

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Deskripsi Teori

1. Hakikat Matematika

a. Definisi Matematika

Seperti kata Abraham S Lurchins dan Edith N Lurchins, “ *In short, the question what is mathematics? May be answeres difficulty depending on when the question is answered, where it is answered, who answer it, and what is regarded as being included in mathematics*”. Pendeknya apakah matematika itu? Dapat dijawab secara berbeda-beda tergantung pada bilamana pertanyaan itu dijawab dimana, siapa yang menjawab, dan apa sajakah yang dipandang termasuk dalam matematika?¹⁸

Istilah mathematics (inggris), mathematik (Jerman), mathematique (Perancis), matematico (Italia), matematiceski (Rusia), atau mathematick/ wiskunde (Belanda) berasal dari perkataan latin mathematica.¹⁹ Matematika berasal dari kata Yunani, *mathein* atau *mathenein* yang berarti mempelajari. Kata ini memiliki hubungan yang erat dengan bahasa Sansekerta, *medha* atau *widya* yang memiliki arti kepandaian, ketahuan, atau inteligensia.²⁰ Dalam

¹⁸ Erman Suherman, *Strategi Pembelajaran Matematika ...* hal. 15

¹⁹ *Ibid.*,

²⁰ Abdul Halim Fathani, *Matematika Hakikat dan Logika*, (Jogjakarta: AR RUZZ MEDIA, 2012), hal. 21

bahasa Belanda menurut Andi Hakim Nasution, matematika disebut dengan kata *wiskunde*. Kemungkinan besar bahwa kata “wis” ini ditafsirkan sebagai “pasti”, karena di dalam bahasa Belanda ada ungkapan “wia an zeker” berarti “pasti”, tetapi “wis” disini lebih dekat artinya ke “wis” dari kata “wisdom” dan “wisses-scaff”, yang erat hubungannya dengan “widya”. Karena itu, “wiskunde” sebenarnya harus diterjemahkan sebagai “ilmu tentang belajar” yang sesuai dengan arti “mathein” pada matematika.

Sebagai sesuatu yang sifatnya praktis menurut Mathematical Sciences Education Board (1989), matematika merupakan ilmu tentang pola dan urutan. Matematika tidak membahas tentang molekul atau sel, tetapi membahas tentang bilangan, kemungkinan, bentuk, algoritma, dan perubahan. Sebagai ilmu dengan objek yang abstrak, matematika bergantung pada logika, bukan pada pengamatan, simulasi, dan bahkan percobaan sebagai alat untuk menemukan kebenaran.²¹

Matematika adalah ilmu tentang pola dan urutan. Gambaran sederhana ini dapat dikemukakan pada *Everybody Counts*, Matematika adalah ilmu tentang sesuatu yang memiliki pola keteraturan dan aturan yang logis, menemukan dan mengungkapkan

²¹ John A. Van de Walle, *Matematika Sekolah Dasar dan Menengah*, (Jakarta: Gelora Aksara Pratama, 2014), hal.12

keteraturan dan urutan ini dan kemudian memberikan arti merupakan makna dari pengajaran matematika.²²

Johnson dan Rising dalam bukunya mengatakan bahwa matematika adalah pola berpikir, pola mengorganisasikan, pembuktian yang logik, matematika itu adalah bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas, dan akurat, representasinya dengan simbol yang padat, lebih berupa simbol mengenai ide dari pada mengenai bunyi.²³

Beberapa ahli juga berpendapat mengenai definisi matematika. Plato berpendapat bahwa matematika adalah identik dengan filsafat ahli pikir, walaupun mereka mengatakan bahwa matematika harus dipelajari untuk keperluan lain. Objek matematika ada di dunia nyata, tetapi terpisah dengan akal. Aristoteles berpendapat lain yang memandang matematika sebagai salah satu dari tiga dasar yang membagi ilmu pengetahuan fisik, matematika, dan teologi.²⁴ Matematika didasarkan atas kenyataan yang dialami yaitu kenyataan yang diperoleh dari eksperimen, observasi, dan abstraksi.

Secara etimologis Elea Tinggi, perkataan matematika berarti “ilmu pengetahuan yang diperoleh dengan bernalar”. Hal ini dimaksudkan bukan berarti ilmu lain diperoleh tidak melalui penalaran, akan tetapi matematika lebih menekankan aktivitas dalam dunia rasio (penalaran), sedangkan menurut Ruseffendi ,

²² John A. Van de Walle, *Matematika Sekolah ...*hal. 13

²³ *Ibid.*, hal. 17

²⁴ Abdul Halim Fathani, *Matematika Hakikat ...*,hal. 21

matematika terbentuk sebagai hasil pemikiran manusia yang berhubungan dengan ide, proses dan penalaran.²⁵

Matematika juga telah dijelaskan dalam beberapa ayat-ayat al-Qur'an meski dengan cara tersirat. Diantara ayat-ayat al-Qur'an menjelaskan tentang matematika sebagai berikut:²⁶

Q.S Al-Furqan ayat 2:

أَلَدِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلم يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلم يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ

كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ۚ

Artinya : Allah yang memiliki langit dan bumi tiada beranak dan tiada sekutu bagi-NYA dalam kekuasaan-NYA, dan menjadikan segala sesuatu dengan ukuran yang tertentu. (Q.S Al-Furqan : 2)

Q.S Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ۚ

Artinya : Sesungguhnya semua yang KAMI ciptakan dengan ketentuan kadarnya (takdirnya). (Q.S Al-Qamar : 49)

Berdasarkan kedua ayat di atas menunjukkan bahwa Allah telah menciptakan segala sesuatu berdasarkan ukuran atau takdirnya. Hal ini artinya Allah telah menyinggung terkait ukuran sebagaimana beberapa pendefinisian matematika yang berkaitan dengan ukuran. Ayat ini tidak secara tersurat menyatakan bahwa matematika itu apa,

²⁵ Erman Suherman, *Strategi Pembelajaran Matematika ...*, hal. 16

²⁶ Tarjamah Al-quran Al-Hakim, (Surabaya : CV Sahabat Ilmu, 2001), cet kesepuluh

melainkan hanya mengisyaratkan bahwa Allah telah membahas sedikit banyak terkait ukuran sebagaimana ukuran yang terdapat dalam matematika. Selain itu, Al-qur'an juga memberikan gambaran terkait perhitungan yang masih berkaitan dengan matematika meski tidak dijelaskan secara terang-terangan, sebagaimana firman Allah dalam Q.S Al-Baqarah ayat 202 dan Q.S Al-Imran ayat 199, sebagai berikut;²⁷

Q.S Al-Baqarah ayat 202 :


 أُولَٰئِكَ هُم نَصِيبٌ مِّمَّا كَسَبُوا ۗ وَاللَّهُ سَرِيعُ الْحِسَابِ

Artinya : *Mereka itulah orang-orang yang mendapat bahagian dari usahanya, dan Allah sangat cepat perhitungannya.* (Q.S Al-Baqarah : 202)

Berdasarkan definisi matematika dari beberapa ahli di atas, maka penulis memberikan kesimpulan terkait matematika ialah suatu mata pelajaran yang berkaitan dengan penggunaan istilah-istilah serta lambang-lambang atau simbol-simbol matematis. Matematika sendiri menuntut seseorang yang mempelajarinya mampu menarik kesimpulan-kesimpulan dari beberapa pernyataan, dimana hal ini sering disebut dengan penalaran. Matematika juga dapat diartikan sebagai pola atau bentuk sesuatu dari sebuah pernyataan.

Dari beberapa pendefinisian matematika dari beberapa ahli di atas, menurut saya Matematika terbentuk dari pengalaman manusia.

²⁷ *Ibid.*,

Pengalaman terjadi akibat manusia melakukan segala aktivitas dalam kehidupan sehari-hari. Aktivitas tersebut tidak terlepas dari matematika, misalnya pembelajaran biologi, kimia, fisika, ekonomi, dan ilmu pengetahuan lain pun semua menggunakan matematika dalam perhitungannya. Segala aktivitas tersebut diproses dalam akal (rasio) manusia, kemudian di analisis dalam otak. Proses yang terjadi dalam otaklah yang nantinya akan menghasilkan kesimpulan. Kesimpulan tersebut berupa konsep-konsep matematika yang dapat dinalar oleh akal manusia.

b. Karakteristik Matematika

Dari penjelasan beberapa definisi matematika di atas, kita dapat melihat bahwa pendefinisian tentang matematika bermacam-macam sesuai dengan latar belakang orang yang mendefinisikannya. Begitu banyaknya definisi-definisi tentang matematika tetapi tidak satupun perumusan yang dapat diterima umum atau sekurang-kurangnya dapat diterima dari berbagai sudut pandang. Tetapi dibalik keragaman semua itu, dalam setiap pandangan matematika terdapat beberapa ciri matematika yang secara umum disepakati bersama. Karakteristik matematika, diantaranya adalah sebagai berikut :²⁸

²⁸ Abdul Halim Fathani, *Matematika Hakikat ...*, hal. 59

1) Memiliki objek kajian yang abstrak

Matematika mempunyai objek kajian yang bersifat abstrak, walaupun tidak setiap yang abstrak adalah matematika. Sementara beberapa matematikawan menganggap objek matematika itu “konkret” dalam pikiran mereka, maka kita dapat menyebut objek matematika secara lebih tepat sebagai objek mental atau pikiran.²⁹

2) Bertumpu pada kesepakatan

Dalam matematika kesepakatan atau konvensi merupakan tumpuan yang amat penting. Kesepakatan yang amat mendasar adalah aksioma (postulat, pernyataan pangkal yang tidak perlu pembuktian. Dan konsep primitif (pengertian pangkal yang tidak perlu didefinisikan, *undefined term*). Aksioma yang diperlukan untuk menghindari proses berputar-putar dalam pembuktian (*circulus in probando*). Sedangkan konsep primitif diperlukan untuk menghindari proses berputar-putar dalam pendefinisian (*circulus in defienindo*). Beberapa aksioma dapat membentuk suatu sistem aksioma, yang selanjutnya dapat menurunkan beberapa teorema. Dari satu atau lebih konsep primitif, dapat dibentuk konsep baru melalui pendefinisian.³⁰

²⁹ *Ibid.*,

³⁰ *Ibid.*, hal. 66-67

3) Berpola pikir deduktif

Dalam matematika, hanya diterima pola pikir deduktif. Pola pikir deduktif secara sederhana dapat dikatakan pemikiran yang berpangkal dari hal yang bersifat umum diterapkan atau diarahkan kepada hal yang bersifat khusus. Pola pikir deduktif ini dapat terwujud dalam bentuk yang amat sederhana tetapi juga dapat terwujud dalam bentuk yang tidak sederhana.³¹

4) Konsisten dalam sistemnya

Dalam matematika terdapat berbagai banyak sistem yang dibentuk dari beberapa aksioma dan memuat beberapa teorema. Ada sistem-sistem yang berkaitan, ada pula sistem-sistem yang dapat dipandang lepas satu dengan lainnya. Sistem-sistem aljabar dengan sistem-sistem geometri dapat dipandang lepas satu sama lainnya. Di dalam sistem aljabar, terdapat pula beberapa sistem lain yang lebih “kecil” yang berkaitan satu dengan yang lainnya. Demikian pula di dalam sistem geometri. Di dalam masing-masing sistem, berlaku ketatasan atau konsistensi. Artinya, dalam setiap sistem tidak boleh terdapat kontradiksi. Suatu teorema ataupun definisi harus menggunakan istilah atau konsep yang telah ditetapkan terlebih dahulu. Konsistensi itu lebih baik dalam makna maupun dalam hal nilai kebenarannya. Antara sistem atau

³¹ *Ibid.*, hal. 68

struktur yang satu dengan sistem atau struktur yang lain tidak mustahil terdapat pernyataan yang saling kontradiksi.³²

5) Memiliki simbol yang kosong dari arti

Dalam matematika, banyak sekali simbol baik yang berupa huruf latin, huruf Yunani, maupun simbol-simbol khusus lainnya. Simbol-simbol tersebut membentuk kalimat dalam matematika yang biasa disebut model matematika. Model matematika dapat berupa persamaan, pertidaksamaan, maupun fungsi, selain itu ada pula model matematika yang berupa gambar (*pictorial*) seperti bangun-bangun geometrik, grafik, maupun diagram. Model matematika, seperti $x + y = z$ tidak selalu berarti bahwa x , y , z berarti bilangan. Secara sederhana, bilangan-bilangan yang biasa digunakan dalam pembelajaran pun bebas dari arti atau makna *real*. Bilangan tersebut dapat berarti panjang, jumlah barang, volume, nilai uang, dan lain-lain tergantung pada konteks penerapan bilangan tersebut.³³

6) Memperhatikan semesta pembicaraan

Sehubungan dengan kosongnya arti dari simbol-simbol matematika, bila kita menggunakannya kita seharusnya memerhatikan pula lingkup pembicaraannya. Lingkup atau sering disebut semesta pembicaraan bisa sempit bisa pula luas.

³² *Ibid.*, hal. 69-70

³³ *Ibid.*, hal. 70

Bila kita berbicara tentang bilangan-bilangan, maka simbol-simbol tersebut menunjukkan bilangan-bilangan pula. Begitu pula bila kita berbicara tentang transformasi geometris (seperti translasi, rotasi, dan lain-lain), maka simbol-simbol matematikanya menunjukkan suatu transformasi pula. Benar salahnya atau ada tidaknya penyelesaiannya suatu soal atau masalah, juga ditentukan oleh semesta pembicaraan yang digunakan.³⁴

2. Proses Belajar dan Pembelajaran Matematika

a. Belajar Matematika

Belajar selalu berkenaan dengan perubahan-perubahan pada diri orang yang belajar, apakah itu mengarah kepada yang lebih baik atau pun yang kurang baik, direncanakan atau tidak. Unsur perubahan dan pengalaman hampir selalu ditekankan dalam rumusan atau definisi tentang belajar, yang dikemukakan oleh para ahli:

- 1) Menurut Witherington “belajar merupakan perubahan dalam kepribadian, yang dimanifestasikan sebagai pola-pola respons yang baru yang membentuk keterampilan, sikap, kebiasaan, pengetahuan dan kecakapan”.³⁵

³⁴ *Ibid.*, hal. 71

³⁵ Nana Syaodih Sukmadinata, *Landasan Psikologi Proses Pendidikan*, (Bandung: Remaja Rosdakarya, 2009), hal. 155

- 2) Crow and Crow berpendapat bahwa “belajar adalah diperolehnya kebiasaan-kebiasaan, pengetahuan, dan sikap baru”.³⁶
- 3) Menurut Hilgard, “belajar adalah suatu proses di mana suatu perilaku muncul atau berubah karena adanya respon terhadap sesuatu situasi”.³⁷
- 4) Menurut Cronbach, menyatakan bahwa “*learning is shown by a change a behavior as a result of experience*” (belajar adalah perubahan tingkah laku yang ditunjukkan sebagai hasil dari pengalaman).³⁸
- 5) W.S. Winkel merumuskan pengertian belajar sebagai suatu aktivitas mental/psikis yang berlangsung dalam interaksi aktif dengan lingkungannya yang menghasilkan perubahan-perubahan dalam pengetahuan-pemahaman, keterampilan dan nilai sikap.³⁹
- 6) Menurut Fontana pengertian belajar adalah proses perubahan tingkah laku individu yang relatif tetap sebagai hasil dari pengalaman.⁴⁰

³⁶ *Ibid.*,

³⁷ *Ibid.*, hal. 156

³⁸ Zainal Arifin Ahmad, *Perencanaan Pembelajaran dari Desain sampai Implementasi*, (Yogyakarta: Pustaka Insan Madani, 2012), hal. 6

³⁹ *Ibid.*,

⁴⁰ Erman Suherman, *Strategi Pembelajaran ...*, hal.7

Secara psikologis, belajar merupakan suatu proses perubahan tingkah laku sebagai hasil dari interaksi dengan lingkungannya dalam memenuhi kebutuhan hidupnya.

Dalam proses belajar matematika menurut Hudoyo, juga terjadi proses berpikir apabila orang itu melakukan kegiatan mental, dan orang yang belajar matematika mesti melakukan kegiatan mental. Dalam berpikir, orang menyusun hubungan-hubungan antara bagian-bagian informasi yang telah direkam dalam pikirnya sebagai pengertian-pengertian. Dari pengertian tersebut, terbentuklah pendapat yang pada akhirnya dapat ditarik kesimpulan.⁴¹ Belajar matematika bagi para siswa, juga merupakan pembentukan pola pikir dalam pemahaman suatu pengertian suatu maupun dalam penalaran suatu hubungan diantara pengertian-pengertian.

Belajar merupakan suatu kewajiban setiap manusia yang ada di dunia ini, tanpa membeda-bedakan jenis kulit, ras, agama, dan lain sebagainya. Perintah belajar juga telah tercantum dalam ayat-ayat al-Qur'an diantaranya Q.S Al-Alaq ayat 1-5 dan Q.S Az-Zumar ayat 9, sebagai berikut:⁴²

⁴¹ Moch Masykur Ag dan Abdul Halim Fathani, *Mathematical Intelligence Cara Cerdas Melatih Otak dan Menanggulangi Kesulitan Belajar*, (Jogjakarta: Ar-Ruzz Media,2007), hal. 43-44

⁴² Tarjamah Al-quran Al-Hakim, (Surabaya : CV Sahabat Ilmu, 2001), cet kesepuluh

Q.S Al-Alaq ayat 1-5 :

اِقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ ۝١ خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ ۝٢ اِقْرَأْ وَ
 رَبُّكَ الْأَكْرَمُ ۝٣ الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ ۝٤ عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ ۝٥

Artinya : *Bacalah dengan nama Tuhanmu yang mencipta. Yang mencipta manusia dari segumpal dara. Bacalah: dan Tuhanmu Yang Termulia. Yang mengajar dengan perantara pena. Mengajar manusia apa yang belum diketahuinya. (Q.S Al-Alaq : 1-5)*

Q.S Az-Zumar ayat 9 :

أَمْ هُوَ قَاتِلٌ أَنَا ءَ الْيَلِ سَا جِدَاوَقَا نِمَايَحْدَرُ الْأَخِرَ دَوَيْرُجُوَارِحْمَةَ رَبِّهِ ۖ قُلْ هَلْ يَسْتَوِي
 الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ ۗ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُو الْأَلْبَابِ ۝٩

Artinya : *“(Apakah orang musyrik yang bakal beruntung)”. Ataukah orang yang tekun beribadah di waktu malam sambil berdiri dan sujud kepada Allah karena takut akan hari akhirat dan mengharap rahmat Allah? Katakanlah: Apakah dapat disamakan orang yang mengetahui dengan orang yang tidak mengetahui. Sesungguhnya yang akan sadar hanyalah mereka yang sempurna akal pikirannya. (Q.S Az-Zumar: 9)*

Kedua ayat di atas menjelaskan bagaimana keutamaan seseorang yang belajar menurut Allah. Seseorang yang belajar atau menuntut ilmu akan lebih mampu mengondisikan diri sejalan dengan pemikiran dan akal yang dia punyai. Belajar pula

yang akan menjadi sumber pengetahuan sebagai penopang kedewasaan berpikir seseorang. Demikian begitu pentingnya seseorang melakukan kegiatan belajar sebagaimana perintah Allah SWT.

Dari berbagai definisi belajar, menurut saya pada intinya belajar mengandung hal-hal pokok sebagai berikut:

- 1) Belajar merupakan proses usaha, dan berarti memerlukan waktu tertentu;
- 2) Terdapat perubahan tingkah laku peserta didik selama proses belajar, baik tingkah laku yang dapat diamati maupun yang tidak;
- 3) Perubahan tingkah laku tersebut meliputi aspek kognitif, afektif, psikomotorik, dan campuran;
- 4) Perubahan terjadi melalui pengalaman atau latihan;
- 5) Perubahan tingkah laku menjadi sesuatu yang relatif menetap;
- 6) Belajar terjadi karena adanya interaksi dengan lingkungannya.

b. Pembelajaran Matematika

Istilah pembelajaran dalam khazanah ilmu pendidikan sering disebut juga dengan pengajaran atau proses belajar-mengajar. Dalam bahasa Inggris disebut dengan *teaching* atau

learning.⁴³ Mengenai makna pembelajaran, para ahli memiliki rumusan yang beragam. Keragaman itu terjadi karena perbedaan penekanan pada aspek-aspek yang terkandung dalam konsep pembelajaran yang memang sangat kompleks. Moh. Uzer Usman, misalnya mengartikan pembelajaran sebagai suatu proses yang mengandung serangkaian perbuatan guru dan siswa atas dasar hubungan timbal balik yang berlangsung dalam situasi edukatif untuk mencapai tujuan tertentu.⁴⁴ Sedangkan Slamet PH mengartikan pembelajaran sebagai pemberdayaan pelajar yang dilakukan melalui interaksi perilaku pegajar dan perilaku pelajar baik di dalam maupun diluar kelas⁴⁵.

Dari pemaparan definisi-definisi diatas dapat disimpulkan bahwa suatu aktivitas dapat disebut pembelajaran jika mengandung unsur pemberi, penerima, isi, upaya pemberi, dan hubungan antara pemberi dan penerima dalam rangka membantu si penerima agar ia bisa mendapatkan isi yang disampaikan pemberi. Pembelajaran yang dimaksud dalam penelitian ini adalah suatu proses interaksi antara guru dan peserta didik yang berisi berbagai kegiatan yang bertujuan agar terjadi proses belajar (perubahan tingkah laku) pada diri peserta didik.

Dalam pembelajaran matematika, para siswa dibiasakan untuk memperoleh pemahaman melalui pengalaman tentang

⁴³ Moch Masykur Ag dan Abdul Halim Fathani, *Mathematical Intelligence ...* hal. 7

⁴⁴ *Ibid.*, hal. 8

⁴⁵ *Ibid.*,

sifat-sifat yang dimiliki dan yang tidak dimiliki dari sekumpulan objek (abstraksi). Dengan pengamatan terhadap contoh-contoh dan bukan contoh diharapkan siswa mampu menangkap pengertian suatu konsep. Selanjutnya dengan abstraksi ini, siswa dilatih untuk membuat perkiraan, terkaan atau kecenderungan berdasarkan kepada pengalaman atau pengetahuan yang dikembangkan melalui contoh-contoh khusus (generalisasi). Di dalam proses penalarannya dikembangkan pola pikir induktif maupun deduktif. Namun tentu kesemuanya itu harus disesuaikan dengan perkembangan kemampuan siswa, sehingga pada akhirnya akan sangat membantu kelancaran proses pembelajaran di sekolah.

Sedangkan dalam GBPP matematika SMU diungkapkan bahwa tujuan khusus pengajaran matematika sekolah menengah umum (SMU) adalah:⁴⁶

- 1) Siswa memiliki pengetahuan matematika sebagai bekal untuk melanjutkan ke pendidikan tinggi;
- 2) Siswa memiliki keterampilan matematika sebagai peningkatan matematika Pendidikan Dasar untuk dapat digunakan dalam kehidupan yang lebih luas (di dunia kerja) maupun dalam kehidupan sehari-hari;

⁴⁶ Erman Suherman, *Strategi Pembelajaran ...*, hal. 59

- 3) Siswa memiliki pandangan yang lebih luas serta memiliki sikap menghargai kegunaan matematika, sikap kritis, logis, objektif, terbuka, kreatif, serta inovatif;
- 4) Siswa memiliki kemampuan yang dapat dialihgunakan (*transferable*) melalui kegiatan matematika di SMU.

Setiap tujuan yang ingin dicapai dalam proses pembelajaran matematika pada dasarnya merupakan sasaran yang ingin dicapai sebagai hasil dari proses pembelajaran matematika tersebut. Karenanya sasaran tujuan pembelajaran matematika tersebut dianggap tercapai bila siswa telah memiliki sejumlah pengetahuan dan kemampuan di bidang matematika yang dipelajari.

Mengingat hal-hal tersebut diatas, pembelajaran matematika di sekolah memiliki karakteristik, yaitu:⁴⁷

- 1) Pembelajaran matematika adalah berjenjang (bertahap)
- 2) Pembelajaran matematika mengikuti metode spiral
- 3) Pembelajaran matematika menekankan pola pikir deduktif
- 4) Pembelajaran matematika menganut kebenaran konsistensi.

⁴⁷ Ibid., hal 68-69

3. Kemampuan Penalaran Matematika

a. Definisi Kemampuan

Kemampuan mempunyai arti kesanggupan, kecakapan, atau kekuatan. Setiap anak didik mempunyai kemampuan dasar yang dibawa sejak lahir dari generasi sebelumnya. Kemampuan dasar tersebut selanjutnya dikembangkan dengan adanya pengaruh dari lingkungan.⁴⁸

Para ahli mengatakan bahwa setiap anak mempunyai kemampuan dasar yang berbeda antara satu dengan yang lain. Kemampuan dasar anak yang berbeda tersebut meliputi kemampuan mengingat, kemampuan berpikir, kemampuan memberi tanggapan, kemampuan berfantasi, kemampuan mengamati, kemampuan merasakan, dan kemampuan memperhatikan. Karena adanya perbedaan kemampuan-kemampuan di atas setiap anak mempunyai kemampuan belajar yang berbeda.

Berdasarkan uraian di atas, menurut saya kemampuan adalah kecakapan siswa dalam melakukan suatu hal, dimana kecakapan tersebut dimiliki sejak lahir dan dapat dikembangkan dalam lingkungannya.

⁴⁸ Cholil dan Sugeng Kurniawan, *Psikologi Pendidikan Telaah Teoritik dan Praktik*, (Surabaya: IAIN Sunan Ampel, 2011), hal. 182-183

b. Penalaran

Menurut Keraf, penalaran (jalan pikiran/*reasoning*) sebagai “proses berfikir yang berusaha menghubungkan-hubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi yang diketahui menuju kepada suatu kesimpulan.⁴⁹ Pada intinya penalaran adalah suatu kegiatan, suatu proses atau suatu aktivitas berpikir untuk menarik kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru yang benar berdasarkan pada beberapa pernyataan yang kebenarannya telah dibuktikan atau diasumsikan sebelumnya.

Dikenal ada 2 macam penalaran, yakni:⁵⁰

1) Penalaran Induktif

Penalaran induktif merupakan suatu kegiatan, atau suatu proses/aktivitas berfikir untuk menarik suatu kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru yang bersifat umum (*general*) berdasarkan beberapa pernyataan khusus yang diketahui benar. Pendapat John Stuart Mill yang diterjemahkan Soekardijo, menyatakan “bahwa induksi merupakan suatu kegiatan, dimana kita menyimpulkan, bahwa apa yang kita ketahui benar untuk kasus-kasus, juga akan benar untuk semua kasus yang serupa”.⁵¹ Penalaran induktif terdiri dari melakukan pengamatan kemudian menarik kesimpulan berdasarkan pengamatan. Dimana

⁴⁹ Fajar Shadig, M. Apss. Sc, *Pemecahan Masalah ...* hal. 2

⁵⁰ *Ibid.*, hal. 4c

⁵¹ *Ibid.*,

bergerak dari yang khusus suatu pengamatan menuju yang umum sebuah kesimpulan yang luas. Penarikan induktif adalah penarikan kesimpulan yang bersifat umum atau khusus berdasarkan data yang teramati, dimana nilai kebenaran dalam penalaran induktif dapat bersifat benar atau salah.⁵²

Penggunaan penalaran induktif umumnya disertai dengan pertanyaan-pertanyaan berikut:⁵³

- a) Apa yang anda amati? Petunjuk mana yang layak?
- b) Apa yang dapat anda simpulkan dari petunjuk-petunjuk tersebut?
- c) Apakah kesimpulan tersebut logis?

2) Penalaran deduktif

Jacobs menyatakan penalaran deduktif merupakan suatu cara penarikan kesimpulan dari pernyataan-pernyataan atau fakta-fakta yang dianggap benar dengan menggunakan logika.⁵⁴ Unsur utama pengerjaan matematika pada penalaran deduktif yang bekerja keras atas dasar asumsi, yaitu kebenaran suatu konsep atau pernyataan yang diperoleh sebagai akibat logis dari pernyataan sebelumnya. Penalaran

⁵² Ike Nataliasari, *Penggunaan Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Think Pair Share (TPS) Untuk Meningkatkan Kemampuan Penalaran Dan Pemecahan Masalah Matematis Siswa MTS*, (Tasikmalaya: Jurnal Pendidikan dan Keguruan, 2014), hal. 4

⁵³ Terry, *Reasoning Skills Succes Tes Kemampuan Penalaran Dalam 20 Menit*, (Jogjakarta: Learning Express, 2009), hal. 78

⁵⁴ *Ibid.*, hal.6

deduktif adalah penarikan kesimpulan berdasarkan aturan yang disepakati, dimana nilai kebenarannya dalam penalaran deduktif mutlak benar atau salah atau tidak kedua-duanya.⁵⁵

Sistem matematika pada umumnya disusun dengan sistem yang terdiri dari:⁵⁶

- a) Hukum-hukum logika (postulat-postulat dan dalil-dalil dari logika);
- b) Himpunan istilah yang tidak didefinisikan;
- c) Himpunan istilah yang didefinisikan;
- d) Himpunan postulat yang kebenarannya sudah ditetapkan (aksioma);
- e) Himpunan dalil yang kebenarannya sudah dibuktikan.

Dengan kata lain, penalaran deduktif diiringi pertanyaan:⁵⁷

- a) Apa kesimpulannya?
- b) Bukti apa yang menyokongnya?
- c) Apakah bukti tersebut logis?

c. Penalaran Matematika

Menurut Steen, penalaran matematika adalah penalaran tentang objek matematika, namun hubungan antara penalaran matematika dan matematika tidak jelas, sehingga diperlukan beberapa proses elaborasi.

⁵⁵ John A. Van de Walle, *Matematika Sekolah...*, hal. 38

⁵⁶ Endang Setyo Winarni dan Sri Harmini, *Matematika Untuk PGSD*, (Bandung: Remaja Rosdakarya, 2014), hal. 4

⁵⁷ Terry, *Reasoning Skill Succes...*, hal. 79

Gardner, *et. all.*, mengungkapkan, bahwa penalaran matematis adalah kemampuan menganalisis, menggeneralisasi, mensintesis/mengintegrasikan, memberikan alasan yang tepat dan menyelesaikan tidak rutin.⁵⁸

Penalaran matematika menurut Ball dan Basss adalah keterampilan dasar dari matematika dan diperlukan untuk beberapa tujuan, untuk memahami konsep matematika, menggunakan ide-ide matematika dan prosedur fleksibel, dan untuk merekonstruksi pemahaman tapi lupa pengetahuan matematikanya.⁵⁹ Lebih lanjut Ball dan Bass menyampaikan peserta didik yang belajar matematika melalui penalaran dapat menemukan matematika lebih bermakna, karena penalaran matematika memungkinkan peserta didik untuk membentuk hubungan antara pengetahuan baru dengan pengetahuan yang dimiliki sebelumnya. Peserta didik dapat mengintegrasikan pengetahuan dan kemampuan akalnya untuk melihat aktivitas matematika sebagai sesuatu yang sangat berharga.

NCTM menyatakan bahwa penalaran matematika terjadi ketika siswa:⁶⁰ (1) mengamati pola atau keteraturan, (2) menemukan generalisasi dan konjektur berkenaan dengan keteraturan yang diamati, (3) menilai/menguji konjektur, (4) mengkonstruksi dan menilai argumen matematika dan (5)

⁵⁸ Karunia Eka Lestari dan Mokhammad Ridwan Yudhanegara, *Penelitian Pendidikan ...* hal. 82

⁵⁹ Elly Susanti, *Meningkatkan Penalaran Siswa Melalui Koneksi Matematika*, (Seminar Nasional Matematika dan Matematika dalam Membangun Karakter Guru dan Siswa, 2012), hal. 3

⁶⁰ *Ibid.*, hal. 3

menggambarkan (menvalidasi) konklusi logis tentang sejumlah ide dan keterkaitannya. Dari uraian di atas, yang dimaksud dalam penelitian ini Kemampuan penalaran matematika adalah proses berfikir seseorang dalam menarik suatu kesimpulan yang benar dan logis sehingga dapat membuat pernyataan yang baru.

Indikator penalaran matematis siswa yang diuraikan oleh Sulistiawati sebagai berikut: (1) memperkirakan jawaban dan proses solusi, (2) menganalisis pernyataan pernyataan dan memberikan penjelasan/alasan yang dapat mendukung atau bertolak belakang, (3) mempertimbangkan validitas dari argumen yang menggunakan berpikir deduktif atau induktif, (4) menggunakan data yang mendukung untuk menjelaskan mengapa cara yang digunakan serta jawaban adalah benar; dan memberikan penjelasan dengan menggunakan model, fakta, sifat-sifat, dan hubungan.⁶¹

Adapun yang menjadi indikator penalaran matematis menurut Peraturan Dirjen Dikdasmen No. 506/C/Kep/PP/2004 yaitu:⁶²

- 1) Kemampuan menyajikan pernyataan matematika secara lisan, tertulis, gambar dan diagram.
- 2) Kemampuan mengajukan dugaan.
- 3) Kemampuan melakukan manipulasi matematika.

⁶¹ Hidayati dan Widodo, *Profil Penalaran Matematis Siswa Dalam Memecahkan Masalah Matematika Pada Materi Pokok Dimensi Tiga Berdasarkan Kemampuan Siswa Di SMA Negeri 5 Kediri*, (Jurnal Math Educator Nusantara Volume 01 Nomor 02, Nopember 2015), hal. 3

⁶² Fadjar Shadiq, *Pembelajaran Matematika Cara Meningkatkan Kemampuan Berpikir Siswa*, (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2014), hal. 51

- 4) Kemampuan menyusun bukti, memberikan alasan/bukti terhadap kebenaran solusi.
- 5) Kemampuan menarik kesimpulan dari pernyataan.
- 6) Memeriksa kesahihan suatu argumen.
- 7) Menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.

Dari beberapa pendapat di atas indikator-indikator yang digunakan untuk mengetahui kemampuan penalaran siswa dalam penelitian ini adalah:

- 1) Siswa dapat menggunakan pola-pola yang diketahui, kemudian menghubungkannya untuk menganalisa situasi matematik yang ada dalam soal;
- 2) Siswa dapat memperkirakan proses penyelesaian sebuah soal matematika;
- 3) Siswa dapat memecahkan masalah menggunakan langkah penyelesaian yang sistematis sesuai dengan ketentuan-ketentuan yang ada dengan mempertimbangkan validitas dari argumen yang menggunakan berpikir deduktif atau induktif.
- 4) Siswa dapat menarik kesimpulan yang logis dengan memberikan alasan pada langkah penyelesaiannya sehingga diperoleh jawaban yang benar.

Tabel 2.1
Indikator Kemampuan Penalaran Matematika

INDIKATOR	DESKRIPSI
Menganalisa Situasi Matematika	✓ Siswa dapat menggunakan pola-pola yang diketahui untuk menuliskan apa yang diketahui dan yang ditanyakan dari soal
Merencanakan proses penyelesaian	✓ Siswa dapat memperkirakan proses penyelesaian dengan sangat sesuai
Memecahkan persoalan dengan langkah yang sistematis	✓ Siswa dapat memecahkan persoalan dengan langkah yang sistematis dengan sangat sesuai
Menarik kesimpulan yang logis	✓ Siswa dapat menarik kesimpulan yang logis dari hasil penyelesaian masalah dengan benar dan memberikan alasan pada langkah penyelesaian

d. Ayat-ayat Al-Qur'an tentang Penalaran atau Berpikir

Di dalam Al-Qur'an maupun Hadits banyak sekali yang mengandung perintah kepada manusia supaya menggunakan akal nya untuk berpikir. Karena bila akal dipotensialkan untuk berpikir maka kita akan mengetahui bagaimana Allah menciptakan sesuatu secara adil dan tidak ada satu pun tercipta melainkan membawa manfaat.

Beberapa ayat yang memerintahkan kita untuk berpikir diantaranya:

1) Surat Al-Baqarah ayat 219

يَسْأَلُونَكَ عَنِ الْخَمْرِ وَالْمَيْسِرِ ۖ قُلْ فِيهِمَا إِثْمٌ كَبِيرٌ وَمَنَافِعُ لِلنَّاسِ وَإِثْمُهُمَا أَكْبَرُ مِن نَّفْعِهِمَا

ۗ وَيَسْأَلُونَكَ مَاذَا يُنْفِقُونَ قُلِ الْعَفْوَ ۗ كَذَلِكَ يُبَيِّنُ اللَّهُ لَكُمْ آيَاتِهِ لَعَلَّكُمْ تَتَفَكَّرُونَ ۗ

Artinya: Mereka bertanya kepadamu tentang khamar dan judi. Katakanlah: Pada keduanya terdapat dosa yang besar dan beberapa manfaat bagi manusia, tetapi dosa keduanya lebih besar dari manfaatnya. Dan mereka bertanya kepadamu apa yang mereka nafkahkan. Katakanlah: "Yang lebih dari keperluan". Demikianlah Allah menerangkan ayat-ayat-Nya kepadamu supaya kamu berpikir.⁶³(QS. Al-Baqarah: 219)

2) Surat Al-Baqarah ayat 266

أَيُّودُ أَحَدُكُمْ أَنْ تَكُونَ لَهُ جَنَّةٌ مِّنْ نَّحِيلٍ وَأَعْنَابٍ بِحَرِيِّ مِنْ تَحْتِهَا الْأَنْهَارُ لَهُ فِيهَا
 مِنْ كُلِّ الثَّمَرَاتِ وَأَصَابَهُ الْكِبَرُ وَلَهُ ذُرِّيَّةٌ ضِعْفًا فَأَصَابَهَا إِعْصَارٌ فِيهِ نَارٌ
 فَاحْتَرَقَتْ ۗ كَذَلِكَ يُبَيِّنُ اللَّهُ لَكُمْ الْآيَاتِ لَعَلَّكُمْ تَتَفَكَّرُونَ

Artinya: Apakah ada salah seorang di antaramu yang ingin mempunyai kebun kurma dan anggur yang mengalir di bawahnya sungai-sungai; dia mempunyai dalam kebun itu segala macam buah-buahan, kemudian datanglah masa tua pada orang itu sedang dia mempunyai keturunan yang masih kecil-kecil. Maka kebun itu ditiup angin keras yang mengandung api, lalu terbakarlah. Demikianlah Allah menerangkan ayat-ayat Nya

⁶³ Al Qur'an Surah Al Baqarah ayat 219 Juz 1

kepada kamu supaya kamu memikirkannya. (QS. Al-Baqarah: 266)⁶⁴

4) Surat Al-An'am ayat 50

إِن قُلْ لَّا أَقُولُ لَكُمْ عِنْدِي خَزَائِنُ اللَّهِ وَلَا أَعْلَمُ الْغَيْبَ وَلَا أَقُولُ لَكُمْ إِنِّي مَلَكٌ
أَفَلَا تَتَفَكَّرُونَ ۗ أَتَّبِعُ إِلَّا مَا يُوحَىٰ إِلَيَّ قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الْأَعْمَىٰ وَالْبَصِيرُ

Artinya: Katakanlah: Aku tidak mengatakan kepadamu, bahwa perbendaharaan Allah ada padaku, dan tidak (pula) aku mengetahui yang ghaib dan tidak (pula) aku mengatakan kepadamu bahwa aku seorang malaikat. Aku tidak mengikuti kecuali apa yang diwahyukan kepadaku. Katakanlah: "Apakah sama orang yang buta dengan yang melihat?" Maka apakah kamu tidak memikirkan(nya)?. (QS. Al-An'am: 50)⁶⁵

Dari ketiga ayat tersebut merupakan sebagian kecil darisekian ayat yang memerintahkan untuk berpikir. Manusia yang diciptakan lebih sempurna dibandingkan dengan makhluk yang lainnya, dimana kesempurnaan ini dapat dilihat dari adanya akal yang dapat dipergunakan. Allah SWT memerintahkan kepada kita melalui Surat Al-Baqarah dan Surat Al-An'am untuk mempergunakan akal dalam menilai, memilah dan memilih, serta memperhatikan perbedaan sebagai tanda kekuasaanNya. Menjadi

⁶⁴ Al Qur'an Surah Al Baqarah ayat 266

⁶⁵ Al Qur'an Surah Al An'am ayat 50

sangat penting, terlebih kepada seorang guru untuk senantiasa mengajak siswa mempergunakan akal yang telah Allah SWT anugerahkan dengan melakukan pembelajaran yang menuntut keaktifan berpikir siswa berdasarkan pada tingkat perkembangan kognitif atau intelektual.

4. Pemecah Masalah

Masalah adalah ketidaksesuaian antara harapan dan kenyataan. Masalah adalah ketidaksesuaian antara tujuan dengan kesulitan menentukan jawaban yang tepat dan cepat. Tidak semua pertanyaan adalah masalah, hanya pertanyaan yang menimbulkan konflik dalam pikiran siswa. Konflik ini tidak berasal dari karakteristik masalah tetapi tergantung kepada pengetahuan awal, pengalaman, dan pelatihan siswa. Masalah bagi satu siswa bisa tidak menjadi masalah bagi siswa.

Masalah adalah situasi yang dihadapi oleh seseorang atau kelompok yang memerlukan suatu pemecahan tetapi tidak memiliki cara yang langsung dapat menentukan solusinya.⁶⁶

Permasalahan yang dihadapi dapat dikatakan masalah jika masalah tersebut tidak bisa dijawab secara langsung, karena harus menyeleksi informasi (data) terlebih dahulu, serta jawaban yang diperoleh bukanlah kategori masalah yang rutin (tidak sekedar memindahkan/mentransformasi dari bentuk kalimat biasa kepada

⁶⁶ S. Klurik dan J. A. Rudnick, *The New Source Book...* hal. 4.

kalimat matematika).⁶⁷Ruseffendi menambahkan bahwa suatu persoalan dikatakan sebagai suatu masalah jika: (1) persoalan ini tidak dikenalnya, maksudnya ialah siswa belum memiliki prosedur atau algoritma tertentu untuk menyelesaikannya; (2) siswa harus mampu menyelesaikannya, baik kesiapan mentalnya maupun pengetahuan yang dimiliki, terlepas dari apakah dia sampai atau tidak pada jawabannya; (3) sesuatu merupakan permasalahan baginya bila dia ada niat untuk menyelesaikannya.⁶⁸

Masalah matematika umumnya berbentuk soal matematika tetapi tidak semua soal matematika merupakan masalah. Seperti yang diungkapkan oleh Ruseffendi bahwa masalah dalam matematika adalah suatu persoalan yang ia sendiri mampu menyelesaikannya tanpa menggunakan cara atau algoritma yang rutin.⁶⁹ Holmes menyatakan bahwa terdapat dua kelompok masalah dalam pembelajaran matematika yaitu masalah rutin dan masalah nonrutin. Masalah rutin dapat dipecahkan dengan menggunakan metode yang sudah ada. Masalah rutin sering disebut sebagai masalah penerjemahan karena deskripsi situasi dapat diterjemahkan dari kata-kata menjadi simbol-simbol. Masalah nonrutin mengarah kepada masalah proses. Masalah nonrutin membutuhkan lebih dari sekedar

⁶⁷ Nahrowi Adjie dan Maulana, *Pemecahan Masalah Matematika*, (Bandung: UPI Press, 2006), cetakan pertama, hal. 4.

⁶⁸ Suci Septia Rahmawati, "*Profil Penalaran Kreatif Siswa SMP dalam Menyelesaikan Masalah Bangun Datar Ditinjau dari Kemampuan Matematika dan Gender*". (UIN Sunan Ampel, Skripsi, 2015), hal. 20.

⁶⁹ Ruseffendi, *Pengantar Kepada Membantu Guru...*, hal. 335.

penerjemahan masalah menjadi kalimat matematika dan penggunaan prosedur yang sudah diketahui. Masalah nonrutin mengharuskan pemecah masalah untuk membuat sendiri metode pemecahannya.

Pendapat Gagne, pemecahan masalah dipandang sebagai suatu proses untuk menemukan kombinasi dari sejumlah aturan yang dapat diterapkan dalam upaya mengatasi situasi yang baru. Pemecahan masalah tidak sekedar sebagai bentuk kemampuan menerapkan aturan-aturan yang telah dikuasai melalui kegiatan-kegiatan belajar terdahulu, melainkan lebih dari itu, merupakan proses untuk mendapatkan seperangkat aturan pada tingkat yang lebih tinggi. Apabila seseorang telah mendapatkan suatu kombinasi perangkat aturan yang terbukti dapat dioperasikan sesuai dengan situasi yang sedang dihadapi maka ia tidak saja dapat memecahkan masalah, melainkan juga telah berhasil menemukan sesuatu yang baru. Sesuatu yang dimaksud adalah perangkat prosedur atau strategi yang memungkinkan seseorang dapat meningkatkan kemandirian dalam berpikir.⁷⁰

Menurut NCTM, pemecahan masalah bukan saja merupakan suatu sasaran belajar matematika tetapi sekaligus merupakan alat utama untuk belajar.⁷¹ Dengan mengembangkan kemampuan memecahkan masalah dalam matematika, siswa akan mendapatkan cara-cara berpikir, kebiasaan tekun, dan keingintahuan, serta

⁷⁰ Made Wena, *Strategi Pembelajaran Inovatif...*, hal. 52

⁷¹ Rusman, *Model-Model Pembelajaran Mengembangkan Profesionalisme Guru*, (Jakarta: Grafindo Persada, 2010), hal. 245-247

kepercayaan diri di dalam situasi-situasi tidak biasa, sebagaimana situasi yang akan mereka hadapi di luar ruang kelas matematika dalam mengantisipasi perkembangan ilmu pengetahuan dan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

Pemecahan masalah merupakan salah satu area dalam pembelajaran matematika. Pemecahan masalah dalam matematika merupakan proses menemukan langkah-langkah penyelesaian masalah yang dihadapi.⁷² Pemecahan masalah adalah usaha mencari solusi penyelesaian dari suatu situasi yang dihadapi sehingga mencapai tujuan yang diinginkan. Bahkan dalam hal ini Allah SWT telah menjanjikan kepada seluruh umatnya bahwa Allah SWT akan ada kemudahan dibalik kemudahan dalam memecahkan masalah. Sesuai dengan firman Allah SWT pada surah Al-Insyirah ayat 1-8, yaitu:⁷³

أَمْ نَشْرَحُ لَكَ صَدْرَكَ ﴿١﴾ وَوَضَعْنَا عَنكَ وِزْرَكَ ﴿٢﴾ الَّذِي أَنْقَضَ ظَهْرَكَ ﴿٣﴾ وَرَفَعْنَا لَكَ ذِكْرَكَ ﴿٤﴾ فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾ فَإِذَا فَرَغْتَ فَانصَبْ ﴿٧﴾
وَإِلَىٰ رَبِّكَ فَارْغَبْ ﴿٨﴾

Artinya: *Bukankah Kami telah melapangkan untukmu dadamu dan Kami telah menghilangkan dari padamu bebanmu yang memberatkan punggungmu dan Kami tinggikan bagimu sebutan (nama)mu karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada*

⁷² Dewi Asmarani, Meningkatkan Self Regulated Learning (Srl) Siswa Melalui Metode Pemecahan Masalah, (*Jurnal Program Studi Matematika: Volume 3, Nomor 1, Mei-Oktober 2016*), hal. 8

⁷³ Al Quran Surah Al-Insyirah Ayat 1-8 Juz 30

kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain, dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap.

Dalam proses pemecahan masalah yang sulit pasti ada jalan keluar dalam penyelesaiannya, asalkan kita mau terus berusaha dan sungguh-sungguh. Alawiyah dalam pendapatnya mengatakan bahwa memecahkan suatu masalah matematika itu bisa merupakan kegiatan menyelesaikan soal cerita, menyelesaikan soal yang tidak rutin (nonrutin), mengaplikasikan matematika dalam kehidupan sehari-sehari atau keadaan lainnya, dan membuktikan atau menciptakan atau menguji konjektur.⁷⁴

Memecahkan masalah tidak hanya merupakan suatu tujuan dari belajar matematika, tetapi juga merupakan alat utama untuk menghadapi masalah-masalah yang lain. Pemecahan masalah merupakan bagian integral dari matematika, bukan merupakan bagian terpisahkan dari matematika. Dalam memecahkan masalah, siswa harus didorong untuk merefleksikan pikiran mereka sehingga mereka dapat menerapkan dan menyesuaikan strategi mereka untuk menghadapi masalah lain dan dalam konteks lainnya. Dengan memecahkan masalah matematika, siswa memperoleh cara berpikir,

⁷⁴ Tuti Alawiyah, “Pembelajaran untuk Meningkatkan Kemampuan Komunikasi dan Pemecahan Masalah Matematik”, (Paper Presented at Seminar Nasional Pendidikan Matematika PPS STKIP Siliwangi, Bandung, 2014), hal. 181.

mempunyai rasa ingin tahu dan ketekunan, kepercayaan diri dalam situasi yang asing.

Salah satu langkah pemecahan masalah matematika yang terkenal adalah pemecahan masalah Polya. Menurut Polya, pemecahan masalah matematika terdiri dari empat langkah yaitu:⁷⁵

1. Memahami masalah (*Understanding the Problem*)

Pemberian masalah kepada siswa tanpa adanya pemahaman mengakibatkan siswa tidak mungkin mampu menyelesaikan masalah tersebut dengan benar. Langkah ini dimulai dengan pengenalan akan apa yang diketahui atau apa yang ingin didapatkan kemudian pemahaman apa yang diketahui serta data yang tersedia dilihat apakah data tersebut mencukupi untuk menentukan apa yang ingin didapatkan.

2. Merencanakan penyelesaian (*Devising Plan*)

Dalam menyusun rencana pemecahan masalah diperlukan kemampuan untuk melihat hubungan antara data serta kondisi apa yang tersedia dengan data apa yang diketahui atau dicari. Langkah selanjutnya yakni menyusun sebuah rencana pemecahan masalah dengan memperhatikan atau mengingat kembali pengalaman sebelumnya tentang masalah-masalah yang berhubungan. Tujuan langkah ini yakni siswa dapat membuat

⁷⁵ Zainullah Zuhri, “Analisis Koneksi Matematika Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Dibedakan dari Kecenderungan Gaya Berpikir”. (UIN Sunan Ampel Surabaya, Skripsi, 2016), hal. 14.

suatu model matematika untuk selanjutnya dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan-aturan matematika yang ada.

3. Melakukan rencana penyelesaian (*Carrying Out the Plan*)

Rencana penyelesaian yang telah dibuat sebelumnya kemudian dilaksanakan secara cermat pada setiap langkah. Dalam melaksanakan rencana atau menyelesaikan model matematika yang telah dibuat pada langkah sebelumnya, siswa diharapkan memperhatikan prinsip-prinsip atau aturan-aturan pengerjaan yang ada untuk mendapatkan hasil penyelesaian model yang benar. Kesalahan jawaban model dapat mengakibatkan kesalahan dalam menjawab permasalahan soal, sehingga pengecekan pada setiap langkah penyelesaian harus selalu dilakukan untuk memastikan kebenaran jawaban model tersebut.

4. Melihat kembali penyelesaian (*Looking Back*)

Hasil penyelesaian yang didapat harus diperiksa kembali untuk memastikan apakah penyelesaian tersebut sesuai dengan yang diinginkan dalam soal. Jika hasil yang didapat tidak sesuai dengan yang diminta maka perlu pemeriksaan kembali atas setiap langkah yang telah dilakukan untuk mendapatkan hasil sesuai dengan masalahnya dan melihat kemungkinan lain yang dapat dilakukan untuk menyelesaikan soal tersebut. Pemeriksaan tersebut diharapkan agar berbagai kesalahan yang tidak perlu

dapat terkoreksi kembali sehingga siswa dapat sampai pada jawaban yang benar sesuai dengan soal yang diberikan.

Dalam bukunya yang berjudul *How to Solve It*, Polya mengembangkan empat tahap proses pemecahan masalah yang kira-kira serupa dengan langkah-langkah berikut ini:⁷⁶

1. Memahami Masalah
 - a. Dapatkan anda menyatakan masalah dalam kata-kata sendiri?
 - b. Apa yang anda coba cari atau kerjakan?
 - c. Apa yang tidak diketahui?
 - d. Informasi apa yang anda dapatkan dari masalah yang dihadapi?
 - e. Jika ada, informasi apa yang tidak tersedia atau tidak diperlukan?

Langkah awal ini dimaksudkan untuk mengetahui informasi yang terdapat dalam masalah tersebut, misalnya apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, bagaimana situasi dari masalah tersebut.

2. Merencanakan Penyelesaian Masalah
 - a. Mencari pola.
 - b. Menguji masalah yang berhubungan serta menentukan apakah teknik yang sama bisa diterapkan atau tidak.

⁷⁶ Didi Suryadi dan Tatang Herman, *Eksplorasi Matematika Pembelajaran Pemecahan Masalah*, (Jakarta: Karya Duta Wahana, 2008), hal. 70-71.

- c. Menguji kasus khusus atau kasus yang lebih sederhana dari masalah yang dihadapi untuk memperoleh gambaran lebih baik tentang penyelesaian masalah yang dihadapi.
- d. Membuat sebuah tabel.
- e. Membuat sebuah diagram.
- f. Menulis suatu persamaan.
- g. Menggunakan strategi tebak-periksa.
- h. Bekerja mundur.
- i. Mengidentifikasi bagian dari tujuan keseluruhan.

Dalam bagian ini disarankan untuk menemukan hubungan antara variabel (halhal yang tidak diketahui) dengan data dalam masalah tersebut, kemudian merencanakan strategi yang sesuai berdasarkan hubungan tersebut.

3. Melaksanakan Rencana Penyelesaian Masalah

- a. Melaksanakan strategi sesuai dengan yang direncanakan pada tahap sebelumnya.
- b. Melakukan pemeriksaan pada setiap langkah yang dikerjakan. Langkah ini bisa merupakan pemeriksaan secara intuitif atau bisa juga berupa pembuktian secara formal.
- c. Upayakan bekerja secara akurat.

4. Pemeriksaan Kembali
 - a. Periksa hasilnya pada masalah asal.
 - b. Interpretasikan solusi dalam konteks masalah asal. Apakah solusi yang dihasilkan masuk akal?
 - c. Apakah ada cara lain untuk menyelesaikan masalah tersebut?
 - d. Jika memungkinkan, tentukan masalah lain yang berkaitan atau masalah lebih umumlain dimana strategi yang digunakan dapat bekerja.

Berdasarkan penjelasan di atas, langkah penyelesaian masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah langkah penyelesaian masalah matematika dari Polya. Adapun definisi pemecahan masalah matematika dalam penelitian ini adalah proses penyelesaian masalah matematika nonrutin berdasarkan tahapan Polya yakni memahami masalah, merencanakan penyelesaian, melakukan rencana penyelesaian dan melihat kembali penyelesaian.

5. Kemampuan Penalaran Matematika Menyelesaikan Soal *Problem Solving*

Kemampuan penalaran dalam menyelesaikan masalah matematika. Dalam mengungkap hal tersebut diperlukan indikator kemampuan penalaran dalam menyelesaikan masalah matematika. Indikator tersebut diturunkan dari indikator kemampuan penalaran matematika pada Tabel 2.1 dan disesuaikan dengan tahapan

penyelesaian masalah matematika Polya. Berikut adalah Tabel 2.2 indikator kemampuan penalaran dalam menyelesaikan masalah matematika.

Tabel 2.2
Indikator Kemampuan Penalaran dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Berdasarkan Tahapan Polya

Tahapan Polya	Indikator Kemampuan Penalaran Matematika
Memahami Masalah (Understanding the Problem)	<ul style="list-style-type: none"> - Siswa menjelaskan permasalahan yang ditemukan dalam soal setelah membaca soal dengan kata-kata sendiri. - Siswa menyebutkan apa yang diketahui dan ditanyakan dalam soal - Siswa dapat menjabarkan pernyataan-pernyataan atau data-data dan memberikan penjelasan/alasan yang dapat mendukung data yang dijabarkan.
Merencanakan Penyelesaian (Devising a Plan)	<ul style="list-style-type: none"> - Siswa dapat memperkirakan jawaban dan proses solusi. - Siswa dapat menggunakan pola/cara dan hubungan untuk menganalisis situasi yang dihadapi. - Siswa memilih strategi penyelesaian dari masalah matematika menggunakan tabel, diagram, grafik dan lain-lain.
Melaksanakan Rencana Penyelesaian (Carrying Out the Plan)	<ul style="list-style-type: none"> - Siswa dapat menyusun dan menguji perkiraan jawaban yang telah ditentukan. - Siswa dapat menggunakan data yang mendukung dan mengoperasikannya untuk mencari solusi permasalahan.
Melihat Kembali Penyelesaian (Looking Back)	<ul style="list-style-type: none"> - Siswa mengecek kembali hasil jawaban yang telah didapatkan serta penyelesaian yang telah dilakukan. - Siswa dapat menarik kesimpulan yang valid dan logis dengan memberikan alasan pada langkah penyelesaiannya.

(Anisatul Hidayati dan Suryo Widodo)

6. Materi Program Linier⁷⁷

a. Menyelesaikan masalah program linear

Program linear adalah suatu metode yang digunakan untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan optimasi linear (nilai maksimum dan nilai minimum) materi Program linear tidak lepas dengan sistem pertidaksamaan linear. Khususnya pada tingkat sekolah menengah, sistem pertidaksamaan linear yang dimaksud adalah sistem pertidaksamaan linear dua variabel.

b. Daerah himpunan penyelesaian

Penyelesaian program linear sangat terkait dengan kemampuan melakukan sketsa daerah himpunan penyelesaian sistem. Berikut ini adalah teknik menentukan daerah himpunan penyelesaian:

- 1) Buat sumbu koordinat kartesius
- 2) Tentukan titik potong pada sumbu x dan y dari semua persamaan-persamaan linearnya.
- 3) Sketsa grafiknya dengan menghubungkan antara titik-titik potongnya.
- 4) Pilih satu titik uji yang berada di luar garis.
- 5) Substitusikan pada persamaan.
- 6) Tentukan daerah yang dimaksud.

⁷⁷ Djarir, dkk., *Sumber Belajar Penunjang PLPG 2017 Pelajaran Mata Pelajaran/Paket Keahlian Matematika*, (Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2017), hal.4

Contoh :

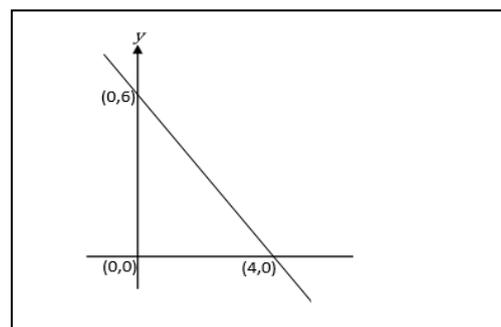
1). Buatlah Grafik himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear

$$3x + 2y \geq 12$$

$$3x + 2y = 12$$

x	y	(x,y)
0	6	(0,6)
4	0	(4,0)

Tabel 2. 3 Penyelesaian 1



Gambar 2.1 Grafik Penyelesaian 1

Titik uji O (0,0)

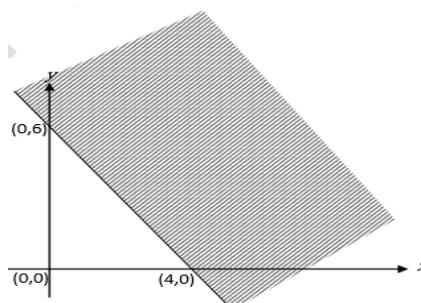
$$3x + 2y \geq 12$$

$$3(0) + 2(0) \geq 12$$

$$0 \geq 12 \text{ (salah)}$$

Dengan demikian titik (0,0) bukan termasuk dalam daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut ,sehingga daerah himpunan penyelesaian adalah sebelah atas dari garis $3x + 2y = 12$

Dengan demikian daerah pertidaksamaannya adalah



Gambar 2.2 Grafik Penyelesaian 2

c. Model Matematika⁷⁸

Program linear juga membutuhkan kemampuan untuk mengubah bahasa cerita menjadi bahasa matematika atau model matematika. Model matematika adalah bentuk penalaran manusia dalam menerjemahkan permasalahan menjadi bentuk matematika (dimisalkan dalam variabel x dan y) sehingga dapat diselesaikan. Berikut ini adalah latihan untuk mengubah soal cerita menjadi model matematika:

- 1) Sebuah pesawat udara berkapasitas tempat duduk tidak lebih dari 48 penumpang. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 60 kg dan kelas ekonomi hanya 20 kg. Pesawat hanya dapat menampung bagasi 1.440 kg. Jika harga tiket kelas utama Rp600.000,00 dan kelas ekonomi Rp400.000,00, pendapatan maksimum yang diperoleh adalah....

Jawab:

Misalkan:

x = banyaknya penumpang kelas utama

y = banyaknya penumpang kelas ekonomi

	x	y	Total	Pertidaksamaan Linear
Total penumpang	1	1	48	$x + y \leq 48$
Berat bagasi	60	20	1440	$60x + 20y \leq 1.440$
Pendapatan maksimum	600.000	400.000	Z	$600.000 x + 400.000 y = z$

Tabel 2. 4 Penyelesaian 2

⁷⁸ Djarir, dkk., *Sumber Belajar Penunjang ...*, hal.7

Jadi berdasarkan pertidaksamaan tersebut, model matematikanya adalah:

Total penumpang : $x + y \leq 48$

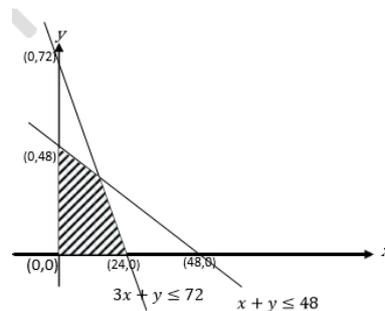
Berat bagasi : $60x + 20y \leq 1.440$; disederhanakan menjadi $3x + y$

≤ 72 Banyaknya penumpang di kelas utama (x) tidak mungkin

negatif : $x \geq 0$ Banyaknya penumpang di kelas ekonomi (y) tidak

mungkin negatif : $y \geq 0$

Gambar daerah himpunan penyelesaian



Gambar 2.3 Grafik Penyelesaian 3

- **Menentukan titik-titik sudutnya**

- ✓ Perpotongan garis-garis $x + y = 48$ dan $3x + y = 72$ Dengan melakukan teknik eliminasi dan substitusi didapatkan $x=12$; $y=36$ atau $(12,36)$

- ✓ Titik-titik sudut yang lain adalah $(0,0)$; $(24,0)$; dan $(0,48)$

- **Menguji titik-titik sudutnya:**

- ✓ Untuk $(12,36)$ disubstitusi ke fungsi objektifnya:

$$(600.000).12 + (400.000).36 = 7.200.000 + 14.400.000 = 21.600.000$$

✓ Untuk (24,0) disubstitusi ke fungsi objektifnya:

$$(600.000).24 + (400.000).0 = 14.400.000 + 0 = 14.400.000$$

✓ Untuk (0,48) disubstitusi ke fungsi objektifnya:

$$(600.000).0 + (400.000).48 = 0 + 19.200.000 = 19.200.000$$

Dengan demikian pendapatan maksimum diperoleh jika banyaknya penumpang pada kelas utama adalah 12 dan banyaknya penumpang pada kelas ekonomi adalah 36 dengan keuntungan: Rp.21.600.000

B. Penelitian Terdahulu

Penelitian ini akan diperkuat dengan adanya beberapa penelitian terdahulu, antara lain:

1. Anisatul Hidayati dan Suryo Widodo, Proses penalaran Matematis Siswa Dalam Memecahkan Masalah Matematika Pada Materi Pokok Dimensi Tiga Berdasarkan Kemampuan Siswa Di Sma Negeri 5 Kediri, (Kediri: Jurnal Math Educator Nusantara Volume 01 Nomor 02, Nopember 2015). Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, peneliti membuat kesimpulan tentang proses penalaran matematis siswa dengan kemampuan rendah, sedang, dan tinggi dalam memecahkan masalah berdasarkan tahap-tahap pemecahan masalah sebagai berikut:
 - a) Subjek dengan Kemampuan Matematika Rendah (SR) Subjek dengan kemampuan matematika rendah (SR) menunjukkan proses penalaran matematisnya dalam memecahkan masalah

kecuali pada tahap membuat rencana pemecahan masalah dan tahap melaksanakan rencana pemecahan masalah. Karena pada tahap membuat rencana pemecahan masalah tersebut SR hanya menunjukkan proses bernalar untuk menyusun rencana yang berupa langkah-langkah pemecahan masalah berdasarkan pengetahuan yang dimiliki dengan satu rencana pemecahan saja. Sedangkan pada tahap melaksanakan rencana pemecahan masalah SR tidak dapat bernalar saat melakukan operasi hitung terbukti dengan kesalahan pada beberapa operasi hitung yang dilakukan saat memecahkan masalah.

- b) Subjek dengan Kemampuan Matematika Sedang (SS) Subjek dengan kemampuan matematika sedang (SS) menunjukkan proses penalaran matematisnya pada setiap tahap memecahkan masalah kecuali tahap melaksanakan rencana pemecahan masalah. Karena pada tahap melaksanakan rencana pemecahan masalah SS hanya dapat bernalar saat memecahkan masalah dengan satu rencana saja dan tidak dapat bernalar saat memecahkan masalah menggunakan rencana pemecahan lain yang telah direncanakan sebelumnya pada tahap membuat rencana pemecahan masalah.
- c) Subjek dengan Kemampuan Matematika Tinggi (ST) Subjek dengan kemampuan matematika tinggi (ST) menunjukkan proses penalaran matematisnya pada setiap tahap memecahkan masalah.

2. Tatang Herman, *Cakrawala Pendidikan: Pembelajaran Berbasis Masalah Untuk Meningkatkan Kemampuan Penalaran Matematika Siswa SMP*, (Jakarta: FMIPA Universitas Pendidikan Indonesia, 2007). Hasil penelitiannya diperoleh bahwa bahan ajar yang dapat meningkatkan kemampuan penalaran siswa adalah bahan ajar yang menyajikan permasalahan terbuka serta merupakan permasalahan yang sering ditemukan siswa, baik permasalahan kehidupan sehari-hari maupun permasalahan yang berkaitan dengan dunia anak. Agar kemampuan penalaran siswa lebih berkembang, maka selama proses pembelajaran berlangsung diharapkan siswa terlibat secara aktif dalam melakukan aktivitas matematis, misalnya siswa melakukan diskusi dengan rekannya maupun dengan guru mengenai permasalahan matematika sehingga dapat mengkonstruksi dan mengevaluasi argumen-argumen mereka sendiri maupun argumen rekannya, serta dapat melakukan generalisasi saat penarikan kesimpulan.
3. Nuning Melianingsih dan Sugiman, *Jurnal Riset Pendidikan Matematika: Keefektifan Pendekatan *Open-Ended* dan *Problem Solving* Pada Pembelajaran Bangun Ruang Sisi Datar Di SMP*, (Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta, 2015). Berdasarkan hasil penelitiannya dan analisisnya dapat disimpulkan bahwa pendekatan *open-ended* pada pembelajaran matematika efektif ditinjau dari pencapaian kemampuan penalaran, pemecahan masalah,

dan komunikasi matematis siswa kelas VIII SMP Negeri 1 Pandak Bantul; pendekatan *problem solving* pada pembelajaran matematika efektif ditinjau dari pencapaian kemampuan penalaran, pemecahan masalah, dan komunikasi matematis siswa kelas VIII SMP Negeri 1 Pandak Bantul; dan pendekatan *open-ended* lebih efektif dibandingkan pendekatan *problem solving* pada pembelajaran matematika siswa kelas VIII SMP Negeri 1 Pandak Bantul.

4. Ririn Dwi Agustin, Kemampuan Penalaran Matematika Mahasiswa Melalui Pendekatan Problem Solving, (Malang: Jurnal Pedagogia ISSN 2089-3833 Volume. 5, No. 2, Agustus 2016). Dari hasil dan pembahasan disimpulkan bahwa :
 - a) Kemampuan penalaran matematika siswa yang berkemampuan tinggi termasuk kriteria baik;
 - b) Kemampuan penalaran matematika siswa yang berkemampuan tinggi termasuk kriteria baik;
 - c) Kemampuan penalaran matematika yang berkemampuan sedang termasuk kriteria cukup.
5. Ade Mulyana, Utari Sumarmo, DIDAKTIK: Meningkatkan Kemampuan Penalaran dan Kemandirian Belajar Siswa SMP Melalui Pembelajaran Berbasis Masalah, (Bandung: STKIP Siliwangi, 2015). Hasil penelitiannya adalah pencapaian dan peningkatan kemampuan penalaran matematik siswa yang mendapat pembelejaran berbasis masalah lebih baik dari pada siswa yang

mendapat pembelajaran konvensional. Kemampuan penalaran matematik siswa pada pembelajaran berbasis masalah masih tergolong sedang, dan pada pembelajaran konvensional penalaran matematik siswa tergolong rendah. Siswa pada pembelajaran berbasis masalah masih mengalami kesulitan dalam hal menyelesaikan soal dalam memberikan alasan terhadap kebenaran suatu pernyataan dalam materi perbandingan volume benda ruang sisi lengkung. Sedangkan siswa pada pembelajaran konvensional mengalami kesulitan dalam tiap butir tes KPM. Kesulitan tersebut adalah dalam memberikan penjelasan terhadap kecukupan unsur untuk menyelesaikan masalah, memberikan alasan terhadap kebenaran suatu pernyataan dan melaksanakan perhitungan berdasarkan aturan tertentu pada materi benda ruang sisi lengkung

C. Paradigma Penelitian

Munculnya berbagai permasalahan terkait menyelesaikan masalah matematika rendah sudah selayaknya mendapat perhatian khusus, baik para guru maupun siswa. Terlebih dalam beberapa penelitian terdahulu menyebutkan bahwa kemampuan pemecahan masalah yang rendah. Beberapa permasalahan rendahnya pemecahan secara umum antara lain, siswa tidak bisa mengubah masalah dalam bentuk matematis, siswa banyak melakukan kesalahan-kesalahan dalam menyelesaikan masalah matematika, siswa kurang memahami konsep matematika secara benar dan menyeluruh.

Adapun dampak rendahnya kemampuan menyelesaikan masalah matematika mengakibatkan kemampuan penalaran siswa pun rendah dapat dilihat dari siswa kesulitan memberikan penjelasan terhadap kecukupan unsur untuk memecahkan masalah; memberikan alasan terhadap kebenaran suatu pernyataan; memperkirakan jawaban, solusi, menarik kesimpulan serta melaksanakan perhitungan yang teliti. Siswa kesulitan memberikan alasan terhadap kebenaran solusi dan penalaran logis untuk membuat model.

Beberapa permasalahan kemampuan penalaran matematika siswa beserta penyebabnya akan diberikan solusi yaitu siswa dilatih untuk terbiasa berfikir dalam memecahkan masalah matematika. Siswa diberikan soal berbentuk cerita agar melatih kemampuan penalarannya. Siswa dibiasakan menggunakan langkah dan prosedur penyelesaian masalah untuk menyelesaikan soal matematika, maka kemampuan penalaran dalam menyelesaikan masalah matematika perlu diberikan dan ditingkatkan dalam proses pembelajaran.

Solusi yang diterapkan diharapkan dapat dijadikan sebagai bahan belajar bersama dalam meningkatkan kemampuan penalaran matematika siswa. Pada dasarnya kemampuan penalaran sangat dibutuhkan dalam menyelesaikan masalah matematika terutama dalam belajar matematika guna memperbaiki pembelajaran matematika. Apabila kemampuan siswa dalam memecahkan masalah matematika meningkat, maka kemampuan bernalar matematika baik pun ikut meningkat (hal ini sesuai bagan 2.4 dibawah ini):

Gambar 2.4 Bagan Paradigma Penelitian

