} (\forall x) P(x) \rightarrow (\exists x) Q(x) &\equiv \sim (\forall x) P(x) \vee (\exists x) Q(x) \\ &\equiv (\exists x) (\sim P(x)) \vee (\exists x) Q(x) \\ &\equiv (\exists x) (\sim P(x) \vee Q(x)) \end{aligned}$$

Teladan 3.20

Transformasikan formula:

$(\forall x) (\forall y)((\exists z) (P(x,z) \wedge P(y,z))) \rightarrow (\exists u) Q(x, y, u)$ ke dalam bentuk normal prenex.

Solusi:

$$\begin{aligned} & (\forall x) (\forall y) ((\exists z) (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow (\exists u) Q(x, y, u)) \\ & \equiv (\forall x) (\forall y) (\sim ((\exists z) (P(x,z) \wedge P(y,z))) \vee (\exists u) Q(x, y, u)) \\ & \equiv (\forall x) (\forall y) ((\forall z) (\sim P(x,z) \vee \sim P(y,z)) \vee (\exists u) Q(x, y, u)) \\ & \equiv (\forall x) (\forall y) (\forall z) (\exists u) (\sim P(x,z) \vee \sim P(y,z)) \vee Q(x, y, u) \end{aligned}$$

E. Pembuktian Logika Kuantor

Pada dasarnya metode pembuktian yang digunakan sama dengan metode pada logika proposisional, yaitu pembuktian langsung atau pembuktian tidak langsung. Sedangkan teknis pelaksanaan pembuktian untuk memudahkan, digunakan aturan inferensi.

Teladan 3.21

Setiap manusia pasti mati. Fulan adalah manusia. Karenanya Fulan pasti mati. Buktikan bahwa kesimpulan adalah benar.

Solusi:

Bila dideklarasikan predikat berikut :

$MAN(x)$: x adalah manusia

$MORTAL(x)$: x pasti mati

Maka pernyataan pada soal akan menjadi :

P_1 : $(\forall x) (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$

P_2 : $MAN(Fulan)$

Untuk membuktikan bahwa kesimpulan ‘Fulan pasti mati’, selanjutnya akan dibuktikan bahwa *MORTAL (Fulan)* adalah konsekuensi logis dari P_1 dan P_2 . Dari cara pembuktian langsung: $P_1 \wedge P_2$.

$$(\forall x) (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \wedge MAN(Fulan)$$

karena

$$MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)$$

Bernilai benar untuk semua nilai x , maka formula

$$MAN(Fulan) \rightarrow MORTAL(Fulan)$$

Atau

$$\neg MAN(Fulan) \vee MORTAL(Fulan)$$

adalah benar. Dari premis P_2 , diketahui *MAN (Fulan)* adalah benar, maka $\neg MAN(Fulan)$ adalah salah. Ini berakibat dapat disimpulkan bahwa *MORTAL (Fulan)* bernilai benar, atau ‘Fulan pasti mati’. Atau apabila digunakan aturan inferensi yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, maka:

Langkah	Alasan
1. $(\forall x) (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$	Premis P_1
2. <i>MAN (Fulan)</i>	Premis P_2
3. $MAN(Fulan) \rightarrow MORTAL(Fulan)$	$P_1 \leftarrow Fulan$
4. <i>MORTAL (Fulan)</i>	langkah 2.3

Teladan 3.22

Tunjukkan bahwa formula:

$$(\exists x) (D(x) \wedge \sim U(x))$$

adalah kesimpulan dari formula:

$$(\forall x)(U(x) \rightarrow \sim B(x))$$

$$(\exists x) (B(x) \wedge D(x))$$

Solusi:

Jika premis dianggap benar, atau diinterpretasikan benar, maka ada interpretasi I yang menyebabkan interpretasi premis tersebut menjadi benar.

Langkah	Alasan
1. $(\forall x)(\sim U(x) \vee \sim B(x))$	premis P_1
2. $(\exists x) (B(x) \wedge D(x))$	premis P_2

Pada interpretasi I terdapat $x = e$ yang memenuhi P_1 dan P_2 , maka:

$$3. \quad \therefore \sim U(e) \vee \sim B(e) \quad P_1 \leftarrow e$$

Karena $x = e$ pun pasti memenuhi P_2 , maka :

4. $\therefore B(e) \wedge D(e)$	$P_2 \leftarrow e$
5. $\therefore B(e)$	langkah 4
6. $\therefore D(e)$	langkah 4
7. $\therefore \sim U(e)$	langkah 3
8. $\therefore \sim U(e) \wedge D(e)$	langkah 7.6

9. $\therefore (\exists x)(D(x) \wedge \sim U(x))$ langkah 8

Teladan 3.23

Ada pasien yang menyukai semua dokter. Semua pasien tidak menyukai tukang obat. Maka disimpulkan bahwa semua dokter pasti bukan tukang obat. Buktikan kebenaran dari kesimpulan.

Solusi:

Apabila dideklarasikan :

- $P(x)$: x adalah pasien
 $D(x)$: x adalah dokter
 $O(x)$: x adalah tukang obat
 $S(x, y)$: x suka y

Maka premis-premis dan kesimpulan pada soal dapat dituliskan sebagai berikut :

- P_1 : $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow S(x,y)))$
 P_2 : $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(O(y) \rightarrow \sim S(x,y)))$
 C : $(\forall x)(D(x) \rightarrow \sim O(x))$ (Benarkah ?)

Pada interpretasi I terdapat $x = e$ yang memenuhi P_1 dan P_2 . Maka :

	Langkah	Alasan
1	$\therefore P(e) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow S(e, y))$	$P_1 \leftarrow e$
2	$\therefore P(e)$	langkah 1

$$3 \quad \therefore (\forall y)(D(y) \rightarrow S(e, y)) \quad \text{langkah 1, 2}$$

Karena e pasti memenuhi P_2 , maka :

Langkah	Alasan
4 $\therefore P(e) \rightarrow (\forall y)(O(y) \rightarrow \sim S(e, y))$	$P_2 \leftarrow e$
5 $\therefore (\forall y)(O(y) \rightarrow \sim S(e, y))$	langkah 2.4
6 $\therefore (\forall y)(S(e, y) \rightarrow \sim O(y))$	kontraposisif 5
7 $\therefore (\forall y)(D(y) \rightarrow \sim O(y))$	langkah 3.6
8 $\therefore (\forall x)(D(e, y) \rightarrow \sim O(x))$	langkah 7

Pada langkah ke 8 hanya dilakukan penggantian nama variabel dari formula langkah 7, yang sejatinya identik. Berdasarkan hasil analisis di atas, kesimpulan ‘semua dokter pasti bukan tukang obat’ adalah benar.

Teladan 3.24

Tunjukkan bahwa formula :

$$(\forall x)(F(x) \rightarrow \sim S(x))$$

adalah kesimpulan dari formula :

$$(\exists x)(F(x) \wedge S(x)) \rightarrow (\forall y)(M(y) \rightarrow W(y))$$

$$(\exists y)(M(y) \wedge \sim W(y))$$

Solusi:

Langkah	Alasan
1. $(\exists x)(F(x) \wedge S(x)) \rightarrow (\forall y)(M(y) \rightarrow W(y))$	premis P_1
2. $(\exists y)(M(y) \wedge \sim W(y))$	premis P_2

Pada interpretasi I terdapat $y = e$ yang memenuhi P_1 dan P_2 , maka:

- | | |
|---|---------------------|
| 3. $M(e) \wedge \sim W(y)$ | $P_2 \leftarrow e$ |
| 4. $\sim (M(e) \rightarrow W(e))$ | langkah 3 |
| 5. $(\exists y)(\sim M(y) \rightarrow W(y))$ | langkah 4 |
| 6. $\sim (\forall y)(M(y) \rightarrow W(y))$ | langkah 5 |
| 7. $\sim (\forall y)(M(y) \rightarrow W(y)) \rightarrow \sim (\exists x)(F(x) \wedge S(x))$ | kontraposisif P_1 |
| 8. $\sim (\exists y)(F(x) \wedge S(x))$ | langkah 6.7 |
| 9. $(\forall x) \sim (F(x) \wedge S(x))$ | langkah 8 |
| 10. $(\forall x) (F(x) \rightarrow \sim S(x))$ | langkah 9 |

Teori Himpunan dan Logika Kuantor

Pada teladan 3.21 telah dibahas permasalahan:

Setiap manusia pasti mati. Fulan adalah manusia.

Karenanya Fulan pasti mati.

Dimana didefinisikan bahwa:

$MAN(x)$: x adalah manusia

$MORTAL(x)$: x pasti mati

Sehingga premis pada soal akan menjadi :

$(\forall x) (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$

$MAN(Fulan)$

Jika dianalisis lagi premis $(\forall x) (MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ dengan lebih hati-hati lagi, akan diketahui bahwa formula di atas adalah bentuk lain dari representasi 2 himpunan, yaitu himpunan *MORTAL* dan himpunan *MAN* dimana $MAN \subseteq MORTAL$. x adalah elemen dari *MORTAL* jika dan hanya jika *MORTAL* (x) adalah benar, begitu pula $y \in MAN$ jika dan hanya jika *MORTAL* (x) adalah benar. Berdasarkan premis diketahui bahwa *MAN* (*Fulan*) adalah benar, oleh karenanya *Fulan* adalah elemen dari *MAN*. Bentuk representasi lain dari formula premis adalah:

$$MAN \subseteq MORTAL \text{ dan } Fulan \in MAN$$

Yang menjadi pertanyaan adalah mengapa $MAN \subseteq MORTAL$? Alasannya adalah, $MAN(x)$ adalah syarat cukup untuk $MORTAL(x)$, sehingga setiap $x \in MAN$ pasti $x \in MORTAL$. akan tetapi setiap $x \in MORTAL$ belum tentu $x \in MAN$.

Berdasarkan teori himpunan, dapat diketahui bahwa:

$$Fulan \in MORTAL$$

Sehingga bisa disimpulkan bahwa *Fulan* pasti mati.

Apabila permasalahan di atas diungkapkan dengan diagram Venn, maka akan terlihat sebagai berikut:



Pembahasan barusan mengilustrasikan eratnya hubungan antara teori himpunan dengan logika kuantor. Selanjutnya akan dibahas keterkaitan antara keduanya lebih rinci lagi.

Pada bab I mengenai teori himpunan telah dijelaskan bahwa dalam pembentukan suatu himpunan, biasanya dimulai dari suatu himpunan yang mencakup seluruh elemen dari topik pembicaraan sebagai himpunan semesta U . Kemudian dengan menseleksi elemen dari himpunan semesta tersebut berdasarkan kriteria tertentu, selanjutnya akan didapatkan himpunan yang maksud.

Himpunan semesta U pada teori himpunan adalah sama dengan domain of discourse atau domain D pada logika kuantor. Sedangkan kriteria yang digunakan pada pembentukan himpunan bagian dari U adalah predikat pada logika kuantor. Dengan kata lain, predikat adalah yang menyatakan spesifikasi elemen dari suatu himpunan.

Definisi 3.16

Himpunan bagian yang dibentuk berdasarkan spesifikasi dari predikat disebut ekstensi. Jika $P(x)$ adalah predikat, maka ekstensi A dari $P(x)$ adalah :

$$A = \{x : P(x)\}$$

Predikat dapat dianggap sebagai kondisi, jika ada objek pada himpunan semesta yang memenuhi kondisi, maka objek tersebut menjadi elemen dari ekstensi predikat tersebut. Jika ada dua predikat yang ekuivalen, maka keduanya memiliki ekstensi yang sama. Apabila ada dua himpunan yang dibentuk

berdasarkan dua predikat yang ekuivalen, maka kedua himpunan tersebut sama. Atau dengan ungkapan lain, $A = B$ jika dan hanya jika $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, dimana A adalah ekstensi dari $P(x)$ dan B adalah ekstensi dari $Q(x)$. Cara yang sama dapat dianalogikan pada inklusi dan implikasi. $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $P(x) \Rightarrow Q(x)$, dan lagi-lagi A dan B masing-masing adalah ekstensi dari $P(x)$ dan $Q(x)$.

Jika $P(x)$ benar untuk setiap $x \in D$, maka ekstensi dari $P(x)$ adalah domain dari $P(x)$ itu sendiri. Begitu pula jika $P(x)$ adalah salah untuk setiap $x \in D$, maka ekstensi dari $P(x)$ adalah himpunan kosong.

Pada himpunan semesta U , jika diketahui A dan B adalah ekstensi dari predikat $P(x)$ dan $Q(x)$, maka dengan mudah diketahui pula bahwa himpunan $A \cup B$ adalah ekstensi dari $P(x) \vee Q(x)$, dan $A \cap B$ adalah ekstensi dari $P(x) \wedge Q(x)$. Demikian pula A^c adalah ekstensi dari formula $\sim P(x)$. Dua buah ekstensi A dan B adalah dua himpunan yang identik jika dan hanya jika predikat dari kedua himpunan tersebut ekuivalen ($A = B$ jika dan hanya jika $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$).

Dari penjelasan di atas didapat mengetahui bahwa ekstensi dari formula $P(x) \vee \sim P(x)$ adalah himpunan semesta dan ekstensi dari $P(x) \vee \sim P(x)$ adalah himpunan kosong.

Teladan 3.25

Diketahui formula

$$(\forall x) \sim(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\forall x) (\sim P(x) \wedge \sim Q(x))$$

Jika P dan Q menotasikan ekstensi dari $P(x)$ dan $Q(x)$, maka formula di atas dapat pula representasi notasi himpunan : $(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$

Dan bila dibuktikan kesamaan dua formula himpunan dengan tabel keangotaan himpunan:

P	Q	$P \cup Q$	$(P \cup Q)^c$	P^c	Q^c	$P^c \cap Q^c$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Terlihat isi kolom 4 dan kolom 7 adalah sama, maka himpunan $(P \cup Q)^c$ dan $P^c \cap Q^c$ adalah identik.

Berikut beberapa contoh aplikasi teori himpunan pada logika kuantor.

Teladan 3.26

Saya menanam semua pohon mahal saya tahun lalu. Semua pohon buah saya ada di kebun. Tidak ada pohon di kebun yang ditanam tahun lalu.

Tentukan kebenaran dari pernyataan berikut:

1. Semua pohon buah ditanam tahun lalu
2. Tidak ada pohon mahal di kebun
3. Tidak ada pohon buah yang mahal

Solusi:

Didefinisikan bahwa:

$A(x)$: x adalah pohon mahal

$B(x)$: x ditanam tahun lalu

$C(x)$: x adalah pohon buah

$D(x)$: x ada di kebun

Maka, premis

- Saya menanam semua pohon mahal saya tahun lalu menjadi : $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$
- Semua pohon buah saya ada dikebun menjadi : $(\forall x)(C(x) \rightarrow D(x))$
- Tidak ada pohon dikebun yang ditanam tahun lalu menjadi : $(\forall x)(B(x) \rightarrow \sim D(x))$

Berikut adalah pembuktian dengan aturan inferensi

- Formula untuk pernyataan ‘Semua pohon buah ditanam tahun lalu’ adalah $(\forall x)(C(x) \rightarrow B(x))$

Langkah	Alasan
1. $(\forall x)(C(x) \rightarrow D(x))$	premis
2. $(\forall x)(B(x) \rightarrow \sim D(x))$	premis
3. $\therefore (\forall x)(D(x) \rightarrow \sim B(x))$	kontrapositif 2
4. $\therefore (\forall x)(C(x) \rightarrow \sim B(x))$	langkah 1 dan 3

Dimana $(\forall x)(C(x) \rightarrow \sim B(x))$ berarti ‘semua pohon buah tidak ditanam tahun lalu’. Oleh karenanya pernyataan ‘semua pohon buah ditanam tahun lalu’ adalah salah.

- Formula untuk pernyataan ‘tidak ada pohon mahal di kebun’ alias ‘semua pohon mahal tidak ada di kebun’ adalah $(\forall x)(A(x) \rightarrow \sim D(x))$

Langkah	Alasan
1. $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$	premis
2. $(\forall x)(B(x) \rightarrow \sim D(x))$	premis
3. $\therefore (\forall x)(A(x) \rightarrow \sim D(x))$	langkah 1.2

Dari hasil komputasi, disimpulkan pernyataan ‘Tidak ada pohon mahal di kebun’ adalah benar.

- Formula untuk pernyataan ‘Tidak ada pohon buah yang mahal’ adalah: $(\forall x)(C(x) \rightarrow \sim A(x))$

Langkah	Alasan
1. $(\forall x)(C(x) \rightarrow D(x))$	premis
2. $(\forall x)(B(x) \rightarrow \sim D(x))$	premis
3. $\therefore (\forall x)(D(x) \rightarrow \sim B(x))$	kontrapositif 2
4. $\therefore (\forall x)(C(x) \rightarrow \sim B(x))$	langkah 1.3
5. $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$	premis
6. $\therefore (\forall x)(\sim B(x) \rightarrow \sim A(x))$	kontrapositif 5
7. $\therefore (\forall x)(C(x) \rightarrow \sim A(x))$	langkah 4.6

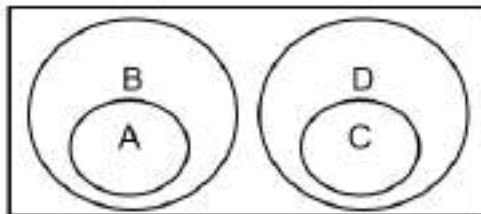
Karenanya, pernyataan ‘tidak ada pohon buah yang mahal’ adalah benar. Sebagai solusi alternatif, marilah dicari pecahkan permasalahan disini dengan menggunakan teori himpunan. Pertama didefinisikan dahulu ekstensi yang akan digunakan, yaitu:

- Himpunan A adalah ekstensi dari predikat $A(x)$
- Himpunan B adalah ekstensi dari predikat $B(x)$
- Himpunan C adalah ekstensi dari predikat $C(x)$
- Himpunan D adalah ekstensi dari predikat $D(x)$

Kemudian representasikan premis-premis dengan formula himpunan.

- Premis $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$ menjadi $A \subseteq B$
- Premis $(\forall x)(C(x) \rightarrow D(x))$ menjadi $C \subseteq D$
- Premis $(\forall x)(B(x) \rightarrow \sim D(x))$ menjadi $B \subseteq \bar{D}$

Dari formula-formula himpunan di atas, didapat menggambarkan diagram Venn sebagai berikut:



Dimana elemen dari himpunan A adalah ‘pohon mahal’, elemen dari himpunan B adalah ‘tanaman yang ditanam tahun lalu’, elemen dari himpunan C adalah ‘ppohon buah

dan elemen dari himunan D adalah ‘tanaman yang ada di kebun’. Berdasarkan diagram Venn, sehingga didapat pula membuat kesimpulan bahwa:

- Karena $C \not\subseteq B$ maka pernyataan ‘semua pohon buah ditanam tahun lalu’ adalah salah.
- Karena $A \subseteq D^c$ maka pernyataan ‘tidak ada pohon mahal di kebun’ adalah benar.
- Karena $C \subseteq A^c$ maka pernyataan ‘tidak ada pohon buah yang mahal’ adalah benar.

Teladan 3.27

Semua ahli matematika adalah orang menarik. Hanya orang-orang yang tidak menarik yang menjadi agen asuransi. Setiap orang jenius adalah ahli matematika. Tunjukkan kebenaran pernyataan berikut :

1. Agen asuransi bukan ahli matematika
2. Semua orang jenius adalah orang yang menarik
3. Beberapa orang jenius adalah agen asuransi

Solusi:

Apabila didefinisikan bahwa:

$A(x)$: x adalah ahli matematika

$B(x)$: x adalah orang menarik

$C(x)$: x adalah agen asuransi

$D(x)$: x adalah jenius

Maka:

‘semua ahli matematika adalah orang menarik’ adalah $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$. ‘Hanya orang-orang yang tidak menarik yang menjadi agen asuransi’ alias ‘orang-orang menarik bukan agen asuransi’ adalah $(\forall x)(B(x) \rightarrow \sim C(x))$. Setiap orang jenius adalah ahli matematika’ adalah $(\forall x)(D(x) \rightarrow A(x))$.

Berikut pembuktian benar atau salah dari pernyataan-pernyataan di atas dengan menggunakan aturan inferensi.

- ‘Agen asuransi bukan ahli matematika’ atau $(\forall x)(C(x) \rightarrow \sim A(x))$

Langkah	Alasan
1. $(\forall x)(B(x) \rightarrow \sim C(x))$	premis
2. $\therefore (\forall x)(C(x) \rightarrow \sim B(x))$	kontrapositif 1
3. $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$	premis
4. $\therefore (\forall x)(\sim B(x) \rightarrow \sim A(x))$	kontrapositif 3
5. $\therefore (\forall x)(C(x) \rightarrow \sim A(x))$	langkah 2.4

Dari hasil kalkulasi, pernyataan ‘agen asuransi bukan ahli matematika’ adalah benar.

- ‘Semua orang jenius adalah orang yang menarik’ atau $(\forall x)(D(x) \rightarrow B(x))$

Langkah	Alasan
1. $\therefore (\forall x)(D(x) \rightarrow A(x))$	premis
2. $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$	premis

3. $\therefore (\forall x)(D(x) \rightarrow B(x))$ langkah 1.2

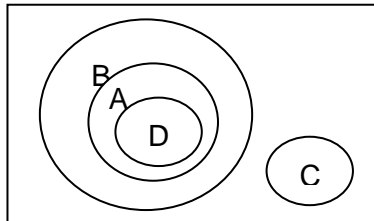
Oleh karenanya, pernyataan ‘semua orang jenius adalah orang yang menarik’ adalah benar.

- ‘Beberapa orang jenius adalah agen asuransi’ atau $(\exists x)(D(x) \rightarrow C(x))$

Langkah	Alasan
1. $(\forall x)(D(x) \rightarrow A(x))$	premis
2. $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$	premis
3. $\therefore (\forall x)(D(x) \rightarrow B(x))$	langkah 1.2
4. $(\forall x)(B(x) \rightarrow \sim C(x))$	premis
5. $\therefore (\forall x)(D(x) \rightarrow \sim C(x))$	langkah 3.4

Formula $(\forall x)(D(x) \rightarrow \sim C(x))$ melambangkan pernyataan ‘semua orang jenius bukan agen asuransi’ atau ‘tidak ada orang jenius yang menjadi agen asuransi’. Oleh karenanya pernyataan ‘beberapa orang jenius adalah agen asuransi’ adalah salah.

Bila digunakan teori himpunan sebagai solusi alternatif, selanjutnya konversikan premis-premis yang ada menjadi formula himpunan sehingga diperoleh diagram Venn sebagai berikut:



Dimana,

A : himp. Ahli matematika

B : himp. Orang menarik

C : himp. Agen asuransi

D : himp. Orang jenius

Berikut pembuktiannya:

- 'Agen asuransi bukan ahli matematika' atau $(\forall x)(C(x) \rightarrow \sim A(x))$, notasi himpunannya adalah: $C \subseteq A^c$ dari diagram Venn ditahui pernyataan ini benar
- 'Semua orang jenius adlah orang yang menarik' atau $(\forall x)(D(x) \rightarrow B(x))$, notasi himpunannya adalah: $D \subseteq B$ dari diagram Venn diperoleh pernyataan ini benar
- 'Beberapa orang jenius adalah agen asuransi' atau $(\exists x)(D(x) \rightarrow C(x))$. Karena D bukan himpunan bagian dari C maka pernyataan ini adalah salah.

F. Soal – Soal Latihan

- Ubahlah pernyataan-pernyataan berikut kedalam notasi matematika!
 - Semua kucing suka ikan
 - Ada orang yang suka buah durian
 - Tidak semua orang suka musik dangdut
 - Ada mahasiswa yang tidak menyukai semua dosen
 - Semua murid tidak suka mengerjakan tugas
 - Tidak ada rumah yang terbuat dari tepung.
- Perhatikan interpretasi berikut:

Domain D : {1, b}

Predikat :

P(a,a)	P(a,b)	P(b,a)	P(b,b)
1	0	0	1

- $(\forall x) (\exists y) P(x,y)$
- $(\forall x) (\forall y) P(x,y)$
- $(\exists x) (\forall y) P(x,y)$
- $(\exists x) \neg P(a,y)$
- $(\forall x) (\forall y) (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$
- $(\forall x) P(x,x)$

3. Perhatikan interpretasi berikut:

Domain D : {1, 2}

Nilai konstanta a, b:

A	B
1	2

Nilai fungsi f :

f(1)	f(2)
2	1

Predikat P :

P(1,1)	P(1,2)	P(2,1)	P(2,2)
1	1	0	0

Evaluasi nilai kebenaran dari formula-formula berikut berdasarkan interpretasi di atas.

(a) $P(a, f(a)) \wedge P(b, f(b))$

(b) $(\forall x) (\exists y) P(y, x)$

(c) $(\forall x) (\forall y) (P(x, y) \rightarrow P(f(x), f(y)))$

4. Ubahlah formula-formula berikut kedalam bentuk normal prenex!

(a) $(\forall x) P(x) \rightarrow (\exists y) Q(x, y)$

$$(b) (\exists x) (\neg((\exists y) P(x,y)) \rightarrow ((\exists z)Q(z) \rightarrow R(x)))$$

$$(c) (\forall x) (\forall y)((\exists z) P(x,y,z) \wedge ((\exists u)q(x,u) \rightarrow (\exists v) Q(y,v)))$$

5. Diketahui premis-premis berikut:

$$P_1 : (\forall y)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$P_2 : \neg Q(a)$$

Buktikan bahwa $\neg P(a)$ adalah konsekuensi logis dari 2 premis di atas.

6. Perhatikan premis-premis berikut:

(a) Setiap atlet adalah kuat

(b) Setiap orang yang kuat dan cerdas akan sukses dalam karirnya

(c) Ade adalah seorang atlet

(d) Ade adalah seorang yang cerdas

Tentukan kebenaran bahwa Ade akan sukses dalam karirnya!

7. Perhatikan premis-premis berikut:

P_1 : Semua mahasiswa adalah pemalas

P_2 : Tidak seorangpun orang kaya adalah mahasiswa

Tentukan kebenaran dari kesimpulan 'orang pemalas tidak kaya'

8. Perhatikan premis-premis berikut:

P_1 : Tidak ada mobil keluarga yang mahal

P_2 : Mobil dengan *sunroof* pasti mahal

P_3 : Semua mobil wagon adalah mobil keluarga

Tentukan kebenaran dari setiap kesimpulan berikut :

- (a) Tidak ada mobil keluarga yang ber-*sunroof*
- (b) Sebagian dari mobil dengan *sunroof* pasti mahal
- (c) Tidak ada mobil wagon yang ber-*sunroof*
- (d) Semua mobil keluarga adalah wagon
- (e) Mobil ber-*sunroof* pasti bukan mobil keluarga

9. Perhatikan premis-premis berikut:

P_1 : Semua penyair adalah miskin

P_2 : Syarat untuk menjadi guru adalah sarjana

P_3 : Tidak ada sarjana yang miskin

Tentukan kebenaran dari setiap kesimpulan berikut :

- (a) Guru tidak miskin
- (b) Pengajar pasti bukan penyair
- (c) Sarjana bukan penyair

10. Simaklah argumen berikut:

Semua mahasiswa JTK tidak menyukai kuliah yang sulit.
Akan ada sebagian mahasiswa menyukai semua matakuliah. Oleh karena itu semua mata kuliah di JTK tidak ada yang sulit

Validkah argumen di atas? Jika ya, tunjukkan kebenaran dari argumen di atas, apabila tidak tunjukkan dimana letak kesalahannya.

11. Simaklah pula argumen berikut:

Semua orang yang tidak dapat berpikir logis adalah orang bermasalah. Tak seorangpun orang bermasalah dapat melatih harimau. Karena bayi tidak dapat berpikir logis, maka dapat disimpulkan bahwa bayi tidak dapat melatih harimau.

Validkah argumen di atas? Jika ya, tunjukkan kebenaran dari argumen di atas, apabila tidak tunjukkan dimana letak kesalahannya.

BAB IV

KONSEP HIMPUNAN

Pada bab ini membahas mengenai himpunan dan operasinya, relasi dan sifat-sifatnya, dan fungsi dan jenis-jenisnya. Ketiga topik ini merupakan prasyarat dalam mempelajari logika matematika.

A. Himpunan

Terkadangan dalam realita kehidupan kita dihadapkan pada banyak data, benda, ataupun objek yang perlu kita olah, identifikasi, digolongkan, dan lain sebagainya. Untuk memudahkan pengolahan, biasanya benda-benda atau objek itu kita golongkan berdasarkan kreteria, sifat, bentuk, ciri-ciri, dan seterusnya. Hasil dari penggolongan di atas akan didapatkan kumpulan dari sejumlah objek atau yang kita kenal dengan sebutan himpunan.

Definisi 4.1

Himpunan adalah kumpulan objek yang dapat dicirikan secara jelas.

Definisi 4.1a

Himpunan adalah kumpulan objek yang dapat dicirikan secara jelas dalam sembarang urutan.

Definisi 4.1b

Himpunan merupakan kumpulan objek-objek yang berbeda.

Definisi 4.1c

Himpunan adalah kumpulan dari objek-objek tertentu yang tercakup dalam satu kesatuan dengan keterangannya yang jelas.

Dalam buku ini himpunan dinotasikan dengan huruf besar/KAPITAL seperti A, B, C, dan seterusnya. Sedangkan anggota atau elemen dari himpunan dinotasikan dengan huruf kecil, seperti a, b, c, dan seterusnya

Penulisan himpunan juga bisa dengan simbol kurung kurawal buka dan kurawal tutup seperti berikut.

Kurung kurawal '{' dan diakhiri dengan '}'

Jika p adalah anggota himpunan A , ditulis $p \in A$. Sebaliknya jika p adalah bukan anggota himpunan A , maka ditulis $p \notin A$

Penyajian Himpunan

Terdapat 4 cara untuk menyatakan suatu himpunan, yaitu (1) Enumerasi, (2) Simbol Baku, (3) Notasi pembentuk atau simbol syarat, dan (4) Diagram Venn.

a. Enumerasi

Mengenumerasi artinya menulis semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah tanda kurung kurawal. Biasanya himpunan diberi nama dengan menggunakan huruf kapital maupun dengan menggunakan simbol-simbol lainnya

Teladan 4.1

1. Himpunan A berisi empat bilangan asli.

Dapat ditulis sebagai berikut $A = \{1,2,3,4\}$

2. Himpunan B berisi lima bilangan genap positif pertama.

Dapat ditulis sebagai berikut $B = \{2,4,6,8,10\}$

3. Himpunan C berisi 100 buah bilangan asli pertama.

Dapat ditulis sebagai berikut $C = \{1, 2, \dots, 100\}$

4. Himpunan P adalah bilangan Prima

Dapat ditulis $P = \{2, 3, 5, \dots\}$

Teladan 4.2

$2 \in A$: 2 merupakan bilangan asli

$3 \in P$: 3 merupakan anggota himpunan bilangan Prima

$3 \notin B$: -3 merupakan bilangan ganjil

b. Simbol Baku

Beberapa simbol baku yang biasa digunakan untuk mendefinisikan himpunan antara lain:

P = himpunan bilangan prima.

N = himpunan bilangan alami (natural).

Z = himpunan bilangan bulat

Z^+ : himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, 4, ... }

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

U = himpunan semesta

Teladan 4.3

$P : = \{ 2, 3, 5, 7, \dots \}$

$N : = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

$Z : = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$

$Q : = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$

$Z^+ = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$

R : Himpunan bilangan real

$C = \{ (a + bi) \mid a, b \in R, i = \sqrt{-1} \}$

c. Notasi Pembentuk atau simbol syarat

Himpunan dinyatakan dengan menulis syarat yang harus dipenuhi anggotanya.

Notasinya $\{x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x\}$

Aturan dalam penulisan syarat keanggotaan:

- Bagian di kiri tanda ‘|’ melambangkan elemen himpunan
- Tanda ‘|’ dibaca *dimana* atau *sedemikian sehingga*
- Bagian di kanan tanda ‘|’ menunjukkan syarat keanggotaan himpunan
- Setiap tanda ‘,’ di dalam syarat keanggotaan dibaca *dan*

Teladan 4.4

A adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 5.

Dinyatakan sebagai:

$A = \{x \mid x \text{ adalah himpunan bilangan bulat positif lebih kecil dari } 5\}$

Notasi matematikanya:

$A = \{x \mid x \in P, x < 5\}$ atau ekivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Teladan 4.5

B adalah himpunan bilangan prima kurang dari 16.

Dinyatakan sebagai:

$B = \{x \mid x \text{ adalah himpunan bilangan prima kurang dari } 16\}$

Notasi Matematikanya:

$B = \{x \mid x \in P, 2 \leq x < 16\}$

Teladan 4.6

$$C = \{x : x \text{ bilangan prima genap}\}$$

$$D = \{n : n \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$E = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

Teladan 2.7

Asumsikan himpunan semesta adalah \mathbb{N}

$$\text{Jika } A = \{2, 3, 4, 5\},$$

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ dan } 1 < x < 6\}$$

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ dan } 2 \leq x \leq 5\}.$$

d. Diagram venn

Diagram Venn menyajikan himpunan secara grafis. Didalam diagram Venn, himpunan semesta (U) digambarkan sebagai suatu segi empat sedangkan himpunan lainnya digambarkan sebagai lingkaran di dalam segi empat tersebut.

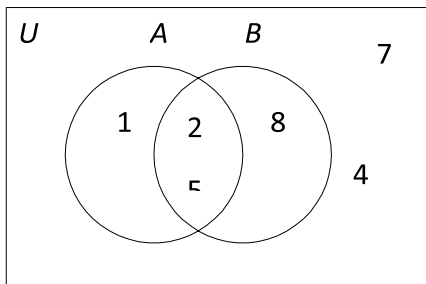
Teladan 4.8

$$\text{Misalkan } U = \{1, 2, \dots, 7, 8\},$$

$$A = \{1, 2, 3, 5\} \text{ dan}$$

$$B = \{2, 5, 6, 8\}.$$

Diagram Venn:



Himpunan Bagian

Suatu himpunan bisa saja menjadi bagian dari himpunan lainnya, relasi antar himpunan tersebut didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 4.5

Jika terdapat himpunan A dan B.

A dikatakan himpunan bagian (subset) dari B, jika setiap elemen A merupakan elemen B, dinotasikan dengan $A \subseteq B$.

Secara simbolik dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A \subseteq B = \{x | x \in A \text{ maka } x \in B\}$$

Himpunan A disebut proper subset dari B (dinotasikan $A \subset B$), apabila $A \subset B$ dan $A \neq B$.

Apabila terdapat dua buah himpunan dan kita membandingkan dua himpunan tersebut, maka diperlukan definisi yang menyatakan kedua himpunan tersebut sama atau tidak.

Definisi 4.6

Dua himpunan A dan B adalah identik atau sama (equal) jika dan hanya jika elemen dari kedua himpunan tersebut adalah sama.

Kesamaan himpunan A dan B dinotasikan dengan $A = B$ atau dengan kata lain $A = B$ jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Teladan 4.9

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{3, 1, 2\}$$

$$C = \{2, 2, 1, 3\}$$

$$D = \{1, 2, 1, 3, 2, 1\}.$$

Ini menunjukkan bahwa himpunan $A = B = C = D$

Meskipun penulisan elemen berbeda namun keanggotaanya sama. Perlu diketahui bahwa keanggotaan penulisan keanggotaan himpunan secara berulang diabaikan dan tidak ada manfaatnya.

Definisi 4.7

Himpunan kosong (empty set) yang dilambangkan dengan simbol \emptyset atau $\{ \}$ adalah himpunan yang tidak memiliki elemen atau anggota.

Teladan 4.10

$$E = \{n \in \mathbb{Z} \mid 2 < n < 3\}, \text{ maka } E = \emptyset$$

sebab tidak ada bilangan bulat antara 2 dan 3.

$F = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 0\}$, maka $F = \emptyset$,

sebab tidak ada hasil kuadrat bilangan asli yang negatif.

Teladan 4.11

Tuliskan seluruh subset dari $A = \{2,3,4\}$

Solusi:

Misalkan $D \subseteq A$, maka $D = \{x : x \in A\}$

Jadi kemungkinan himpunan $D = \{ \}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}$

Teladan 4.12

Berapa jumlah subset dari $S = \{1,2,3,4\}$?

Solusi:

Ketika mencari jumlah seluruh subset dari S yang anggotanya terdiri dari 4 elemen, maka hal penting yang kita perhatikan adalah peristiwa apakah $s \in S$ tersebut muncul atau tidak. Oleh karenanya untuk setiap $s \in S$ memiliki dua (2) kemungkinan.

Jadi karena S memiliki 4 elemen maka akan didapat: $2 \times 2 \times 2 \times 2$ buah kemungkinan kemunculan s pada subset, atau dengan kata lain jumlah subset dari S adalah $2^4 = 16$.

Teladan 4.13

Tuliskan seluruh proper subset dari $T = \{a,b,c\}$?

Solusi:

$T = \{a,b,c\}$, maka $S \subset T$ maka $S = \{x : x \in T\}$ dan $S \neq T$

Adalah $\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$.

Atau dengan rumus $(2^3 - 1) = 8 - 1 = 7$

Definisi 4.8

Himpunan Kuasa (power Set) dari A adalah himpunan semua subset A dan dinotasikan dengan $P(A)$.

Teladan 4.14

Misalkan $A = \{0,1\}$ maka $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

Selain memperhatikan apa yang menjadi elemen suatu himpunan, kita pun perlu mengetahui berapa banyak elemen dari suatu himpunan, yang juga merupakan ukuran besar dari suatu himpunan.

Himpunan Kuasa

Definisi 4.9

Jika S memiliki n buah elemen yang berbeda, maka S adalah himpunan berhingga (finite set), dan n adalah Kardinalitas (cardinality) dari S.

Kardinalitas dari S dinotasikan dengan $|S| = n$.

Teladan 4.15

Hitung kardinalitas dari $A = \{0,1,2,1,2,3,3,4,2\}$.

Solusi:

Pada A jumlah elemen yang berbeda adalah sebanyak 5, yaitu 0, 1, 2, 3, dan 4. oleh karenanya $|A| = 5$.

Teladan 4.16

Jika $B = \{0, 1, 2, 1, 2\}$, hitung kardinalitas $P(B)$.

Solusi:

$$|P(B)| = 2^3 = 8.$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}.$$

Diagram Venn

Himpunan dapat juga dipresentasikan dengan diagram, diagram venn adalah suatu bentuk gambar atau diagram yang mudah dan cukup dikenal dalam mempresentasikan suatu himpunan. Penggunaan diagram ini pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Inggris yang bernama John Venn pada tahun (1834-1923). Himpunan semesta, yang beranggotakan seluruh objek direpresentasikan dengan bentuk kotak bingkai dan didalamnya terdapat lingkaran atau bentuk geometris lainnya.

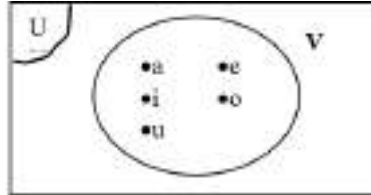
Terkadang tanda titik dipergunakan pula untuk menggambarkan elemen dari suatu himpunan. Dalam hal ini diagram venn sering pula digambarkan untuk melukiskan relasi antar himpunan.

Teladan 4.17

Gambarkan diagram venn yang menggambarkan himpunan V , yaitu himpunan huruf vokal dalam bahasa Indonesia.

Solusi:

Langkah pertama menentukan himpunan semesta U adalah himpunan huruf-huruf yang digunakan dalam bahasa Indonesia yaitu $\{a,b,c,\dots,x,y,z\}$, selanjutnya himpunan $V = \{a, e, i, o, u\}$.



Operasi pada Himpunan

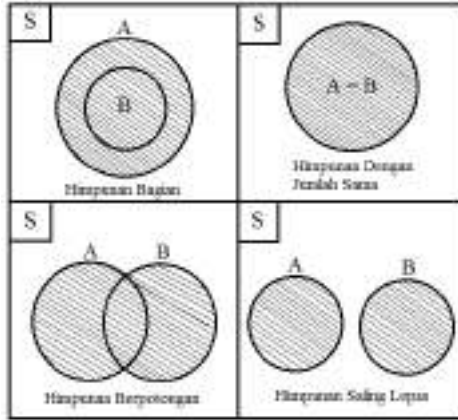
Berikut adalah operasi-operasi yang berlaku pada himpunan beserta definisinya.

Definisi 4.10

Gabungan (Union) dari A dan B dinotasikan dengan $A \cup B$ yaitu himpunan yang beranggotakan elemen dari A atau elemen dari B .

Notasi matematika dari $A \cup B = \{x|x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Bentuk diagram venn dari $A \cup B$ sebagai berikut:



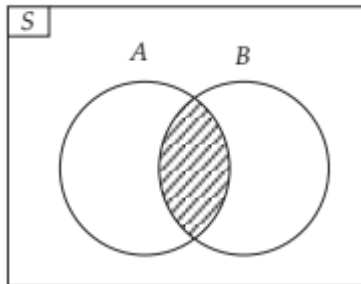
Daerah yang diarsir adalah daerah yang memenuhi $A \cup B$.

Definisi 4.11

Irisan (intersection) dari A dan B dinotasikan $A \cap B$, dimana $A \cap B$ adalah himpunan yang yang beranggotakan dari elemen A dan juga elemen B.

Notasi matematika dari $A \cap B = \{x|x \in A \text{ dan } x \in B\}$

Diagram venn dari $A \cap B$ adalah sebagai berikut:



Teladan 4.18

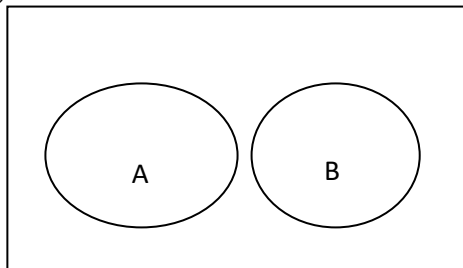
$A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{4, 5, 6\}$, maka $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $A \cap B = \{4\}$.

Sedangkan dua himpunan yang tidak beririsan jika pada kedua himpunan tersebut tidak terdapat elemen yang sama. Dua himpunan yang tidak beririsan dikatakan dua himpunan saling asing atau disjoint.

Definisi 4.12

Dua himpunan A dan B tidak beririsan atau saling asing atau saling lepas (disjoint) apabila $A \cap B = \emptyset$

Diagram venn dari dua himpunan yang tidak beririsan adalah sebagai berikut:



Teladan 4.19

Irisan himpunan bilangan genap dan himpunan bilang ganjil adalah himpunan kosong.

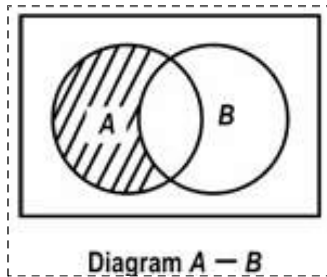
Definisi 4.13

Komplemen relatif (relative complement) A terhadap B dinotasikan $A - B$ adalah himpunan yang dibentuk oleh elemen A yang bukan elemen B .

Notasi matematikanya sebagai berikut:

$$A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\}$$

Diagram venn dari $A - B$ adalah sebagai berikut:



Teladan 4.20

Himpunan apakah $Z - N$ itu?

Solusi:

$Z = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ dan $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ maka:

$Z - N = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ atau

dinotasikan dengan $Z - N = \{x \in Z | x < 1\}$ atau $Z - N = \{x \in Z | x \leq 0\}$

Definisi 4.13

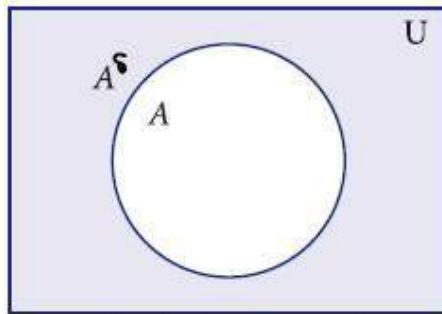
Asumsikan U adalah himpunan semesta. Jika terdapat sebarang himpunan A pada U , maka komplemen mutlak

(absolute complement) dari S dinotasikan dengan A^c adalah himpunan yang keanggotaannya merupakan semua elemen U yang bukan elemen A .

Notasi lain dari A^c adalah $U - A$

$$U - A = \{x \in U \mid x \notin A\} \text{ atau } A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Diagram venn untuk A^c atau $U(A$ adalah sebagai berikut:



Teladan 4.21

Diberikan U adalah himpunan prima yang kurang dari 30, dan A adalah himpunan bilangan asli ganjil yang kurang 30, maka $A^c = \{2, 9, 15, 21, 27\}$

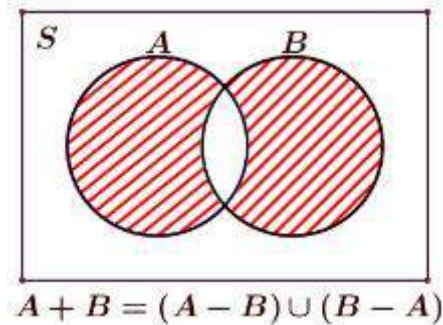
Definisi 4.14

Dua himpunan A dan B dikatakan Beda Simetris (symetric difference) dilambangkan dengan $A \oplus B$, dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{x : x \in A \cup B \text{ dan } x \notin A \cap B\} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Diagram venn dari $A \oplus B$ adalah sebagai berikut.



Teladan 4.22

Misalkan $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ dan $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ tentukan $A \oplus B$?

Solusi:

$$A \oplus B = \{2, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 18\}$$

Definisi 4.15

Misalkan terdapat himpunan A dan B , maka hasil kali A dan B (product, \times) adalah himpunan yang terbentuk sebagai pasangan terurut (orderet pair) dari (a, b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$.

Notasi dari $A \times B$ adalah sebagai berikut:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

Definisi 4.16

Dua buah pasangan (a,b) dan (c,d) dikatakan sama dinotasikandengan $(a,b) = (c,d)$ jika dan hanya jika $a = c$ dan $b = d$.

Teladan 4.23

Misalkan himpunan $A = \{a,b,c\}$ dan $B = \{1,2\}$, maka

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$$

Teladan 4.24

$(a, 2) \neq (a,3)$ dan $(4,3) \neq (3,4)$, tetapi $(a, 3) = (a, 2+1)$ dan $(5, 10) = (6-1, 2 \times 4+2)$

Himpunan Identik

Dua himpunan atau lebih dikatakan identik jika dan hanya jika himpunan-himpunan tersebut adalah sama.

Pembuktian identik tidaknya dua himpunan dapat dilakukan dengan aljabar himpunan yang menggunakan definisi-definisi himpunan yang sudah diberikan beserta turunannya dan hukum De Morgan. Berikut diberikan beberapa contoh dan penyelesaiannya.

Teladan 4.25

Buktikan bahwa $A \cup (A \cap B) = A$.

Solusi:

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cap U) \cup (A \cap B) \\ &= (A \cap (U \cup B)) \end{aligned}$$

$$= (A \cap U)$$

$$= A \quad : \text{ terbukti}$$

Teladan 4.26

Buktikan $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$.

Solusi:

$$A \cup (A^c \cap B) = (A \cup (A \cap B)) \cup (A^c \cap B)$$

$$= (A \cup [(A \cap B) \cup (A^c \cap B)])$$

$$= (A \cup [(A \cup A^c) \cap B])$$

$$= (A \cup [(U \cap B)])$$

$$= (A \cup B). \quad : \text{ terbukti}$$

Selain pembuktian menggunakan sistem aljabar himpunan, kesamaan dua himpunan dapat pula kita buktikan dengan tabel keanggotaan (membership table). Pada tabel keanggotaan, simbol '1' melambangkan anggota himpunan dan '0' melambangkan bukan anggota himpunan.

Berikut ini adalah tabel dari dua himpunan A dan B.

A	B	A^c	$A \cap B$	$A \cup B$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1

1	1	0	1	1
---	---	---	---	---

Coba kita fokuskan perhatian kita pada baris pertama dari tabel diatas;

A	B	A^c	$A \cap B$	$A \cup B$
0	0	1	0	0

Cara membaca dari baris pertama tabel keanggotaan himpunan adalah sebagai berikut: Pada kolom pertama dan kedua tertulis 0, ini berarti bahwa terdapat objek yang bukan elemen dari himpunan A dan B, dan di kolom ke empat tertulis 0 juga, yang berarti objek tersebut bukan anggota $A \cap B$. atau $x \notin A$ dan $x \notin B$, oleh karenanya $x \notin A \cap B$. sama halnya dengan apabila $x \notin A$, maka $x \in A^c$.

Berikut ini adalah ilustrasi dari bukti teladan 4.22 dan teladan 4.23 dengan menggunakan tabel keanggotaan.

Teladan 4.27

Buktikan $A \cup (A \cap B) = A$ dengan menggunakan tabel keanggotaan.

Solusi:

A	B	$A \cap B$	$A \cup (A \cap B)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Karena isi kolom pertama dan kolom ke empat adalah sama maka dapat disimpulkan bahwa : $A \cup (A \cap B) = A$.

Teladan 4.28

Buktikan $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$ dengan menggunakan tabel keanggotaan

Solusi:

A	B	$A \cup B$	A^c	$A^c \cap B$	$A \cup (A^c \cap B)$
0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

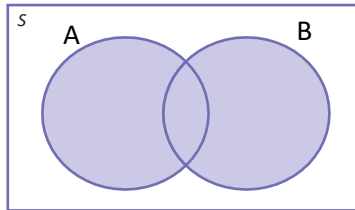
Karena isi kolom ke tiga sama dengan isi kolom ke enam, maka dapat disimpulkan bahwa: $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$.

Prinsip Inklusi Dan Eksklusi

Telah dibahas pada bahasan terdahulu mengenai bagaimana membentuk suatu himpunan dan operasi yang berlaku di antara himpunan. Selain dari itu juga kita ingin mengetahui berapakah jumlah elemen dari penggabungan atau irisan dua himpunan atau lebih. Bentuk umum dari hasil penggabungan himpunan ini disebut prinsip inklusi dan eksklusif.

Sebagai permasalahan apabila terdapat dua himpunan yang beririsan A dan B dan kemudian kita ingin mencari kardinalitas gabungan dua himpunan tersebut atau $|A \cup B|$.

Untuk mempermudah analisis digunakan diagram venn sebagai berikut:



Dari diagram ini terlihat bahwa daerah $A \cup B$ terdiri dari 3 daerah yaitu: $A - B$, $A \cap B$, dan $B - A$, dimana kardinalitasnya adalah:

$$|A \cup B| = |A - B| + |A \cap B| + |B - A|$$

Selain itu diketahui bahwa:

$$|A| = |A-B| + |A \cap B| \text{ dan}$$

$$|B| = |B-A| + |A \cap B| \text{ atau } |B-A| = |B| - |A \cap B|$$

sehingga;

$$|A \cup B| = |A-B| + |A \cap B| + |B-A|$$

$$= |A| + |B-A|$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B|$$

Dan apabila A dan B tidak beririsan atau $|A \cap B| = 0$,
maka

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - 0$$

$$= |A| + |B|$$

Dari hasil analisis ini dapat diturunkan lemma dan teorema sebagai berikut:

Lemma 2.2

Jika A dan B adalah himpunan berhingga yang tidak beririsan atau keduanya saling asing, maka $A \cup B$ adalah himpunan hingga juga, dan

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Teorema 2.1

Jika A dan B adalah himpunan berhingga yang tidak beririsan atau keduanya saling asing, maka $A \cup B$ adalah himpunan hingga juga, dan

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Teorema 2.2

Jika A, B dan C adalah himpunan berhingga yang tidak beririsan atau keduanya saling asing, maka $A \cup B \cup C$ adalah himpunan hingga juga, dan

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

mengenai pembuktian teorema diatas tidaklah terlalu sulit, oleh karenanya dapat anda coba sebagai latihan.

Teladan 4.29

Ketika dilakukan survey media komonikasi pada 10 rumah didapatkan data sebagai berikut: 6 rumah memiliki Telepon, 4 rumah Handphone, dan 2 rumah tidak memiliki media komunikasi telepon maupun handphone. Tentukan berapa rumah yang memiliki media komunikasi telepon dan handphone?

Solusi:

Misalkan $U = \{\text{rumah yang disurvei media komunikasi}\}$, $A = \{\text{rumah yang memiliki telepon}\}$, $B = \{\text{rumah yang memiliki Handphone}\}$. Sehingga didapat:

$$|A \cup B| = |U| = 10$$

$$|A| = 6, |B| = 4, \text{ dan } |(A \cup B)^c| = 2.$$

$$\text{Jadi } |A \cup B| = |U| - |(A \cup B)^c| = 10 - 2 = 8$$

Atau

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= |A| + |B| - |A \cup B| \\ &= 6 + 4 - 8 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Teladan 4.30

Dari 100 mahasiswa semester satu prodi tadris matematika UIN Sayyid Ali Rahmatullah Tulungagung, setiap mahasiswa harus mengambil sedikitnya satu dari matakuliah-matakuliah Logika Dasar, Teori Himpunan, dan Aljabar Dasar. Bila 65 orang mahasiswa mengambil Logika dasar, 45 orang mahasiswa mengambil teori himpunan, 42 orang mahasiswa mengambil Aljabar, 25 orang mengambil logika dan aljabar, 15 orang mengambil teori himpunan dan aljabar, 20 orang mengambil teori himpunan dan logika. Tentukan berapa orang mahasiswa yang:

1. mengambil ketiga matakuliah tersebut.

2. mengambil logika dan teori himpunan , tetapi bukan aljabar.
3. hanya mengambil aljabar saja.

Solusi:

Misalkan $U = \{\text{mahasiswa Tadris Matematika Semester I UIN Sayyid Ali Rahmatullah Tulungagung}\}$, $A = \{\text{mahasiswa yang mengambil Logika}\}$, $B = \{\text{mahasiswa yang mengambil Teori Himpunan}\}$, $C = \{\text{mahasiswa yang mengambil Aljabar}\}$, maka dapat dirinci sebagai berikut:

$$|U| = 100, |A| = 65, |B| = 45, |C| = 42,$$

$$|A \cap B| = 20, |A \cap C| = 25, |B \cap C| = 15,$$

$$1. |A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$$

$$= 100 - 65 - 45 - 42 + 20 + 25 + 15$$

$$= 100 - 92 = 8$$

$$2. |A \cap B| = |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap C^c|$$

$$|A \cap B \cap C^c| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C|$$

$$= 20 - 8 = 12$$

$$3. |B| = |A \cap B^c \cap C^c| + |A \cap B^c \cap C| + |A \cap B \cap C^c| + |A \cap B \cap C|$$

$$|B| = |A \cap B^c \cap C^c| + |A \cap C| + |A \cap B| - |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cap B^c \cap C^c| = |B| - |A \cap C| - |A \cap B| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 45 - 20 - 15 + 8$$

$$= 18$$

Berikut ini diberikan sifat-sifat yang berlaku pada operasi himpunan yang melibatkan operasi gabungan, irisan dan komplemen. Andaikan A , B , dan C adalah tiga Himpunan sebarang, dengan $A, B, C \in U$, maka berlaku:

1. Hukum Idempoten

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

2. Hukum Komotatif

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

3. Hukum Asosiatif

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

4. Hukum Absorbsi

$$A \cap (A \cup C) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

5. Hukum Distribusi

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

6. Hukum Involusi

$$(A^c)^c = A$$

7. Hukum De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

8. Hukum Identitas

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap U = A$$

9. Hukum Komplemen

$$A \cup A^c = U$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$\emptyset^c = U$$

$$U^c = \emptyset$$

Hukum-hukum diatas dapat dibuktikan secara aljabar dan dapat juga ditunjukkan dengan menggunakan tabel kebenaran dan tabel keanggotaan atau menggunakan diagram Venn atau teorema kesamaan himpunan.

B. Relasi

Secara umum relasi pada himpunan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 4.17

Jika A dan B dua himpunan sebarang, suatu relasi dari A ke B adalah himpunan bagian dari hasil kali A dan B atau cartesian product $A \times B$ yaitu pasangan terurut (a,b) dimana $a \in A$ dan $b \in B$.

Jika R adalah suatu relasi dari A ke B , dikatakan bahwa $a \in A$ berelasi dengan $b \in B$, jika $(a,b) \in R$ dan dinotasikan dengan aRb artinya a direlasikan ke b oleh R . Namun jika a tidak berelasi dengan b , maka $(a,b) \notin R$ dinotasikan dengan $a \not R b$. Jika $A = B$ maka R disebut relasi pada A

Teladan 4.31

Hasil survey RA Miftahul Huda dengan angket mengenai pelajaran yang paling disukai siswa, diperoleh data dari 5 siswa sebagai berikut:

- Ahmad menyukai pelajaran menggambar dan agama.
- Aziz menyukai pelajaran olah raga
- Fatimah menyukai pelajaran menggambar
- Miftah menyukai pelajaran olah raga dan menggambar
- Kholid menyukai pelajaran agama

Dari data diatas, dapat dituliskan bahwa himpunan siswa yaitu $\{\text{Ahmad, Aziz, Fatimah, Miftah, Kholid}\}$ dipetakan ke

himpunan pelajaran yaitu {agama, menggambar, olahraga} dengan relasi ‘Menyukai Pelajaran’. Apabila x menyukai pelajaran y , maka dinotasikan dengan pasangan berurut (x,y) sehingga relasi dari kedua himpunan adalah {(Ahmad, menggambar), (Ahmad, agama), (Aziz , olahraga), (Fatimah, menggambar), (Miftah, olahraga), (Miftah, menggambar), (Kholid, agama)}.

Jika $f: A \rightarrow B$ dan diidentifikasi R_f dengan himpunan:

$R_f = \{(x,y) \in A \times B : y=f(x)\}$, maka f adalah fungsi yang memetakan A ke B .

Teladan 4.32

Jika himpunan $A=\{3,4,5,8\}$ dan $B=\{1,9\}$, maka $A \times B = \{(3,1), (3,9), (4,1), (4,9), (5,1), (5,9), (8,1), (8,9)\}$. Jika relasi antara A dan B dinyatakan dengan relasi ‘Lebih dari’ maka relasinya adalah $\{(3,1), (4,1), (5,1), (8,1)\}$.

Sifat-sifat Relasi

Pada saat dua himpunan direlasikan satu dengan lainnya. Relasi tersebut memiliki sifat yang perlu diperhatikan. Berikut adalah definisi dan sifat-sifat relasi beserta beberapa contohnya.

Definisi 4.18 (Relasi Refleksif)

Pada suatu himpunan A didefinisikan relasi R . relasi R bersifat *refleksif* jika $(x,x) \in R$, untuk setiap $x \in A$.

Atau dengan kata lain, relasi R *refleksif* pada himpunan A apabila untuk semua $x \in A$, xRx terpenuhi.

Teladan 4.33

Apabila diketahui $A = \{1,2,3\}$ dan relasi $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ pada A , maka R adalah refleksif karena untuk setiap $a \in A$ terdapat $(a,a) \in R$.

Teladan 4.34

Perhatikan relasi pada himpunan $A = \{1,2,3,4\}$ berikut ini:

$$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}.$$

$$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

$$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,2), (4,1), (4,3)\}$$

$$R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

$$R_6 = \{(3,4)\}.$$

Periksalah, mana yang merupakan relasi refleksif?

Solusi:

Hanya R_3 dan R_5 yang merupakan relasi refleksif.

Teladan 4.35

Perhatikan relasi pada N dibawah ini. Manakah yang merupakan relasi refleksif?

$$R_1 = \{(a,b) : a \leq b\}.$$

$$R_2 = \{(a,b) : a > b\}.$$

$$R_3 = \{(a,b) : a = b \text{ atau } a = -b\}.$$

$$R_4 = \{(a,b) : a = b\}.$$

$$R_5 = \{(a,b) : a = b+1\}.$$

$$R_6 = \{(a,b) : a + b \leq 3\}.$$

Solusi:

R_1 , R_3 , dan R_4 adalah merupakan relasi refleksif.

Definisi 4.19 (Anti Refleksif)

Suatu relasi R dikatakan *anti-refleksif* jika $(x,x) \notin R$, untuk $x \in A$.

Dengan kata lain relasi R adalah *anti refleksif* pada A apabila untuk setiap $x \in A$, xRx tidak terpenuhi

Teladan 4.36

Misalkan $B = \{a,b,c\}$ dan relasi $R = \{(a,c), (b,c), (b,a)\}$, maka relasi R adalah anti-refleksif karena (a,a) , (b,b) , dan $(c,c) \notin R$.

Teladan 4.37

Relasi manakah pada teladan 4.35 yang merupakan relasi anti refleksif?

Solusi:

Relasi R_4 dan R_6 adalah anti refleksif

Teladan 4.38

Relasi manakah pada teladan 4.35 yang merupakan relasi anti refleksif?

Solusi:

Relasi R_2 dan R_5 merupakan relasi anti refleksif.

Definisi 4.20 (Relasi Simetris)

Suatu relasi dikatakan *simetris*, jika $(a,b) \in R$ maka $(y,x) \in A$.

Teladan 4.39

Pada himpunan $C = \{a,b,1,2\}$ terdapat relasi $R = \{(1,2),(2,1),(a,b),(b,a),(a,a), (a,1)\}$. Relasi R bukan simetris karena $(a,1) \in C$, tetapi $(1,a) \notin C$.

Teladan 4.40

Relasi manakah pada teladan 4.35 yang merupakan relasi simetris?

Solusi:

R_2 dan R_3 adalah simetris.

Teladan 4.41

Relasi manakah pada teladan 4.35 yang merupakan relasi simetris?

Solusi:

R_3 , R_4 , dan R_6 adalah simetris.

Definisi 4.21 (Anti Simetris)

Suatu relasi R dikatakan *anti simetris* jika $(a,b) \in A$ dan $(b,a) \in A$ maka $a = b$.

Dengan kata lain, pada himpunan A terdapat a dan b , relasi R adalah *anti simetris* jika aRb dan bRa maka $a = b$.

Teladan 4.42

Relasi manakah pada teladan 4.35 yang merupakan relasi simetris?

Solusi:

R_4, R_5 dan R_6 adalah anti simetris.

Definisi 4.22 (Relasi Transitif)

Suatu relasi R dikatakan *transitif* jika $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$, maka $(a,c) \in R$.

Teladan 4.43

Relasi manakah pada teladan 4.35 yang merupakan relasi transitif?

Solusi:

R_4, R_5 dan R_6 adalah Transitif.

Teladan 4.44

Relasi manakah pada teladan 4.35 yang merupakan relasi transitif?

Solusi:

$R_1, R_2, R_3,$ dan R_4 adalah merupakan relasi transitif.

C. Fungsi

Penulis yakin bahwa pembaca telah mempelajari apa itu fungsi dan bagaimana penggunaannya. Seperti:

$$F_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \sqrt{x}.$$

Disini kita memberi nama fungsi sebagai f_1 dan f_2 , sedangkan huruf x adalah variabel yang melambangkan masukan atau input. Pada fungsi dan persamaan mendeskripsikan nilai keluaran atau output yang dihasilkan dari fungsi.

Ciri penting dari fungsi yang harus diperhatikan disini adalah suatu fungsi hanya menghasilkan sebuah output saja untuk setiap nilai satu input. Sebagai contoh, fungsi f_1 akan memberikan output 64 ketika nilai input $x=8$, dan f_2 akan memberikan nilai output 8 jika nilai input $x=64$. atau dengan kata lain $f_1(8) = 64$ dan $f_2(64) = 8$. ciri lain yang juga perlu diperhatikan adalah fungsi tidak dapat menerima sebarang input, atau fungsi memiliki kriteria pada input-nya agar dapat menghasilkan output yang diinginkan.

Pada fungsi f_2 bila kita definisikan outputnya bilangan real, maka input dari fungsi f_2 harus dibatasi pada bilangan positif saja, karena bila input-nya bilangan negatif maka output-nya bukan bilangan real, melainkan bilangan imajiner.

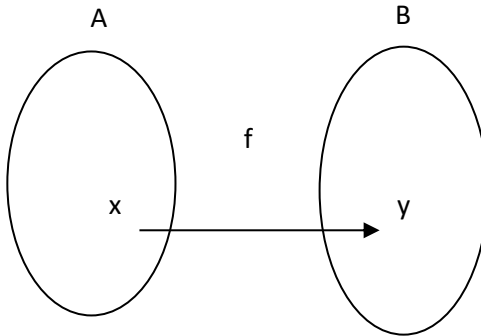
Berikut definisi formal dari fungsi:

Definisi 4.23

Misalkan A dan B adalah sebarang himpunan, maka suatu relasi f disebut fungsi jika f memetakan setiap elemen A pada suatu elemen B yang unik.

1. Untuk setiap $x \in A$, terdapat $y \in B$ sehingga $f(x) = y$.
2. Jika $x_1 = x_2$ maka $f(x_1) = f(x_2)$

Gambar berikut adalah ilustrasi fungsi f yang memetakan elemen himpunan A ke elemen himpunan B menggunakan diagram panah.



Himpunan A merupakan domain dari f atau daerah asal dan dinotasikan dengan $D(f)$. dengan kata lain domain adalah himpunan yang semua elemennya bisa dipetakan oleh fungsi f . sedangkan himpunan B merupakan codomain atau daerah kawan dan $f(x)$ adalah hasil pemetaan dari $x \in D(f)$ atau $f(x) \in R(f)$.

Teladan 4.45

Jika $f_1(x) = x_2$ dimana outputnya adalah bilangan real, maka $D(f_1) = \mathbb{R}$. Apabila $f_2(x) = \sqrt{x}$ dan outputnya bilangan real, maka $D(f_2) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Definisi 4.24

Untuk setiap x pada $D(f)$, $f(x)$ disebut bayangan (\mathbb{R}) dari x oleh f dan dinotasikan dengan $R(f)$. dimana $R(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$.

Teladan 4.46

Diketahui fungsi f didefinisikan dengan $f(x) = x^2$ dan $Df = \{1, 2, 3\}$ maka bayangan dari f atau $R(f) = \{1, 4, 9\}$.

Meskipun kita mengetahui bayangan suatu fungsi, ketika ditanyakan kepada himpunan apakah domain oleh fungsi dipetakan?. Kita tidak bisa menjawabnya pada banyak kasus, salah satu contohnya seperti berikut ini:

Teladan 4.47

Misalkan fungsi g dimana $g(x) = x^3 - 73x + 5$ dan $D(g) = \mathbb{N}$. kita tidak dapat mendeskripsikan dengan tepat himpunan apakah bayangan dari g ini. Kita hanya dapat menuliskan sebagai $\{x^3 - 73x + 5 : x \in \mathbb{N}\}$, akan tetapi penulisan ini tidak menjelaskan apa saja yang menjadi elemen himpunan tersebut. Apakah 4958 menjadi elemen himpunan atau tidak, kita tidak mengetahui secara langsung.

Pada teladan diatas kita tidak bisa mendeskripsikan bayangan dari fungsi dengan tepat, akan tetapi kita bisa dengan

mudah mendeskripsikan himpunan yang memiliki subset bayangan fungsi tersebut.

Definisi 4.25

Jika $R(f)$ adalah subset dari himpunan B , maka B adalah daerah kawan (codomain) dari f .

Keterkaitan suatu fungsi antara domain dan codomain dinotasikan secara matematis dengan : $f: A \rightarrow B$

Dimana domain f atau $D(f)$ dilambangkan A dan codomain f dilambangkan B . pada umumnya notasi $f: A \rightarrow B$ dibaca sebagai berikut:

- Fungsi f memiliki domain A dan codomain B
- Fungsi f memetakan A ke B .

Teladan 4.48

Misalkan $f(x) = x^2$. jika $D(f)$ adalah himpunan bilangan bulat Z , maka codomain dari f adalah himpunan bilangan asli N dan $R(f) \subseteq N$.

Fungsi dapat pula dipresentasikan dalam graph yang menggambarkan hubungan antar elemen dari domain dan bayangannya yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 4.26

Jika terdapat fungsi $f: A \rightarrow B$, graph dari fungsi f adalah himpunan pasangan berurut $\{(x,y) ; x \in A \text{ dan } y = f(x)\}$

Penggambaran dari graph ini menggunakan koordinat dua dimensi atau koordinat cartisius dengan elemen A

digambarkan sebagai sumbu horisontal (sumbu x) dan elemen dari B digambarkan sebagai sumbu vertikal (sumbu y).

Teladan 4.49

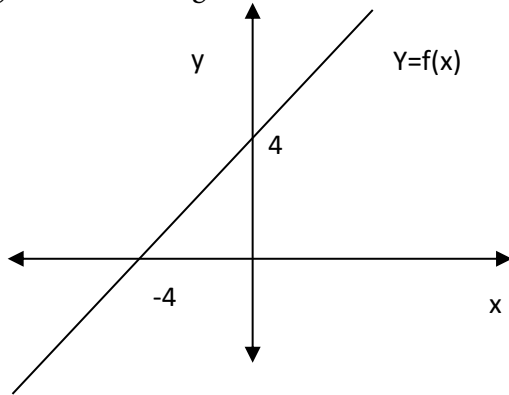
Fungsi f didefinisikan sebagai $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $f(x) = x + 4$. gambarkan graph G untuk f .

Solusi:

Dari soal diketahui graph G , dimana:

$$G = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \text{ dan } y = x + 4\}$$
$$= \{\dots, (-4,0), (-3,1), (-2,2), (-1,3), \dots\}$$

dan G digambarkan sebagai berikut:



Perhatikan kasus khusus berikut:

Pada tahun ajaran 2004/2005 syarat untuk lulus ujian akhir nasional, nilai minimum adalah 4.05. atau secara formal apabila x adalah nilai ujian dan $0 < x < 4.05$, maka tidak lulus ujian. Apabila $4.05 < x < 10$ maka lulus ujian.

Pada kasus diatas, apabila didefinisikan. Fungsi f yang memetakan dari domain D ke bayangan f atau $R(f)$ merupakan fungsi karakteristik, dimana D adalah $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 10\}$ sedangkan $R(f) = \{0,1\}$. Disini 0 menyatakan tidak lulus ujian, dan 1 menyatakan lulus ujian.

Berikut adalah definisi formal dari fungsi karakteristik.

Definisi 4.27

Jika terdapat himpunan S dan $A \subseteq S$, fungsi pada S yang hanya memberikan nilai 1 pada elemen A dan memberikan 0 pada elemen lainnya disebut **fungsi karakteristik** (*characteristic function*) dari A dan dinotasikan dengan X_a

$$X_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk, } x \in A \\ 0 & \text{untuk } x \notin S / A \end{cases}$$

Berikut beberapa contoh penggunaan fungsi karakteristik.

Teladan 4.50

Fungsi karakteristik lulus untuk contoh kasus di atas adalah :

$$X_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk, } 4.05 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{untuk, } 0 \leq x < 4.05 \end{cases}$$

Dimana x adalah nilai ujian akhir nasional

Teladan 4.51

Jika terdapat fungsi g dimana $g(n)$ adalah sisa hasil bagi oleh 2 dan $n \in \mathbb{N}$, maka $g(52)=0$ karena 52 habis dibagi 2, sedangkan $g(43)=1$, karena 43 dibagi 2 sama dengan 21 dengan sisa hasil bagi 1. disini $g: \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$. Sehingga fungsi g dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$g(n) = \begin{cases} 1, & n \in \text{ganjil} \\ 0, & n \in \text{genap} \end{cases}$$

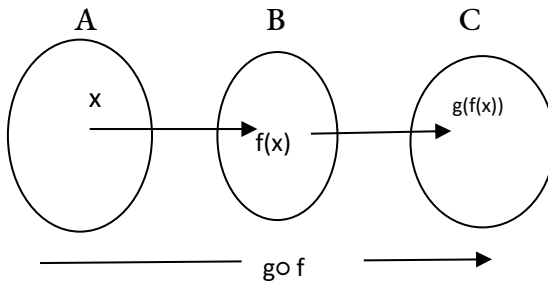
jika terdapat dua fungsi f dan g , kita dapat mengkombinasikan atau mengkomposisikan kedua fungsi ini dengan syarat bayangan dari fungsi pertama dapat dipetakan seluruh elemennya oleh fungsi berikutnya.

Berikut ini definisi komposisi fungsi:

Definisi 4.28

Fungsi $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$, komposisi fungsi dari f ke g dinotasikan $g \circ f: A \rightarrow C$, dengan aturan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, untuk setiap $x \in A$

apabila komposisi fungsi $g \circ f$ kita ilustrasikan dengan menggunakan diagram panah, maka diperoleh gambaran berikut ini:



Notasi $(g \circ f)(x)$ juga berarti kita mengaplikasikan fungsi g pada hasil aplikasi fungsi f pada x .

Teladan 4.52

Misalkan $f(x) = 2x - 5$, dan $g(x) = 3x^2 + 1$. tentukan $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$?

Solusi:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 5) = 3(2x-5)^2 + 1 = 3(4x^2 - 20x + 25) + 1 = 12x^2 - 60x + 76$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2 + 1) = 2(3x^2 + 1) - 5 = 6x^2 + 2 - 5 = 6x^2 - 3.$$

Dari teladan diatas, didapat bahwa $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$

Teorema 2.3

Jika $f: A \rightarrow B$, dan $g: B \rightarrow C$, serta $h: C \rightarrow D$. Maka $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Bukti:

Pada prinsipnya pembuktian ini memverifikasi hasil dari komposisi fungsi. Komposisi fungsi $h \circ (g \circ f)$ dan $(h \circ g) \circ f$ keduanya jelas-jelas memetakan A kedalam D , yaitu $h(g(f(x)))$.

Macam-Macam Pemetaan

Jenis pemetaan oleh fungsi ada tiga macam, yaitu: fungsi satu-satu, fungsi ke dalam, dan korespondensi satusatu.

Definisi 4.29

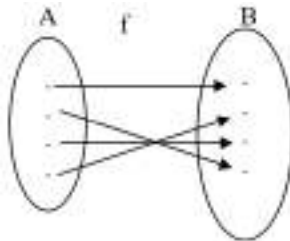
Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi satu-satu (*one-to-one* atau *intektive*) jika f memetakan setiap elemen yang berbeda pada A ke elemen yang berbeda pada B .

Secara matematis dapat dinyatakan

1. Jika $a, b \in A$ dan $a \neq b$, maka $f(a) \neq f(b)$,
2. Jika $f(a) = f(b)$, maka $a = b$.

Atau jika G adalah graph dari f , dimana $G = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$, maka f adalah fungsi satu-satu jika dan hanya jika: untuk setiap $y \in B$ paling banyak ada satu $x \in A$ sehingga $(x, y) \in G$.

Dari penjelasan diatas fungsi satu-satu atau *injektive* dapat kita gambarkan dalam diagram berikut ini:



Teladan 4.53

$f(x) = 3x + 2$ adalah fungsi injektive, sedangkan $g(x) = 2x^2 - 3$ adalah bukan injektif, mengapa?

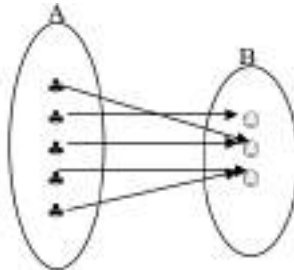
Definisi 4.30

Jika $f: A \rightarrow B$, fungsi f dikatakan fungsi ke dalam (*onto* atau *surjektive*) jika $R(f) = B$.

Untuk setiap $y \in B$ terdapat paling sedikit ada satu $x \in A$ sehingga $f(x) = y$.

dengan ungkapan lain jika G adalah graph dari f , dimana $G = \{(x,y) \in A \times B : y = f(x)\}$, maka f *surjektive* jika dan hanya jika untuk setiap $y \in B$ paling sedikit ada satu $x \in A$ sehingga $(x,y) \in G$.

Dari penjelasan diatas fungsi ke dalam atau surjektive dapat kita gambarkan dalam diagram berikut ini:

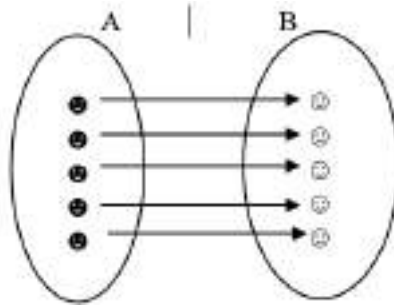


Definisi 4.31

Jika terdapat $f: A \rightarrow B$, fungsi f dikatakan berkorespondensi satu-satu (*one-to-one correspondence* atau *bijektive*) jika f merupakan fungsi injektif dan surjektif.

dengan ungkapan lain jika G adalah graph dari f , dimana $G = \{(x,y) \in A \times B : y = f(x)\}$, maka f *bijektive* jika dan hanya jika untuk setiap $y \in B$ hanya ada satu $x \in A$ sehingga $(x,y) \in G$.

Dari penjelasan diatas fungsi berkorespondensi satu-satu atau *bijektive* dapat kita gambarkan dalam diagram berikut ini:



D. Soal-Soal Latihan

1. Misalkan $A = \{\{a\}, \{b,c,d,e\}, \{c,d\}\}$. Tunjukkan apakah pernyataan berikut benar atau salah?
 - a. $a \in A$
 - b. $\{a\} \in A$
 - c. $\{\{a\}, \{c,d\}\} \subseteq A$
 - d. $\{b,c,d,e\} \subseteq A$
 - e. $\{\} \subseteq A$
 - f. $\{\} \in A$
2. Diketahui $B = \{4,5,6, \{x\}, \{x,y\}\}$
 - (a) tuliskan elemen dari B
 - (b) berapakah kardinalitas dari B?
 - (c) Tuliskan himpunan kuasa B.

- (d) Berapakah kardinalitas dari himpunan kuasa B?
3. Diketahui $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{2,3,4,a,b\}$, dan $C = \{a,b,c\}$. tuliskan dari:
- (a) $A \cap B$, $A \cap C$, dan $B \cap C$
- (b) $A \cup B$, $A \cup C$, dan $B \cup C$
- (c) $A \setminus B$, $A \setminus C$, dan $B \setminus C$
4. sebuah sampel dari 50 pemilik mobil menyatakan bahwa 20 orang memiliki mobil pick up dan 43 orang memiliki mobil truk, tentukan jumlah orang yang memiliki pick up sekaligus truk.
5. diantara 100 siswa diketahui bahwa 32 orang menyukai matematika, 20 orang menyukai fisika, 45 orang menyukai biologi, 15 orang menyukai matematika dan biologi, 7 orang menyukai matematika dan fisika, 10 orang menyukai biologi dan fisika, dan 30 orang tidak menyukai ketiganya.
- (a) Hitunglah banyaknya siswa yang menyukai ketiga mata pelajaran tersebut?
- (b) Hitunglah banyaknya siswa yang hanya menyukai satu bidang saja?
6. Diketahui relasi f , g , h memetakan dari himpunan A ke B , dimana $A = \{ a, b, c, d, e \}$ dan B adalah himpunan huruf alphabet. Dan definisi masing-masing relasi tersebut sebagai berikut:
- (a) $a \rightarrow r$; $b \rightarrow a$; $c \rightarrow s$; $d \rightarrow r$; $e \rightarrow e$.

(b) $a \rightarrow z; b \rightarrow y; c \rightarrow x; d \rightarrow y; e \rightarrow z.$

(c) $a \rightarrow a; b \rightarrow c; c \rightarrow e; d \rightarrow r; a \rightarrow s.$

relasi manakah yang merupakan fungsi?

7. Diketahui domain dari fungsi-fungsi berikut adalah $\{1,2,3,4\}$ tentukan Renge untuk masing-masing fungsi.

(a) $f_1(x) = x + 1$

(b) $f_2(x) = x^2 + 1$

(c) $f_3(x) = \max(3, x)$

(d) $f_4(x) = \min(x, 2)$

8. Diketahui fungsi $f_1(x) = x - 11$, $f_2(x) = x^2 + 2x + 1$, dan $f_3(x) = \sqrt{x}$. tentukan komposisi-komposisi berikut:

(a) $f_1 \circ f_2$

(b) $f_2 \circ f_1$

(c) $f_1 \circ f_3$

(d) $f_1 \circ f_2 \circ f_3$

9. Diketahui $A = \{1,2,a,b\}$ dan $B = \{x,y,z\}$ tentukan

(a) $A \times B$

(b) $B \times A$

10. Diketahui $P = \{a,b,c,d,e\}$, berikan contoh dari relasi pada P yang bersifat:

a. refleksif

b. simetris

c. anti simetris

d. transitif

11. Diketahui $W = \{1,2,3,4\}$ berikut adalah relasi dalam W

➤ $R_1 = \{(1,1), (2,1)\}$

➤ $R_2 = \{(1,1), (2,3), (4,1)\}$

➤ $R_3 = \{(3,4)\}$

➤ $R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

➤ $R_5 = \{(1,2), (2,1), (1,3), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (4,3), (3,4)\}$

Relasi manakah yang bersifat:

(a) Refleksif

(b) Simetris

(c) Anti simetris

(d) transitif

Daftar Bacaan

- Bahri, S., 2006, *Logika dan Himpunan*, Universitas Mataram, Mataram.
- Ben-Ari, M. (2012). *Mathematical Logic for Computer Science* third Edition. London: Springer-Verlag.
- Copi, I. M., Cohen, C., & McMahon, K. (2014). *Introduction to Logic* Fourteenth Edition. Pearson New International Edition.
- Grassmann, W. K., & Tremblay, J. P. (1996). *Logic and Discrete Mathematics, A Computer Science Perspective*. New Jersey : Prentice Hall.
- Huth, M., & Ryan, M. (2004). *Logic in Computer Science, Modelling and Reasoning about System*. Cambridge University Press.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Muniri (2011) *Logika Dasar Matematika* (Alim's Publishing: Jakarta)

- R. Soejadi (1988) Pengantar Logika Matematika-Non Aksiomatik. (Depdikbud Ditjen Dikti, Jakarta)
- Simangunsong Wilson, Matematika dasar, (Jakarta: Erlangga, 2005)
- Soekardijo R (1999); Logika Dasar; Tradisional, simbolik & Deduktif. (Gramedia, Jakarta)
- Stoll R (1963). Set Theory and Logic, (Freeman & Co.San francisco)

Tentang Penulis



Muniri, lahir di Desa Peltong Kecamatan Larangan Pamekasan Madura tahun 1968 adalah dosen di program studi Tadris Matematika UIN Sayyid Ali Rahmatullah Tulungagung (UIN Satu). Pendidikan terakhir S3 Pendidikan Matematika Universitas Negeri Suraya (Unesa) 2012. Bidang konsentrasi keahliannya adalah Pengembangan pembelajaran & pemecahan masalah matematika. Mata kuliah yang diampu yaitu Aljabar Abstrak, Analisis real, geometri dan psikologi kognitif. Dia juga aktif menulis beberapa jurnal dan buku yang diterbitkan baik nasional maupun internasional. dengan ID Scopus: 57203099141; ORCID iD: 0000-0002-9280-4289; ID Sinta: 5989716; ID Scholar: <https://scholar.google.co.id/citations?user=FD2ru2gAAAAJ&hl=id>; Dua buku terakhir yang dihasilkan berjudul *Pengembangan Pembelajaran Matematika berbasis ICT* (2023) dan *Ethnomatematika dan Problem Pembelajaran Siswa* (2025).



Nurul Laili, S.Pd., M.Sc. adalah dosen di Program Studi Sains Data, Universitas Negeri Surabaya. Ia memperoleh gelar sarjana Pendidikan Matematika dari Universitas Negeri Surabaya dan gelar magister Matematika Terapan dari University of Glasgow, Inggris Raya. Dia lahir di sebuah desa terpencil di Madura, tepatnya di Dusun Garuk Desa Blumbungan Larangan Pamekasan tahun 1999.

Bidang minatnya meliputi persamaan diferensial, biologi matematika, dan matematika murni, dengan fokus pada pengembangan dan penerapan model matematis untuk memahami proses biologis serta fenomena alam. Saat ini ia aktif mengajar dan mengembangkan penelitian di bidang matematika terapan dan sains data. Beberapa karya ilmiah mutakhir yang terbit berjudul “Thinking Process of Secondary Level Students in Constructing Proof by Mathematical Induction in Terms of Their Attitude toward Mathematics (2021), dan Giving Questions as Scaffolding to Help Students in Constructing Proof (2020)”. Dia juga pernah menerima penghargaan Awardee LPDP (Lembaga Pengelola Dana Pendidikan) (2022); Yudisiawan Pamuncak, Peringkat 1 Fakultas MIPA – UNESA (2021), dan Delegasi *Student Exchange* – Tarlac Agricultural University, Filipina (2020).